A javaslatokat 2019. április 30-ig várják, ötleteiket a

`bolyai.tarsulat@renyi.mta.hu`

címre várjuk, azokat összesítjük és továbbítjuk az IMU felé.

Társulatunk – csatlakozva az IMU felhívásához – szintén szervezne olyan eseményt a π-nap alkalmából, mellyel növeljük a matematika láthatóságát. Ehhez is várunk javaslatokat, ötleteket a fenti e-mail címre.

Bolyai János Matematikai Társulat

Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

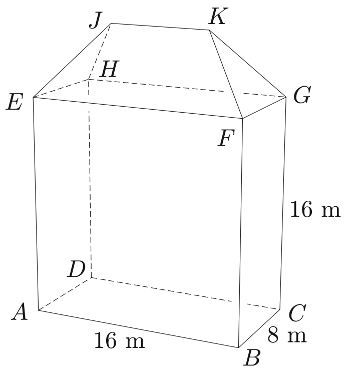
I. rész

1. *a*) A 2, 0, 1, 9 számjegyekből az összes lehetséges módon háromjegyű természetes számokat képeztünk. Számítsuk ki annak a valószínűségét, hogy a képzett számok közül egyet véletlenszerűen kiválasztva, annak számjegyei különbözők. (*3 pont*)

b) Oldjuk meg a $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ halmazon a $\sin(x+2019\pi)=-\frac{1}{2}$ egyenletet. (*8 pont*)

2. A Regéci Vár egy 1300 körül épült vár, ahol II. Rákóczi Ferenc fejedelem a gyermekkorát töltötte. Az *1. ábrán* ennek a várnak a XIV. századi állapota látható, a *2. ábrán* pedig egy vázlatos képet láthatunk annak tornyáról.

1. ábra



2. ábra

A torony az $ABCDEFGH$ téglatestből és az $EFGHJK$ tetőből áll. A tornyot alkotó téglatest külső méretei: $AB=16$ m, $BC=8$ m és $CG=16$ m.

a) Mekkora az oldalfalak térfogata, ha a fal vastagsága 2 m és az összes faltérfogatot az ablakok, ajtók és lőrések 5%-kal csökkentik? (*4 pont*)

Tudjuk, hogy az $EFGHJK$ tető magassága 5 méter, és az EJH és FKG egyenlő szárú háromszögek síkjai 50°-os szöget zárnak be az $EFGH$ síkkal.

b) Mekkora a JK szakasz hossza? (*5 pont*)

A vár 2018-as rekonstrukciója során gimnazisták több napon keresztül segítették a régészek munkáját. A diákok 60%-a ásásban, 30%-a feltárásban, és 45%-a talicskázásban segített. Egyféle munkát 29-en végeztek, pontosan kétféle munkafolyamatban a tanulók $\frac{1}{5}$ része, mindháromban pedig 7,5%-a vett részt.

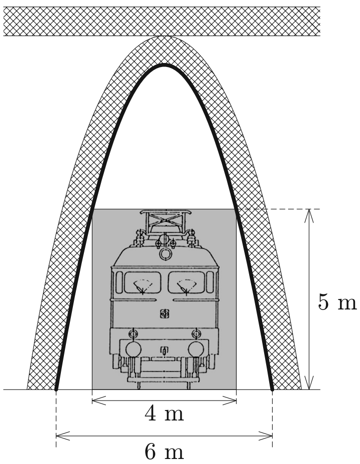
c) Hány tanuló vett részt összesen a munkálatokban? (*3 pont*)

3. *a*) Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

$$\log_2 x \leqslant \log_{\frac{1}{2}}(4x) \qquad (7\ pont)$$

b) Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert, ahol x és y nemnegatív valós számok.

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{x}-\sqrt{y}&=8,\\ \sqrt{xy}&=33.\end{aligned}\right\} \qquad (7\ pont)$$



4. A vasúti szaknyelvben űrszelvénynek nevezik a szerelvények akadálytalan áthaladásához szükséges térnek a vágányokra merőleges keresztmetszetét. A nemzetközi szabványok szerint az űrszelvény jellemzően 4 m széles és 5 m magas. Az alakja általában követi a szerelvény alakját, de az egyszerűség kedvéért ez legyen most az ábrán szürkével jelzett téglalap. A vasút egy olyan híd alatt halad át, amelynek acél tartószerkezete parabolaív alakú. A tartószerkezet belső íve (az *ábrán* vastag fekete vonallal) a sínek szintjén 6 m széles és éppen nem lóg be az űrszelvénybe.

a) Milyen magas a híd tartószerkezete a belső ívének középső, legmagasabb pontján? (*8 pont*)

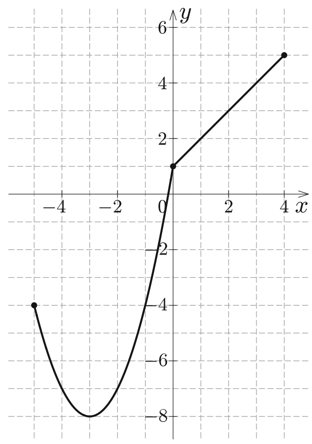
A vasútvonal áthalad egy olyan 24 méter hosszú, egyenes alagúton is, amelynek keresztmetszete parabolaszelet alakú. A parabolaszeletet a koordináta-rendszerben megadott

$$y=-\frac{1}{2}x^2+8$$

egyenletű parabola és az x tengely határolja. A koordináta-rendszerben 1 egység 1 métert jelent.

b) Hány m^3 követ kellett kitermelni az alagút építése közben? Válaszunkat egészre kerekítve adjuk meg. (*6 pont*)

II. rész



5. *a*) Határozzuk meg azt a legkisebb, különböző számjegyekből álló 6-jegyű természetes számot, amely a 0; 1; 2; 3; 4; 5 számjegyekből áll és osztható 12-vel. (*5 pont*)

b) A $\{0;1;2;3;4;5\}$ halmaznak hány részhalmaza tartalmaz legalább 1 db páratlan számot? (*3 pont*)

c) Adjuk meg az *ábrán* látható függvény hozzárendelési szabályát, és számítsuk ki a függvény $E(-1;-4)$ pontjában húzott érintőjének meredekségét. (*8 pont*)

6. Tekintsük az $a_n = n^2 + 2$ sorozatot.

a) Határozzuk meg a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n}$ határértéket. Válaszunkat indokoljuk. (*2 pont*)

b) Számítsuk ki az (a_n) sorozat első száz tagjának összegét. (*4 pont*)

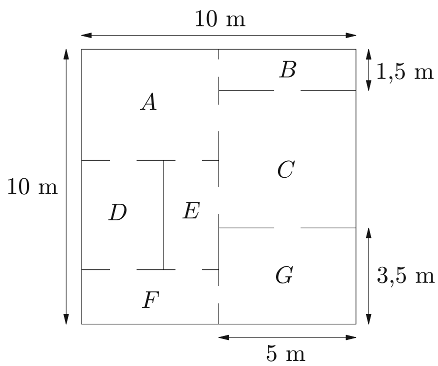
Az (a_n) sorozat egymást követő tagjai segítségével a $b_n = a_{n+1} - a_n$ sorozatot képeztük.

c) Igazoljuk, hogy a (b_n) sorozat számtani sorozat. (*3 pont*)

d) Igazoljuk teljes indukcióval, hogy az (a_n) sorozat $a_1 = 3$ és $n > 1$ esetén megadható az

$$a_n = \left(1 + \frac{2n-1}{n^2 - 2n + 3}\right) \cdot a_{n-1}$$

rekurzióval is. (*7 pont*)



7. Az *ábrán* egy családi ház földszintjének alaprajza látható a benne lévő hét helyiséggel és az ajtókkal együtt. A rajzon feltüntettük a földszint és néhány helyiség méretét is. (A földszinti bejárati ajtó nem szerepel az ábrán, mert a megoldáshoz az nem szükséges.)

a) A házban lévő helyiségeket és az ajtókat egy gráffal szemléltethetjük úgy, hogy a gráf csúcsai (A, B, C, D, E, F, G) a helyiségeket jelölik, a gráf két csúcsa között pedig pontosan akkor vezet él, ha a két csúcsnak megfelelő helyiség között van ajtó. Rajzoljuk fel a családi ház földszintjének gráfját (a csúcsok azonosításával együtt), és határozzuk meg a felrajzolt gráfban a fokszámok összegét. (*3 pont*)

A lakás fölött a földszinttel megegyező méretű padlás, a ház alapterületének negyede alatt pince is van. A család macskája a pince padlóján fele olyan szívesen, a padláson viszont kétszer olyan szívesen van, mint a földszinten.

b) Mekkora valószínűséggel fekszik a macska a C jelű szobában? (*8 pont*)

c) Legalább hány élt kell kitörölni egy 7 csúcsú teljes gráfból ahhoz, hogy az már ne legyen összefüggő? Állításunkat igazoljuk. (*5 pont*)

8. Az alábbi *táblázat* hazánk napsütéses óráinak átlagos mennyiségét mutatja órában mérve az egyes évszakokban.

Tavasz	Nyár	Ősz	Tél
575,2	845,7	403	180,1

a) Határozzuk meg a napsütéses órák mennyiségének átlagát és szórását. (*4 pont*)

Az *ábrán* látható napóra egy magyar városban található. A napóra mutatójának hossza 60 cm, északi irányba áll és a vízszintes talapzattal 60°-os szöget zár be. A tavaszi nap-éj egyenlőség idején (2018. március 20-án) a Nap delelési magassága 42° volt. A Nap delelési magasságán a Nap irányába mutató félegyenesnek a vízszintessel bezárt szögét értjük.

b) Milyen hosszú volt ekkor a napóra mutatójának árnyéka a vízszintes alaplapon? (*5 pont*)

A napóra felületének koszolódását úgy szeretnék csökkenteni, hogy talapzatra helyezik a napórát. A talapzat egy olyan téglatest alakú betontömb, amelynek fedőlapját és oldallapjait 2 cm vastag márványlappal borítják be. A márvánnyal beborított betontömb alaplapja 1 m oldalhosszúságú négyzet, magassága 80 cm. A márványbevonat készítése közben a megvásárolt mennyiség 10%-a hulladék lesz.

c) Mennyibe kerül a betontömb beborításához szükséges márvány, ha 1 m^3 2 cm vastag márványlap ára 540 000 Ft? Válaszunkat *tízezer* forintra kerekítve adjuk meg. (*7 pont*)

9. Az alábbi táblázatban a gyorshajtás miatt bekövetkezett halálos közúti balesetek száma látható a Nyugat-Dunántúlon 2010-től 2018-ig a megadott időszakban.

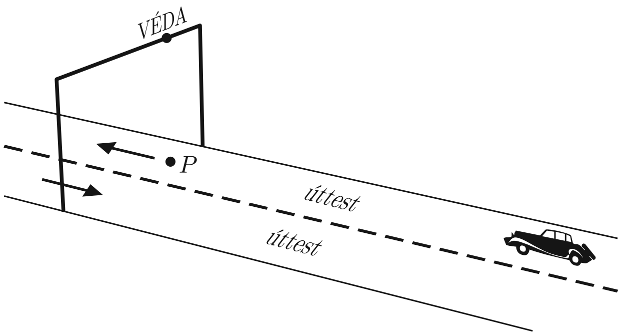
Halálos közúti balesetek száma 2010-től 2018-ig 01.01-től 02.28-ig (Nyugat-Dunántúl)

Év	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
Balesetek száma	9	8	12	7	18	14	15	12	8

a) Határozzuk meg a balesetek számának mediánját és terjedelmét. (*3 pont*)

Hazánkban a rendőrség rendszámtábla alapján azonosítja a gyorshajtókat. Egy sebességmérés alkalmával az úttesten szabályosan közlekedő autós éppen szemben van a mérést végző készülékkel, amit VÉDÁ-nak hívnak. A 6,5 m magas állványra szerelt sebességmérő berendezésből 15°-os lehajlási szögben érkezik az úttestre a lézernyaláb.

(A lézernyaláb szélességétől az egyszerűség kedvéért most tekintsünk el.)



b) Érzékeli-e a sebességmérő berendezés az ebben a pillanatban a P ponttól 40 m távolságban az úttest közepén a VÉDA irányába közlekedő személyautót? (*4 pont*)

Egy biztosító honlapján a következőket olvashatjuk:

„Az autóbiztosítással rendelkező ügyfeleink 65 százalékát férfiak, 35 százalékát nők teszik ki. Balesetek szempontjából a férfiak a károkozók 69 százalékát teszik ki. Úgy tűnik, a hölgyek biztonságosabban vezetnek, ugyanis a károkozók körében csak 31 százalékos az arányuk."

c) Vizsgáljuk meg, hogy (a leírtak alapján) az alábbi két esemény közül melyiknek nagyobb a valószínűsége. (*9 pont*)

I. Ha hölgy vezeti az autót, akkor ő okozza a balesetet.

II. Ha férfi vezeti az autót, akkor ő okozza a balesetet.

Varga Péter
Budapest

Megoldásvázlatok a 2019/3. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket:*

a) $\dfrac{2x}{x-1}+\dfrac{3}{x+1}=\dfrac{6}{1-x^2}$, (*4 pont*)

b) $\cos(2x)+5\sin x=3$, (*5 pont*)

c) $|x-2|+x=4\sqrt{x}-2$. (*5 pont*)

Megoldás. *a)*

$$\frac{2x}{x-1}+\frac{3}{x+1}=-\frac{6}{(x-1)(x+1)} \qquad \Big/\cdot(x-1)(x+1), \quad x\neq \pm 1$$

$$2x(x+1)+3(x-1)=-6; \quad 2x^2+5x+3=0; \quad x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{25-24}}{4}.$$

$x_1=-1$, ez a kikötés miatt nem gyöke az egyenletnek; $x_2=-\frac{3}{2}$. Az egyenlet megoldása: $x=-1{,}5$. (Ellenőrzés: $-4{,}8=-4{,}8$.)

b) $$1-2\sin^2 x+5\sin x=3; \quad 0=2\sin^2 x-5\sin x+2;$$

$$(\sin x)_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4}=\frac{5\pm 3}{4}.$$

$(\sin x)_1=2$ nem lehetséges; $(\sin x)_2=\frac{1}{2} \Rightarrow x_1=\frac{\pi}{6}+2k\pi$, $(k\in\mathbb{Z})$; $x_2=\frac{5\pi}{6}+2l\pi$, $(l\in\mathbb{Z})$. (Ellenőrzés: $\frac{1}{2}+\frac{5}{2}=3$.)

c) Kikötés: $0\leqslant x$. Ha $2\leqslant x$, akkor $x-2+x=4\sqrt{x}-2$; $2x=4\sqrt{x}$, innen $\sqrt{x}\big(\sqrt{x}-2\big)=0 \Rightarrow x_1=0$; $x_2=4$; az x_1 kisebb 2-nél, tehát nem megoldás, a 4 azonban igen.

Ha $x<2$, akkor $-(x-2)+x=4\sqrt{x}-2$; ebből a $4=4\sqrt{x}$ egyenletet kapjuk, aminek a megoldása $x_3=1$. Az egyenlet gyökei tehát $x_2=4$; $x_3=1$. (Ellenőrzés: $2=2$, illetve $6=6$.)

2. *Egy háromszögben az egyik oldal kétszer akkora, mint egy másik oldal; az előbbivel szemközti szög $60°$-kal nagyobb az utóbbival szemközti szögnél. A háromszög területe $2\sqrt{3}$ területegység. Mekkorák a háromszög oldalai és szögei?*

(*12 pont*)

Megoldás. Legyen a c oldal kétszerese a-nak, így $\gamma=\alpha+60°$, írjuk fel a szinusz-tételt:

$$\frac{\sin(\alpha+60°)}{\sin\alpha}=\frac{2a}{a}, \quad \sin(\alpha+60°)=2\sin\alpha;$$

$$\sin\alpha\cdot\cos 60°+\cos\alpha\cdot\sin 60°=2\sin\alpha; \quad \sin\alpha\cdot\frac{1}{2}+\cos\alpha\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sin\alpha;$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos\alpha=\frac{3}{2}\sin\alpha \quad \Big/\cdot\frac{2}{3}, \ :\cos\alpha\neq 0;$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha=30°; \quad \gamma=90°; \quad \beta=60°.$$

Alkalmazzuk a trigonometrikus területképletet: $\frac{a\cdot(2a)\sin 60°}{2}=2\sqrt{3}$; $a^2\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$; innen $a^2=4 \Rightarrow a=2$, $c=4$, $b=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 4=2\sqrt{3}$. Megkaptuk a keresett adatokat.

3. *a) Igaz-e az A, B kijelentések tetszőleges logikai értékénél, hogy*

$$\big((\neg A \to \neg B) \wedge A\big) \to B = \text{i}?$$

($\neg A =$ nem A.) (*5 pont*)

b) Igaz-e, ha $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=0$, *akkor* $\lim_{n\to\infty}(a_n)+\lim_{n\to\infty}(b_n)=0$*? Válaszunkat indokoljuk.* (*3 pont*)

c) Hány pontja lehet annak az egyszerű, összefüggő gráfnak, amelynek 8 éle van? (*4 pont*)

Megoldás. *a*) A válasz: NEM, az indoklás:

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \to \neg B$	$(\neg A \to \neg B) \wedge A$	$\big((\neg A \to \neg B) \wedge A\big) \to B$
i	i	h	h	i	i	i
i	h	h	i	i	i	h
h	i	i	h	h	h	i
h	h	i	i	i	h	i

Azaz, ha $A=\text{i}$, $B=\text{h}$, akkor a művelet eredménye hamis.

Megjegyzés. Itt az *a tipikusan hibás* következtetés van kicsit átfogalmazva, amit gyakran tapasztalhatunk: „Ha A, akkor B, mivel nem A, tehát nem B”.

b) A válasz: NEM. Elég egy megfelelő ellenpéldát mutatni.

Pl.: $a_n = 0,1,0,1,0,1,\ldots$; $b_n = 0,-1,0,-1,0,-1,\ldots$, vagy

pl.: $a_n = n+\frac{1}{n}$; $b_n=-n$, vagy

pl.: $a_n = 2^{-n}-\sin\left(\frac{n\cdot\pi}{2}\right)$; $b_n=\sin\left(\frac{n\cdot\pi}{2}\right)$ stb.

c) A pontok száma nem lehet 4, vagy annál kevesebb, mert az ilyen gráfok éleinek száma legfeljebb 6 lehet (ha a 4 pontú gráf teljes gráf). Az n pontú legkevesebb élt tartalmazó összefüggő gráf (fa gráf) éleinek száma $n-1$. Ha $n-1=8$, akkor $n=9$. A gráf pontjainak száma nem lehet 9-nél nagyobb, mert akkor nem lenne összefüggő. A megoldás tehát: $5\leqslant n\leqslant 9$, azaz legalább 5 és legfeljebb 9. Ezek mindegyike előállítható.

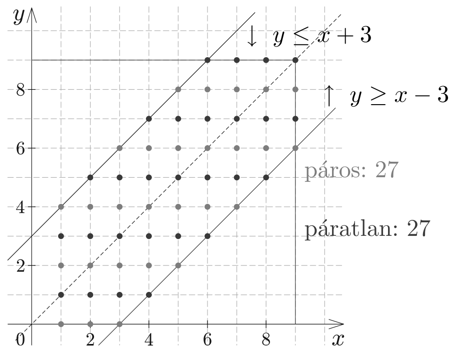
4. *a) Hány olyan kétjegyű szám van, amelyben a számjegyek különbségének abszolút értéke legfeljebb* 3? (*8 pont*)

b) Ha ezek közül véletlenszerűen kiválasztunk kettő különböző számot, mennyi a valószínűsége annak, hogy az egyik páros, a másik páratlan lesz? (*5 pont*)

Megoldás. *a*) Legyen a kétjegyű szám első jegye x, a második y, ahol $1\leqslant x\leqslant 9$, $0\leqslant y\leqslant 9$ és $x,y\in N$.

$$|x-y|\leqslant 3,\quad \text{ha } y\leqslant x, \text{ akkor } x-y\leqslant 3 \ \Rightarrow\ y\geqslant x-3;$$
$$\text{ha } x\leqslant y, \text{ akkor } y-x\leqslant 3 \ \Rightarrow\ y\leqslant x+3.$$

Ábrázolva az egyeneseket, a megadott tartományban 54 rácspont van, azaz 54 ilyen szám van.



b) Az *ábráról* az is könnyen leolvasható, hogy 27 páros, 27 páratlan szám van közöttük, így

$$P(A)=\frac{\binom{27}{1}\cdot\binom{27}{1}}{\binom{54}{2}}=\frac{27\cdot 27}{\frac{54\cdot 53}{2\cdot 1}}=\frac{27}{53}.$$

II. rész

5. *Egy téglalap oldalainak mérőszáma egész szám. Ezt a téglalapot oldalaival párhuzamos egyenesekkel egységnégyzetekre daraboltuk, majd a széleken levőket fehérre, a többit feketére festettük.*

a) *Mekkorák a téglalap oldalai, ha kétszer annyi fekete négyzet lett, mint amennyi fehér?* (*9 pont*)

b) *Az a*) *részben kapott téglalapokból kiválasztottuk azt, amelynek oldalméretei között legkisebb a különbség, majd egy 8 egység sugarú piros körlap közepére erősítettük. Az így kapott eszközt céltáblának használjuk, ahol a telitalálatot az jelenti, ha fehér mezőbe csapódik a lövedék. Feltesszük, hogy minden lövés eltalálja a céltáblát, és annak minden pontját egyenlő valószínűséggel. Mekkora a valószínűsége, hogy Vilmos négy lövésből legalább kétszer telitalálatot ér el? Az eredményt százalékban egészre kerekítve fejezzük ki.* (*7 pont*)

Megoldás. *a*) A téglalap oldalainak hosszát jelölje n, k ($n,k\in\mathbb{Z}^+$), a fekete négyzetek száma $(n-2)(k-2)$, ez kétharmada az összes négyzet számának, vagyis

$$\frac{2}{3}n\cdot k=(n-2)(k-2);\quad 2nk=3(nk-2n-2k+4);$$

$$0=nk-6n-6k+12\quad \big/+24;$$

$$24=nk-6n-6k+36;\quad 24=(n-6)(k-6);\quad 24=2^3\cdot 3,$$

ezért a 24-nek 8 pozitív osztója van. A lehetséges párosítások:

$$n-6=1,\ \ k-6=24; \qquad n-6=2,\ \ k-6=12;$$

$$n-6=3,\ \ k-6=8; \qquad n-6=4,\ \ k-6=6.$$

(A többi ugyanezeket a számpárokat adja felcserélve.)

A téglalap két oldalának hosszára tehát a következő lehetőségek adódnak:

7, 30,	ekkor	70 fehér, 140 fekete
8, 18,		48 fehér, 96 fekete
9, 14,		42 fehér, 84 fekete
10, 12 (egység),		40 fehér, 80 fekete négyzet keletkezett.

b) A céllaphoz választott téglalap a 10×12-es lesz, itt a legkevesebb a különbség az oldalak hossza között. A középpontokat egymáshoz illesztve látható, hogy a téglalap a körlap belsejében van, a félátló kisebb a sugárnál ($5^2+6^2<8^2$). Annak a valószínűsége, hogy egy lövés telitalálatot ér: $p=\frac{40}{8^2\pi}=0{,}1989$, nem ér telitalálatot: $q=0{,}8011$.

Jelölje ξ azt, hogy a négy lövésből hány telitalálat lett. ξ lehetséges értékei: $0,1,2,3,4$.

$$P(\xi=0)=\binom{4}{0}p^0q^4=0{,}4119; \quad P(\xi=1)=\binom{4}{1}p^1q^3=0{,}4090.$$

A komplementer esemény valószínűsége: $P(\xi=0)+P(\xi=1)=0{,}4119+0{,}4090=$ $=0{,}8209$, ezért az esemény valószínűsége: $1-0{,}8209=0{,}1791$.

Annak a valószínűsége, hogy Vilmos négy lövésből legalább kétszer telitalálatot ér el, 18%.

6. *a*) *Az $f(x)=\frac{x^2}{4}$ függvény grafikonját tükrözzük az $A(2;5)$ pontra. Hol metszi az így kapott görbe az $f(x)$ grafikonját?* (*5 pont*)

b) *Húzzunk érintőt a $P(3;-4)$ pontból $f(x)$ grafikonjához. Írjuk fel az érintők egyenletét.* (*6 pont*)

c) *Mekkora a területe annak a síkidomnak, melyet az $f(x)$ függvény grafikonja és a $P(3;-4)$ ponton átmenő érintők zárnak közre?* (*5 pont*)

Megoldás. *a*) Az $f(x)$ függvény grafikonja egy parabola, amelynek tengelypontja az origó, tengelye az y tengely, paramétere 2. Az $A(2;5)$ pontra tükrözve a tengelypontja $T'(4;10)$ lesz, tengelye párhuzamos marad az y tengellyel, lefelé nyílik, így egyenlete: $y-10=-\frac{1}{4}(x-4)^2$, y-ra rendezve: $y=-\frac{1}{4}x^2+2x+6$.

(Ezt megkaphatjuk másképpen is. Legyen a $P(x;y)$ pont tükörképe az $A(2;5)$ pontra nézve $P'(x';y')$, ekkor a felezőpont koordinátáira vonatkozó tétel szerint $\frac{x+x'}{2}=2$, $\frac{y+y'}{2}=5 \Rightarrow x=4-x'; y=10-y'$. Ezeket beírva az $y=\frac{1}{4}x^2$-be kapjuk, hogy $4(10-y')=(4-x')^2$, ami rendezve: $y'=-\frac{1}{4}x'^2+2x'+6$, tehát ugyanaz, mint a korábban kapott egyenlet.)

A két görbe metszéspontjait az $\frac{1}{4}x^2 = -\frac{1}{4}x^2 + 2x + 6$ egyenletből kapjuk. Rendezve:

$$\frac{1}{2}x^2 - 2x - 6 = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-6)}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{1},$$

$$x_1 = 6; \quad y_1 = 9,$$

$$x_2 = -2; \quad y_2 = 1.$$

A metszéspontok: $M(-2;1)$, $N(6;9)$.

b) A $P(3;-4)$ ponton átmenő, m meredekségű egyenes egyenlete: $y-(-4) = m(x-3)$; $y = mx - 3m - 4$. Ezt beírva y helyére $mx - 3m - 4 = \frac{1}{4}x^2$, majd rendezve az $x^2 - 4mx + 12m + 16 = 0$ paraméteres másodfokú egyenletet kaptuk, amelynek egy megoldása van a két görbe érintkezése miatt, vagyis $D = 0$, azaz

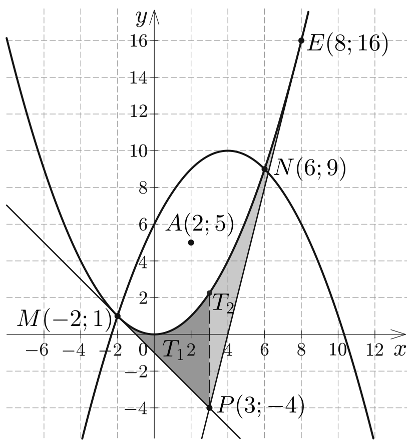
$$(-4m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (12m + 16) = 0; \quad 16m^2 - 48m - 64 = 0 \quad \big/ : 16;$$

$$m^2 - 3m - 4 = 0; \quad m_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} \quad \Rightarrow \quad m_1 = 4;\ m_2 = -1.$$

Az érintők egyenlete: $y = 4x - 16$, $y = -x - 1$.

Eljuthatunk az érintők egyenletéhez más módon is. Az $f(x)$ függvény deriváltja $f'(x) = \frac{1}{4} \cdot 2x = \frac{1}{2}x$. A parabola $P_0\left(x_0; \frac{1}{4}x_0^2\right)$ pontjához húzott érintő meredeksége $m = f'(x_0) = \frac{1}{2}x_0$, az érintő egyenlete

$$y - \frac{1}{4}x_0^2 = \frac{1}{2}x_0(x - x_0); \quad y = \frac{1}{2}x_0 x - \frac{1}{4}x_0^2.$$



Ennek az egyenesnek pontja a $P(3;-4)$ pont, tehát:

$$-4 = \frac{1}{2}x_0 \cdot 3 - \frac{1}{4}x_0^2;$$

rendezve:

$$x_0^2 - 6x_0 - 16 = 0;$$

$$(x_0)_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36+64}}{2} \quad \Rightarrow$$

$$(x_0)_1 = 8;\ (x_0)_2 = -2.$$

Megkaptuk az érintési pontok első koordinátáit. (Ezek egyébként kellenek majd a *c*) részhez.) Az érintők egyenlete:

$$y = \frac{1}{2} \cdot 8x - \frac{1}{4} \cdot 8^2 = 4x - 16;$$
$$y = \frac{1}{2} \cdot (-2) \cdot x - \frac{1}{4} \cdot (-2)^2 = -x - 1.$$

c) Az érintési pontok abszcisszái az $x_{1,2} = \frac{4m}{2}$ egyenletből adódnak (illetve a *b*) rész második megoldásából már ismerjük őket), $m = 4$ esetén 8; $m = -1$ esetén -2 lesz értékük. A területszámítást két részre bontjuk:

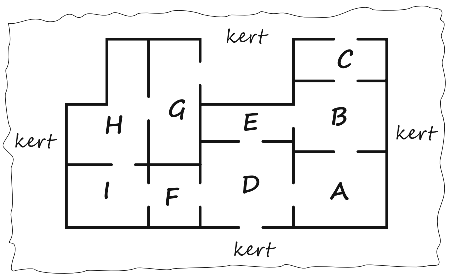
$$T_1 = \int_{-2}^{3} \left(\frac{1}{4}x^2 - (-x-1)\right) \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{4}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}x^2 + x\right]_{-2}^{3} =$$
$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{27}{3} + \frac{1}{2} \cdot 9 + 3 - \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{-8}{3} + \frac{1}{2} \cdot 4 - 2\right) = \frac{125}{12},$$
$$T_2 = \int_{3}^{8} \left(\frac{1}{4}x^2 - (4x-16)\right) \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{4} \cdot \frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + 16x\right]_{3}^{8} = \frac{128}{3} - \frac{129}{4} = \frac{125}{12}.$$

A síkidom területe $T = T_1 + T_2 = \frac{125}{6}$ területegység lett.

7. *a*) *Mutassuk meg, hogy minden* n *természetes számra igaz, hogy* $3 \mid n^3 + 8n$. (*6 pont*)

b) *Oldjuk meg a* $p + q^n = 2019$ *egyenletet, ahol* p, q *pozitív prím,* n *pozitív egész szám. Használjuk a függvénytáblázatot.* (*6 pont*)

c) *Nagy úr éppen most kísérte végig vendégeit a birtokán, amelynek során minden ajtón pontosan egyszer mentek át. A bemutató végén a nappaliban pezsgővel koccintottak a találkozásra. Melyik helyiség a nappali? A helyiségek betűjelének felsorolásával adjunk meg egy lehetséges bejárási sorrendet.* (*4 pont*)



Nagy úr házának alaprajza

Megoldás. *a*) *I. megoldás.* $n^3 + 8n = n(n^2 + 8)$, az n 3-mal osztva 0-t, vagy ± 1-et ad maradékul. Ha $n = 3k$, akkor a szorzat első tényezője osztható 3-mal, így a szorzat is. Ha $n = 3k \pm 1$, akkor

$$n^2 = (3k \pm 1)^2 = 9k^2 \pm 6k + 1;$$
$$n^2 + 8 = 9k^2 \pm 6k + 9 = 3(3k^2 \pm 2k + 3),$$

ebben az esetben a második tényező osztható 3-mal. Ezzel bizonyítottuk az állítást.

II. megoldás.

$$n^3+8n=(n^3-n)+9n=n(n^2-1)+9n=n(n-1)(n+1)+9n.$$

Az átalakítás után a kéttagú kifejezés második tagja nyilván osztható 3-mal, az első tagban pedig három szomszédos egész szám szerepel, ezek egyike biztosan osztható 3-mal, így a szorzat is. Mivel két 3-mal osztható szám összege is osztható 3-mal, az állítás igaz.

(*Megjegyzés.* Itt felismerhetjük a „kis Fermat-tétel” $p=3$-ra vonatkozó esetét: $p\mid n^p-n$, ahol p prímszám, n egész szám.)

III. megoldás: teljes indukcióval. $n=0$-ra igaz, tegyük fel, hogy n-re igaz, bizonyítjuk, hogy $(n+1)$-re is igaz:

$$(n+1)^3+8(n+1)=n^3+3n^2+3n+1+8n+8=$$
$$=(n^3+8n)+3(n^2+n+3).$$

Az első tag az indukciós feltétel miatt osztható 3-mal, a második is osztható 3-mal, így az összeg is.

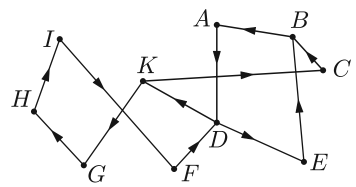
b) Az egyik prímnek 2-nek kell lennie, különben a bal oldal páros volna, nem lehetne az összeg 2019. Legyen $p=2$, ekkor $q^n=2017$. Mivel 2017 prím, így a $q=2017$, $n=1$ megoldást kaptuk. Legyen most $q=2$, ekkor $p=2019-2^n$. Az n értéke legfeljebb 10 lehet, nagyobb n-re p negatív lenne. Az áttekinthetőség kedvéért készítsük el az alábbi táblázatot:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
p	2017	2015	2011	2003	1987	1955	1891	1763	1507	995
	prím	$5\cdot403$	prím	prím	prím	$5\cdot391$	$31\cdot61$	$41\cdot43$	$11\cdot137$	$5\cdot199$

Megjegyzés. A függvénytáblázat 4000-ig felsorolja a prímeket, célszerű használni, de ha nem, akkor a 2015, 1955, 995 nyilván nem prím, a többiek sem oszthatók 2, 3, 5-tel, elég az osztásokat 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43-mal elvégezni $\left(\sqrt{2019}\approx 44{,}93\right)$, ami „rabszolgamunka”, de viszonylag gyorsan elvégezhető.

A megoldások tehát:

p	q	n
2	2017	1
2017	2	1
2011	2	3
2003	2	4
1987	2	5



c) Ábrázoljuk egy 10 pontú gráffal az egyes helyiségek ajtóval való összeköttetéseit (a kert is helyiség) úgy, hogy a pontokat (helyiségek) ott köti össze él, ahol ajtó van közöttük. A gráfban K és B foka 3, D-é 4, a többié 2. Olyan útvonalat keresünk, amely minden élet pontosan egyszer érint, ez csak olyan lehet, amelyik K-ból indul és B-ben végződik, vagy fordítva, mert a többi pont páros foka miatt a végén (vagy elején) nem tartózkodhatnánk ott, hiszen az egyik élen érkeztünk, a másikon távoztunk (a D-nél ezt kétszer).

A nappali tehát a B helyiség. Egy lehetséges útvonal: $KCBADKGHIFDEB$ (nyitott Euler-vonal).

8. *Egy kozmetikai cég saját termékét három változatban forgalmazza a hatóanyag töménységétől, a kiszerelés mennyiségétől és a csomagolástól függően. Az A jelű termék* 150 g*-os,* 10% *töménységű; a B jelű* 100 g*-os,* 20% *töménységű; a C jelű* 50 g*-os,* 30% *töménységű. A hatóanyag és az oldószer a termék árában a mennyiségével egyenes arányban jelenik meg; az A és B jelű termék csomagolása kétszer annyiba kerül, mint a C jelű terméké. Az üzletben az A* 2275 Ft*-ba, a B* 2500 Ft*-ba, a C pedig* 1725 Ft*-ba kerül dobozonként.*

a) Mennyi a hatóanyag és az oldószer grammonkénti ára? (*7 pont*)

Anna egyik nap észrevette, hogy az üzlet egyik polcán az A, B, C jelű termékekből annyi van, hogy számuk egy növekvő mértani sorozat három szomszédos elemével egyenlő. A számok átlaga 14*, szórása* $2\sqrt{14}$.

b) Hány termék volt a polcon az egyes fajtákból? (*9 pont*)

Megoldás. *a*) A hatóanyag ára: x Ft/g; az oldószeré y Ft/g; a C jelű termék dobozának ára z.

Az A jelű termékben 15 g hatóanyag és 135 g oldószer van, így az ára: $15x + 135y + 2z = 2275$ (Ft).

A B jelűben 20 g hatóanyag és 80 g oldószer van, ára: $20x + 80y + 2z = 2500$ (Ft).

A C jelűben 15 g hatóanyag és 35 g oldószer van, ára: $15x + 35y + z = 1725$ (Ft).

A harmadik egyenletet szorozzuk meg (-2)-vel, majd adjuk hozzá a másik kettőhöz. Az elsőből: $-15x + 65y = -1175 \ / \cdot 2$; $-30x + 130y = -2350$. A másodikból: $-10x + 10y = -950 \ / \cdot (-3)$; $30x - 30y = 2850$. Összeadva $100y = 500$. Ebből $y = 5$, ezt beírva $-10x + 50 = -950$-be, x-re 100 adódik. A hatóanyag ára 100 Ft, az oldószeré 5 Ft grammonként. (A C termék csomagolása 50, az A és B terméké pedig 100-100 Ft-ba került.)

Ellenőrzéssel győződhetünk meg az eredmények helyességéről.

b) Jelölje a termékek számát $\frac{a}{q}$, a, aq, ahol $0 < a$, $1 < q$, $a \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{Q}$.

$$\frac{\frac{a}{q} + a + aq}{3} = 14; \quad a\left(q + \frac{1}{q}\right) = 42 - a; \quad q + \frac{1}{q} = \frac{42}{a} - 1;$$

$$\left(q+\frac{1}{q}\right)^2=\frac{1764}{a^2}-\frac{84}{a}+1; \quad q^2+2+\frac{1}{q^2}=\frac{1764}{a^2}-\frac{84}{a}+1;$$

$$\text{innen} \quad q^2+\frac{1}{q^2}=\frac{1764}{a^2}-\frac{84}{a}-1.$$

$$\sqrt{\frac{\left(14-\frac{a}{q}\right)^2+(14-a)^2+(14-aq)^2}{3}}=2\sqrt{14};$$

$$\left(14-\frac{a}{q}\right)^2+(14-a)^2+(14-aq)^2=168;$$

$$196-\frac{28a}{q}+\frac{a^2}{q^2}+196-28a+a^2+196-28aq+a^2q^2=168;$$

$$a^2\left(q^2+\frac{1}{q^2}\right)-28a\left(q+\frac{1}{q}\right)+a^2-28a+420=0;$$

$$a^2\left(\frac{1764}{a^2}-\frac{84}{a}-1\right)-28a\left(\frac{42}{a}-1\right)+a^2-28a+420=0,$$

$$1764-84a-a^2-1176+28a+a^2-28a+420=0;$$

ebből $1008=84a$, vagyis $a=12$ adódik.

$$q+\frac{1}{q}=\frac{42}{12}-1; \quad q+\frac{1}{q}=\frac{5}{2}; \quad 2q^2-5q+2=0;$$

$$q_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4}=\frac{5\pm 3}{4} \;\Rightarrow\; q_1=2, \quad q_2=\frac{1}{2};$$

mivel $1<q$, ezért $q=2$.

A polcon az A jelűből 6, a B jelűből 12, a C jelűből 24 doboz volt.

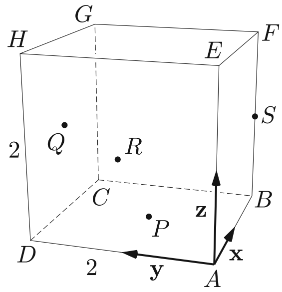
9. *A 2 egység élű $ABCDEFGH$ csúcsú kocka $ABCD$ alaplapjának középpontja P; $DCGH$ oldallapjának középpontja Q; $AEHD$ előlapjának középpontja R; a BF él felezőpontja S. (A-t E-vel, B-t F-fel, C-t G-vel, D-t H-val köti össze él.)*

a) Mekkora az A, P, Q, R, S csúcsú poliéder térfogata? (*8 pont*)

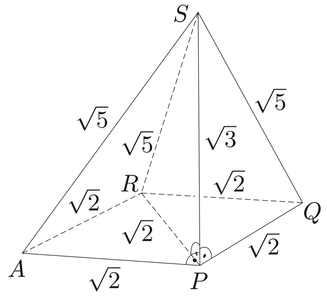
b) Mekkora a poliéderbe írt gömb sugara? (*8 pont*)

Megoldás. *a) I. megoldás.* A kocka AHC csúcsai egy $2\sqrt{2}$ oldalú szabályos háromszöget alkotnak, amelynek oldalfelező pontjai a P, Q, R pontok (*1. ábra*). Az A, P, Q, R pontok tehát egy síkban vannak, a PQR háromszög és az APR háromszög egy-egy $\sqrt{2}$ oldalú szabályos háromszög, ezek együtt adják az $APQR$ rombuszt; így $APQRS$ egy rombusz alapú gúla (*2. ábra*).

Az SQ, SA, SR szakaszok hossza $\sqrt{5}$, mert mindegyikük egy-egy 1 és 2 egység befogójú derékszögű háromszög átfogója. Az SP pedig $\sqrt{3}$ egység hosszú, mert egy egységkocka testátlója.



1. ábra



2. ábra

Az RPS háromszög derékszögű, mert $\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2$. Ugyanezért derékszögű az APS és a QPS háromszög is. (Idáig eljuthatunk másként is, lásd az I./a) részmegoldást.)

Az SP merőleges az $APQR$ síkra, mert merőleges a sík két egymást metsző egyenesére (a síkra merőleges egyenes tétele), így ez lesz a gúla magassága.

Egy $\sqrt{2}$ oldalú szabályos háromszög területe:

$$t = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

a poliéder térfogata tehát:

$$V = \frac{2t\sqrt{3}}{3} = \frac{2\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{3}}{3} = 1 \quad \text{(térfogategység)}.$$

I./a) részmegoldás. Helyezzük el a kockát egy $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ egységvektorok által meghatározott derékszögű koordinátarendszerben, itt $\overrightarrow{AP} = \mathbf{x}+\mathbf{y}$, $\overrightarrow{AR} = \mathbf{y}+\mathbf{z}$, $\overrightarrow{AQ} = \mathbf{x}+2\mathbf{y}+\mathbf{z}$,

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP} = \mathbf{x}+2\mathbf{y}+\mathbf{z} - (\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathbf{y}+\mathbf{z} = \overrightarrow{AR} \ \Rightarrow$$

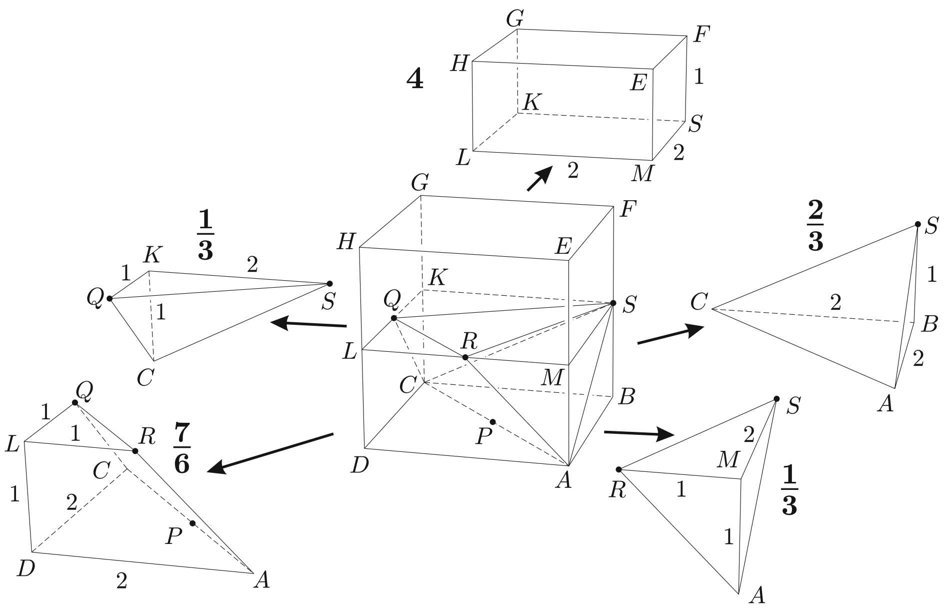
az $APQR$ négyszög paralelogramma, mert két szemközti oldala párhuzamos és egyenlő hosszú. Egy vektor hossza koordinátái négyzetösszegének négyzetgyökével egyenlő, így

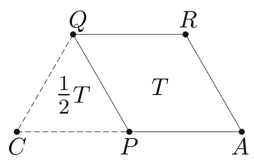
$$|\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{AR}| = |\overrightarrow{PR}| = |\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{RQ}| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2};$$

$$\overrightarrow{PS} = \mathbf{x}-\mathbf{y}+\mathbf{z}; \quad |\overrightarrow{PS}| = \sqrt{1^2+(-1)^2+1^2} = \sqrt{3};$$

$$|\overrightarrow{AS}| = |\overrightarrow{RS}| = |\overrightarrow{QS}| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}\,.$$

a) *II. megoldás.* Megkaphatjuk a poliéder térfogatát úgy is, hogy a kockából levágjuk a megfelelő darabokat az *ábra* szerint.

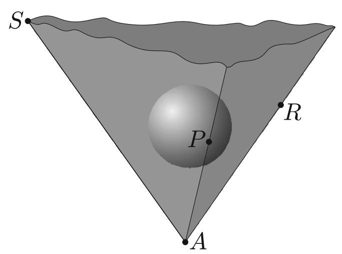




Az egyes darabok térfogatát a melléjük vastagon írt számok mutatják, ezek kiszámítása triviális. A maradék test térfogata a poliéder térfogatának $\frac{3}{2}$-szerese, mert alapjuk között is ez a viszony áll fenn. Felírhatjuk, hogy $4+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{7}{6}+\frac{3}{2}V=8$. Ebből $V=1$ adódik.

b) Be kell látni, hogy létezik beírt gömb.

Az nyilvánvaló, hogy a poliéder szimmetrikus az RPS síkra, ha van érintő gömb, akkor középpontjának ebben a síkban kell lennie. Vegyük az A pontból induló AP, AS, AR félegyenesek által meghatározott triédert. Síkjainak szögfelező síkjai egy A-ból induló, a triéder belsejében haladó félegyenest határoznak meg, mert síkok metszésvonala egyenes, másrészt az egyenlőség tranzitív, tehát, ha az O pont egyenlő távol van az ASP és ASR síkoktól, akkor az APR síktól is ugyanakkora távolságra van.



Ez a félegyenes döfi az RPS síkot, ez az O pont lesz tehát a beírt gömb középpontja. (Szemléletesen „indokolható” a beírt gömb léte úgy is, hogy egy „szögletes tölcsérbe” beleejthetünk egy pingpong labdát, amit aztán megfelelő méretűre „fújunk” fel.)

A beírt r sugarú gömb középpontját (O) kössük össze a poliéder csúcsaival, így azt az oldallapok alapú, O csúcsú gúlákra daraboltuk fel.

Az ARS háromszög olyan egyenlő szárú háromszög, amelynek AR alapja $\sqrt{2}$ hosszú, szárai $\sqrt{5}$ hosszúak, így az alapjához tartozó m magasságra felírhatjuk:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + m^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2, \quad \text{ahonnan} \quad m = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Az $APQR$ alapú, O csúcsú gúla térfogata $V_1 = \frac{\sqrt{3}r}{3}$; az APS alapú, O csúcsú gúla térfogata

$$V_2 = \frac{\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2}r}{3} = \frac{\sqrt{6}}{6}r$$

(ekkora a PQS alapú gúláé is); az ARS alapú, O csúcsú gúla térfogata

$$V_3 = \frac{\frac{\sqrt{2}\frac{3}{\sqrt{2}}}{2}r}{3} = \frac{1}{2}r$$

(egyenlő az RQS alapú gúláéval).

Mivel $V_1 + 2V_2 + 2V_3 = V$;

$$\frac{\sqrt{3}}{3}r + 2\frac{\sqrt{6}}{6}r + 2\frac{1}{2}r = 1; \quad r\left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{6}}{3} + 1\right) = 1.$$

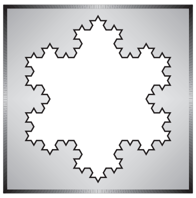
Ebből

$$r = \frac{3}{\sqrt{3} + \sqrt{6} + 3} = (\text{két lépésben gyöktelenítve a nevezőt}) =$$

$$= \frac{2\sqrt{3} - 3\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \approx 0{,}42.$$

(*Megjegyzés.* Minden olyan poliéderre, amelynek van minden lapját érintő beírt gömbje igaz, hogy $\frac{Ar}{3} = V$.)

Németh László
Fonyód



C gyakorlat megoldása

C. 1489. *Egy sakktábla bal alsó sarkában áll egy sötét futó, jobb alsó sarkában pedig egy világos futó. Mindkét futó a saját színén haladva egyesével lép felfelé haladva a táblán véletlenszerűen jobbra vagy balra, míg el nem érik a felső sort. Mennyi a valószínűsége, hogy a sötét futó a világos futótól jobbra érkezik a felső sorba?*