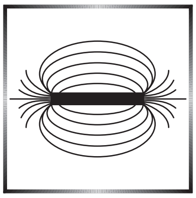
A második díjjal *Zimányi Gergely* adományából 50 ezer, a harmadik díjjal 30 ezer, a dicsérettel 20 ezer forint pénzjutalom járt, a díjazottak tanárai pedig a Typotex Kiadó könyveit kapták. A verseny megszervezését az Eötvös Loránd Fizikai Társulat a MOL támogatásából fedezte.

Tichy Géza, Vankó Péter, Vigh Máté



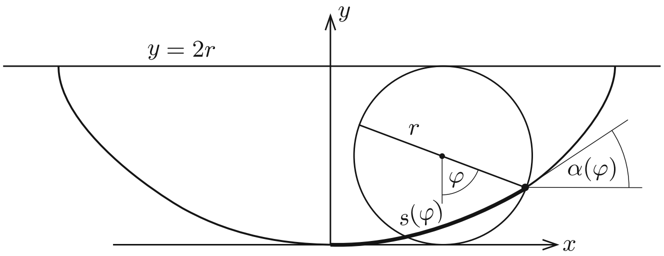
A Huygens-féle cikloisinga

Bevezetés

Köztudott, hogy az ℓ hosszúságú matematikai inga lengésideje nem független a lengés amplitúdójától, és a $T=2\pi\sqrt{\ell/g}$ kifejezés tulajdonképpen egy közelítés, ami annál pontosabb, minél kisebb az amplitúdó. Természetes módon vetődik fel a kérdés: hogyan lehet olyan ingát készíteni, amelynek az amplitúdótól függetlenül ez a lengésideje. Erre a kérdésre adott választ *Christiaan Huygens* (1629–1695) holland matematikus, fizikus, csillagász, és az alábbiakban az általa konstruált szerkezetet mutatjuk be. A kérdést két részre bontva tárgyaljuk. Mivel az egyszerű inga esetében a lengésidő amplitúdófüggése onnan ered, hogy az s kitérés és a hozzá tartozó $mg\sin(s/\ell)$ visszatérítő erő csak közelítőleg arányosak egymással, először azt vizsgáljuk meg, milyen alakú kényszerpályán kell egy testnek haladni ahhoz, hogy a gravitációs erő pálya menti komponense arányos legyen a pálya mentén mérhető úttal. Ezután megnézzük, hogyan érhető el, hogy a lengő súly éppen ilyen alakú pályán mozogjon.

A kényszerpálya alakja

A keresett kényszerpályát meghatározó összefüggés tehát (*1. ábra*)



1. ábra

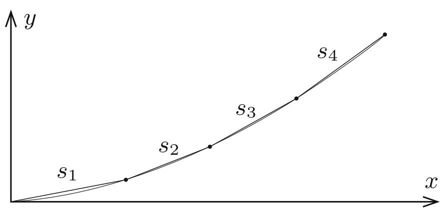
$$mg\sin\alpha(s)=Ds. \tag{1}$$

Ennek az egyenletnek a megoldása felsőbb matematikai ismereteket igényel, ezért itt azt az utat választjuk, hogy megadjuk a megoldást, és belátjuk, hogy valóban megfelel a fentieknek. A kényszerpálya egy *ciklois.* Ha egy kör egy egyenesen gördül, minden pontja ciklois pályán mozog. Az 1. ábrán látható koordináta-rendszerben az r sugarú kör az $y=2r$ egyenletű egyenesen gördül, és azt a cikloist választjuk, amelyik átmegy az origón. Ennek a paraméteres egyenlete

$$x_1(\varphi)=r(\varphi+\sin\varphi),$$
$$y_1(\varphi)=r(1-\cos\varphi).$$

(Ez egy periodikus görbe, de számunkra csak a $-\pi<\varphi<\pi$ szakasza érdekes.) Belátjuk, hogy erre a görbére az (1) egyenlet teljesül, ha a távolságot az ív mentén az origótól mérjük.

Elsőnek a cikloisív hosszát számoljuk ki. Tekintsük a görbe egy adott, φ-vel jellemzett pontját! A 0-tól φ-ig terjedő szögtartományt felosztjuk N részre úgy, hogy $\varphi_0=0$, $\varphi_N=\varphi$ és $\varphi_n-\varphi_{n-1}=\Delta_n$ legyen. A felosztás lehet egyenletes, de ez nem szükséges. Amint majd látni fogjuk, egyedül az a fontos, hogy minden Δ_n olyan kicsiny legyen, hogy a $\sin\Delta_n\approx\Delta_n$ közelítés alkalmazható legyen. Ezután vegyük a φ_n-ekhez tartozó (x_n,y_n) pontokat, és a görbeszakaszokat közelítsük a szomszédos pontok közötti húrokkal (*2. ábra*)! Ennek a sokszorosan megtört vonalnak a hossza annál jobban megközelíti a cikloisív hosszát, minél finomabb a felosztás. Ennek megfelelően



2. ábra

$$s(\varphi)\approx\sum s_n,$$

ahol

$$s_n=\sqrt{(x_n-x_{n-1})^2+(y_n-y_{n-1})^2}=$$
$$=r\sqrt{(\Delta_n+\sin\varphi_n-\sin\varphi_{n-1})^2+(\cos\varphi_{n-1}-\cos\varphi_n)^2}.$$

A szögfüggvények különbségének azonos átalakítása után, majd alkalmazva a

$$2\sin\frac{\Delta_n}{2}\approx\Delta_n$$

közelítést az

$$s_n=r\Delta_n\sqrt{2\left(1+\cos\frac{\varphi_n+\varphi_{n-1}}{2}\right)}$$

kifejezést kapjuk, ami a félszögekre vonatkozó azonosság és a

$$\Delta_n\approx 4\sin\frac{\Delta_n}{4}$$

közelítés, majd ismét a szögfüggvények különbségére vonatkozó addíciós tétel segítségével az

$$s_n=4r\left(\sin\frac{\varphi_n}{2}-\sin\frac{\varphi_{n-1}}{2}\right)$$

különbségre vezet. Ha ezeket összeadjuk, a közbülső tagok kiesnek, és az

$$s(\varphi) = 4r\left(\sin\frac{\varphi_N}{2} - \sin\frac{\varphi_0}{2}\right),$$

vagyis az

$$s(\varphi) = 4r\sin\frac{\varphi}{2} \tag{2}$$

eredmény adódik.

Megjegyzés. A fenti összefüggés nem azt jelenti, hogy a húrokból álló vonal hossza a felosztástól függetlenül megegyezik az ív hosszával, hanem azt, hogy a két hosszúság az alkalmazott közelítésekből következő pontossággal azonos. Márpedig minél finomabb a felosztás, a közelítések annál pontosabbak, így a fenti eredmény egzaktnak tekintendő. Ezért használjuk a $\approx$ jel helyett a határozott egyenlőséget.

Következő lépésként a φ-vel jellemzett ponthoz tartozó $\alpha(\varphi)$ szöget kell kiszámolnunk. Ehhez tekintsük a φ_N és a φ_{N-1} pontokat összekötő húr vízszintessel bezárt α_N szögét! Nyilván, minél kisebb Δ_N, az α_N szög annál jobban megközelíti $\alpha(\varphi)$-t. Másrészt

$$\operatorname{tg}\alpha_N = \frac{y_N - y_{N-1}}{x_N - x_{N-1}},$$

ami behelyettesítés után a már ismert közelítéssel és átalakításokkal a

$$\operatorname{tg}\alpha_N = \operatorname{tg}\left(\frac{\varphi_N + \varphi_{N-1}}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\varphi_N}{2} - \frac{\Delta_N}{4}\right)$$

alakra hozható, amiből egyértelmű, hogy a felosztás finomításával α_N egyre pontosabban megközelíti $\varphi_N/2$-t. Így tehát írhatjuk, hogy

$$\alpha(\varphi) = \frac{\varphi}{2}. \tag{3}$$

A (2) és (3) eredményeket az (1) egyenletbe behelyettesítve a „rugóállandóra" a

$$D = \frac{mg}{4r}$$

értéket kapjuk, tehát (ellentétben a matematikai inga esetével) a cikloispályán a kitérés és a visszatérítő erő aránya *a kitéréstől független állandó.* Innen a

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{4r}{g}}$$

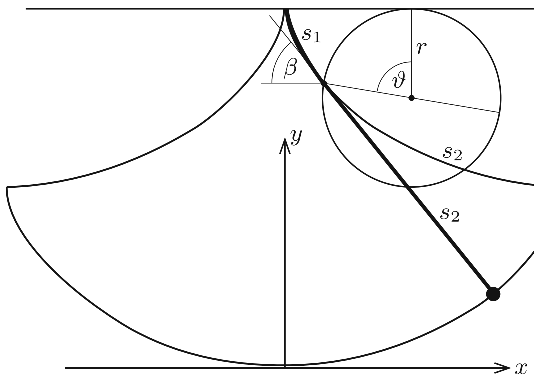
képlet alapján az következik, hogy a kérdéses cikloispályán az origó ($\varphi = 0$) körül súrlódás nélkül ide-oda mozgó test rezgésideje egy $\ell = 4r$ hosszúságú matematikai inga (kis kitérésekhez tartozó) lengésidejének felel meg, de a cikloisinga esetében a periódusidő a lengés amplitúdójától *független.*

Megjegyzés. A periódusidő amplitúdófüggetlensége persze nem minden határon túl értendő, hiszen a visszatérítő erőt a gravitáció adja, ennek a természetes felső határa pedig a teljes súly. A kapott (a D rugóállandónak megfelelő) arányossági tényező mellett a legnagyobb visszatérítő erő éppen az $s = 4r$ „kitéréshez" tartozik. Ebben a pontban a ciklois érintője függőlegessé válik, de mivel a ciklois fölfelé nem folytatódik, nagyobb kitérésről nincs értelme beszélnünk.

A cikloispálya létrehozása

Ha azt akarjuk, hogy egy matematikai inga nehezéke ne körpályán, hanem valami más pályán mozogjon, a lengést megfelelően kialakított akadályok közé kell szorítani (*3. ábra*). Belátható, hogy ha az elérendő pálya ciklois, akkor – furcsa módon – az alkalmazandó akadályprofilok ugyancsak r paraméterű cikloisívek, amelyek az elvárt pályához képest fölfelé $2r$ távolsággal, oldalra pedig fél periódussal el vannak tolva. Esetünkben ezek egyenlete

$$x_2(\vartheta) = r(\vartheta - \sin\vartheta),$$
$$y_2(\vartheta) = r(3 + \cos\vartheta), \quad (-\pi < \vartheta < \pi).$$



3. ábra

Azt, hogy ezek a profilok a $(0, 4r)$ pontban felfüggesztett, $4r$ hosszúságú inga esetében valóban az (x_1, y_1) pályát szolgáltatják, a következőképpen láthatjuk be. Feküdjön fel az inga fonala a ϑ-val jellemzett pontig! Ez a cikloisívet egy s_1 és egy s_2 hosszúságú darabra osztja. Mivel ezek összege $4r$, az inga szabadon lévő, a cikloistól az érintő irányában elálló, a vízszintessel β szöget bezáró részének hossza is s_2. A (2) és (3) egyenletek segítségével:

$$\sin\beta = \frac{s_2}{4r} = \sin\left(\frac{\pi - \vartheta}{2}\right).$$

A lengő súly koordinátái az előző egyenlet és addíciós tételek felhasználásával:

$$x(\vartheta) = x_2(\vartheta) + s_2 \cos\beta = r(\vartheta + \sin\vartheta),$$
$$y(\vartheta) = y_2(\vartheta) - s_2 \sin\beta = r(1 - \cos\vartheta),$$

ami valóban a szükséges pálya.

Vajon miért nem találkozunk ilyen ingaórákkal, miért nem ilyennek építették a nagy pontosságú órákat? A válasz egyszerű: az ingaóra pontossága azt jelenti, hogy az ismétlődő lengések ideje a kívánalmaknak megfelelően azonos, márpedig ez biztosított, ha a lengések amplitúdója mindig ugyanakkora. Ezt megoldja az energiaveszteség megfelelő pótlása, nem szükséges tehát, hogy bármilyen amplitúdó mellett ugyanaz legyen a lengésidő.

A Huygens-féle cikloisinga gyakorlati szempontból nem hozott áttörést az igen pontos ingaórákért folyó versenyfutásban, de elméleti érdekessége és matematikai szépsége több, mint három évszázad múltán is kiérdemli csodálatunkat.

Woynarovich Ferenc

Fizika feladatok megoldása

P. 5079. *Középen átfúrt, azonos tömegű gyurmagolyók csúszhatnak egy hosszú, egyenes rúdon. Ha a rudat enyhén lejtősre állítjuk, a golyók maguktól még nem indulnak el, viszont ha elindítjuk őket, gyorsulva csúsznak lefelé. Finoman elindítva a legfelső golyót, ez eléri az alatta levőt. Ekkor összetapadnak, és együtt csúsznak tovább. Nekiütköznek a következő golyónak, ezzel is összetapadva csúsznak tovább, és így tovább. Azt tapasztaljuk, hogy mindegyik ütközés mindig ugyanakkora sebességnél következik be. Mekkora volt kezdetben az n-edik és az $(n+1)$-edik golyó közötti L_n távolság, ha az első két golyó távolsága L_1 volt?*

(*5 pont*) Közli: *Fajszi Bulcsú,* Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn.

Megoldás. Legyen v a mozgó gyurmagolyók sebessége közvetlenül az ütközések előtt, v_n az n-edik golyó sebessége, amikor elindul, m a golyók tömege, a pedig a golyók gyorsulása. Az ütközések tökéletesen rugalmatlanok, így

$$v_n = \frac{(n-1)mv + 0}{nm} = \frac{n-1}{n}v.$$

Az első golyó gyakorlatilag nulla sebességről gyorsul v sebességre t_1 idő alatt, így a megtett útja

$$L_1 = \frac{0+v}{2}t_1 = \frac{v}{2} \cdot \frac{v-0}{a} = \frac{v^2}{2a}.$$