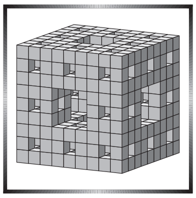


A B pontversenyben kitűzött feladatok (5014–5021.)

B. 5014. A Bergengóc Parlamentben a választások után $50 < n < 100$ képviselő van, mindannyian egyetlen párt, a Kék Párt színeiben. (A Kék Pártnak egyetlen elnöke van.) A házszabály alapján egy parlamenti párt két pártra osztható a következő feltételek szerint:

- A megszűnő párt elnöke nem lehet tagja az utódpártoknak, parlamenti mandátuma megszűnik, és nem választanak helyette új képviselőt (azaz a parlamenti képviselők száma csökken).
- A többi párttag eldöntheti, hogy melyik utódpártnak lesz a tagja.
- Mindkét utódpártnak legalább egy-egy képviselő tagja kell, hogy legyen.
- Mindkét utódpártnak a párt képviselői közül egy-egy pártelnököt kell választania.

Ha legalább egy pártszakadás után minden utódpártnak ugyanannyi tagja van, akkor a parlamentet feloszlatják. Mi legyen az n értéke, hogy ez az eset ne fordulhasson elő?

(*3 pont*)

B. 5015. Három egységsugarú kör átmegy egy közös ponton. Második metszéspontjaik A, B és C. Mekkora az ABC kör sugara?

(*3 pont*) Javasolta: *Szoldatics József* (Budapest)

B. 5016. Adott egy $ABCD$ konvex négyszög. Úgy jelöljük ki az AD oldal E_1, a BC oldal F_1, az AC átló E_2 és a BD átló F_2 pontját, hogy

$$AE_1 : E_1D = BF_1 : F_1C = AE_2 : E_2C = BF_2 : F_2D = AB : CD.$$

Tudjuk, hogy semelyik két pont nem esik egybe. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az E_1F_1 és E_2F_2 egyenesek merőlegesek egymásra.

(*4 pont*)

B. 5017. Van-e olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, amely teljesíti a következő tulajdonságokat?

(1) $x_1 \neq x_2$ esetén $f(x_1) \neq f(x_2)$ teljesül,

(2) léteznek olyan $a, b > 0$ konstansok, melyekre bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x^2) - \big(f(ax+b)\big)^2 \geqslant \frac{1}{4}.$$

(*4 pont*)

B. 5018. A szultán birodalmának mind az 1024 matematikusát börtönbe záratta. Mindegyikük csak a saját réztalléros érméjét tarthatta meg. A matematikusok tudják, hányan vannak, de semmiféle módon nem képesek kommunikálni egymással.

A szultán a születésnapján nagy kegyesen a következő játékot ajánlotta a matematikusoknak: az udvaron egyenként vagy 0-t, vagy 1-et mondanak. Ha a mondott számok összege 1, akkor szabadon bocsátja őket.

(A matematikusok nem adhatnak jelet egymásnak, nem tudják, hogy őket hányadiknak vitték ki, vagy hogy az előttük az udvaron lévők mit csináltak.)

Mekkora eséllyel szabadulhatnak ki a matematikusok?

(*5 pont*)

B. 5019. Az $ABCD$ húrnégyszögben $AB+BC=AD+DC$ és $BA+AC=BD+DC$ teljesül. Mutassuk meg, hogy $ABCD$ téglalap.

(*6 pont*)

B. 5020. Tükrözzünk egy parabolát a fókuszán átmenő, tengelyével α szöget bezáró egyenesre. Mutassuk meg, hogy a parabola és tükörképe α szögben metszi egymást.

(*5 pont*) Javasolta: *Németh László* (Fonyód)

B. 5021. Legyen a 3-mal nem osztható n pozitív egész szám 3-mal osztva 1 maradékot adó pozitív osztóinak összege $A(n)$, illetve 3-mal osztva 2 maradékot adó pozitív osztóinak összege $B(n)$. Határozzuk meg azokat az n számokat, melyekre $\left|A(n)-B(n)\right|<\sqrt{n}$.

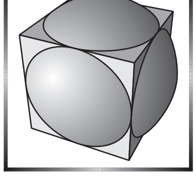
(*6 pont*)

❄

Beküldési határidő: 2019. április 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (746–748.)



A. 746. Legyen p prímszám. Hány megoldása van az $x^2+y^2+z^2+1\equiv 0 \pmod p$ kongruenciának a modulo p maradékosztályok körében?

Javasolta: *Gyenes Zoltán* (Budapest)