$p \backslash q$	2	3	5	7	11	13	17
2	4	7	21	71	1035	4109	**65 553**
3		18	106	778	**59 170**		
5			1250	**18 026**			

Ezekben az esetekben N és M lehetséges értékei (figyelembe véve, hogy felcserélhetőek).

p	q	N	M
2	17	65 536	17
17	2	17	65 536
3	11	59 049	121
11	3	121	59 049
5	7	15 625	2401
7	5	2401	15 625

Varga Ákos (Kecskemét, Bányai Júlia Gimn., 11. évf.)

Megjegyzés. A javítás során sajnos viszonylag kevés maximális értékű megoldás született. Sokan figyelmetlenségből nem a feladat kérdésére válaszoltak, hanem csak a prímeket adták meg, az N és M számokat nem. Szintén sokan voltak, akik hat helyett csak három megoldást adtak meg, és nem vették észre, hogy N és M felcserélhető. Sokan voltak azok is, akik nem indokoltak kellően részletesen, és emiatt vesztettek pontot (általában vagy N és M p-vel és q-val felírását nem vezették le, vagy a prímek kiválasztásánál csak felírták a jókat, megmutatták, hogy azok tényleg jók, de nem indokolták, hogy más megoldások nem lehetnek). Aki egyáltalán nem indokolt, csak végeredményt közölt, az 0 pontot kapott, mivel a versenykiírás szerint pusztán az eredményközlésre nem adható pont. Emellett persze voltak szép megoldások is.

50 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 15 versenyző: Ajtai Boglárka, Debreczeni Tibor, Hordós Adél Zita, Jankovits András, Kis Károly, Mészáros Márton, Molnár István, Nyitrai Boglárka, Pipis Panna, Rozgonyi Gergely, Sal Dávid, Sebe Anna, Székelyhidi Klára, Tóth Benedek, Varga Ákos. 4 pontos 9, 3 pontos 13, 2 pontos 1, 1 pontos 4, 0 pontos 5 dolgozat.

Matematika feladatok megoldása

B. 4947. *Igazoljuk, hogy egy kockát a keletkező darabok egybevágóságától eltekintve egyféleképpen lehet pontosan öt darab tetraéderre darabolni.*

(*6 pont*)

Megoldás. Legyen a kocka $ABCDA'B'C'D'$, aminek $ABCD$ és $A'B'C'D'$ két párhuzamos lapja, továbbá az általánosság megszorítása nélkül tegyük fel, hogy térfogata egységnyi. Tegyük fel továbbá, hogy a kockát a Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 és Δ_5 tetraéderekre daraboltuk. Az $ABCD$ és $A'B'C'D'$ négyzetlapokat a tetraéderek háromszöglapjai lefedik, emiatt mindkettőre legalább két-két lap illeszkedik, továbbá mivel $ABCD$ és $A'B'C'D'$ párhuzamosak, így bármely tetraédernek legfeljebb az egyikre illeszkedhet lapja. Következésképpen két eset lehetséges: az $ABCD$ és $A'B'C'D'$ egyikét pontosan kettő, másikát pontosan három háromszöglap fedi, vagy mindkettőt pontosan kettő háromszöglap fedi.

Tegyük fel, hogy Δ_1 és Δ_2 egy-egy lapja együttesen lefedi $ABCD$-t. Nevezzük ezeket az $ABCD$-re illeszkedő lapokat rendre L_1-nek és L_2-nek, az ezekhez tartozó magasságokat pedig rendre m_1-nek és m_2-nek. Világos, hogy L_1 és L_2 területeinek összegére $T(L_1)+T(L_2)=1$, valamint $m_1 \leqslant 1$ és $m_2 \leqslant 1$ teljesül. Ebből megbecsülhetjük térfogataik összegét:

$$V(\Delta_1)+V(\Delta_2)=\frac{T(L_1)m_1+T(L_2)m_2}{3} \leqslant \frac{T(L_1)+T(L_2)}{3}=\frac{1}{3}.$$

Teljesen hasonlóan megmutatható, hogy ha három tetraéder lapjai fedik $ABCD$-t, akkor a három tetraéder térfogatának összege szintén legfeljebb $\frac{1}{3}$, és ugyanezen megállapítások érvényesek az $A'B'C'D'$ lapra is.

Ezen térfogatbecslések alapján nem fordulhat elő az az eset, amikor az $ABCD$ és $A'B'C'D'$ egyikét pontosan kettő, másikát pontosan három háromszöglap fedi, hiszen ekkor az öt tetraéder térfogatának összege legfeljebb $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}<1$ lenne. Vagyis (esetleges átindexelés után) feltehetjük, hogy Δ_1 és Δ_2 lapjai együttesen lefedik $ABCD$-t, és Δ_3 és Δ_4 lapjai együttesen lefedik $A'B'C'D'$-t. Ismét a térfogatbecslések miatt

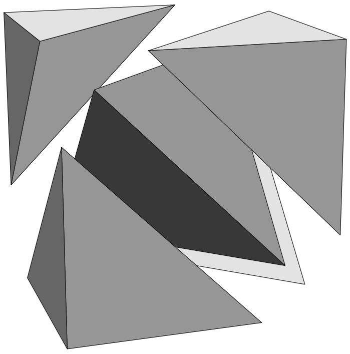
$$V(\Delta_1)+V(\Delta_2) \leqslant \frac{1}{3} \quad \text{és} \quad V(\Delta_3)+V(\Delta_4) \leqslant \frac{1}{3},$$

így viszont $V(\Delta_5) \geqslant \frac{1}{3}$.

Világos, hogy $ABCD$ és $A'B'C'D'$ helyett bármely párhuzamos lappárra működik az érvelésünk, azaz bármely négyzetlapját a kockának pontosan két tetraéder egy-egy háromszöglapja fedi. Továbbá ha feltesszük, hogy valamely lap fedésében Δ_5 is részt vesz, mondjuk Δ_i párjaként, akkor a térfogatbecslés miatt $V(\Delta_5)+V(\Delta_i) \leqslant \frac{1}{3}$, ami ellentmond $V(\Delta_5) \geqslant \frac{1}{3}$ következtetésünknek. Kaptuk tehát, hogy Δ_5-nek nincs közös lapsíkja a kockával, a Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 tetraéderek mindegyikének pedig pontosan három (mindenhárom párhuzamos lappárból egy-egy).

Vizsgáljuk most Δ_1-et. Egy négyzetet pontosan két háromszögre csak egy átlójával vághatunk, ebből következően Δ_1-nek a kocka lapjaira illeszkedő három lapja egy-egy egységnyi befogójú egyenlőszárú derékszögű háromszög. Mivel ezeknek a lapoknak páronként van egy-egy közös élük, így Δ_1 szükségképpen egy „saroktetraéder”, azaz egy olyan tetraéder, amelynek négy csúcsa a kocka egy csúcsából kiinduló három élének négy végpontja. Ugyanezen érvelés helyes Δ_2, Δ_3 és Δ_4 esetén is.

Végül világos, hogy Δ_5-nek Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 mindegyikével egy-egy $\sqrt{2}$ oldalhosszúságú szabályos háromszög a közös lapja, vagyis Δ_5 egy $\sqrt{2}$ élhosszúságú szabályos tetraéder.



Jól ismert és az *ábra* alapján könnyen látható, hogy egy kocka valóban felbontható 5 tetraéderre. Ezzel az állítást beláttuk.

29 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott 13 versenyző: Beke Csongor, Dobák Dániel, Fitos Bence, Füredi Erik Benjámin, Gáspár Attila, Hegedűs Dániel, Kerekes Anna, Nagy Nándor, Schrettner Jakab, Shuborno Das, Szabó Dávid, Weisz Máté, Zsigri Bálint. 5 pontos 7, 4 pontos 4, 3 pontos 1, 2 pontos 3, 1 pontos 1 dolgozat.

B. 4963. *Egy háromszög hozzáírt körei legnagyobbikának sugara legyen r_a, a köré írt kör sugara pedig R. Igazoljuk, hogy $r_a \geqslant \frac{3}{2}R$.*

(*5 pont*) *Erdős Pál* (1913–1996) feladata

I. megoldás. A legnagyobb sugarú hozzáírt kör a leghosszabb oldalhoz tartozik. Feltehetjük, hogy $a \geqslant b \geqslant c$. A háromszögre vonatkozó ismert összefüggések (s a háromszög félkerülete):

$$r_a = \frac{T}{s-a} = \frac{2T}{b+c-a}, \qquad R = \frac{abc}{4T}.$$

A bizonyítandó egyenlőtlenség ezek alapján:

$$\frac{2T}{b+c-a} \geqslant \frac{3abc}{8T}.$$

Átszorzás után a $16T^2$ helyére a Heron-képlet alapján beírhatjuk, hogy

$$(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c).$$

A háromszög-egyenlőtlenség szerint $b+c>a$, azaz $b+c-a$ pozitív, így egyszerűsíthetünk vele. Így a bizonyítandó állítás:

$$(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c) \geqslant 3abc.$$

(Itt is látható, hogy ez az állítás szimmetrikus a b és c változókra, tehát $b \geqslant c$ valóban feltehető.)

Most helyettesítsük az oldalakat a bizonyítandó egyenlőtlenségben a beírt kör által levágott érintőszakaszokkal, vagyis legyen $s-a=x, s-b=y$ és $s-c=z$. A háromszög-egyenlőtlenség miatt ezek mind pozitívak. Feltettük, hogy $a \geqslant b \geqslant c$, ennek megfelelően $z \geqslant y \geqslant x$ is igaz. A helyettesítés után:

$$2(x+y+z)\cdot 2y \cdot 2z \geqslant 3(x+y)(y+z)(z+x).$$

A zárójelek fölbontása és a kifejezések összevonása után:

$$2xyz + 5y^2z + 5yz^2 \geqslant 3x^2y + 3xy^2 + 3z^2x + 3zx^2.$$

Felírhatunk több egyenlőtlenséget, amelyek a $z \geqslant y \geqslant x$ feltételből azonnal következnek:

$$2xyz \geqslant 2xy^2,$$

$$3yz^2 \geqslant 3xz^2,$$

$$3y^2z \geqslant 3x^2z,$$

$$y^2z \geqslant xy^2,$$

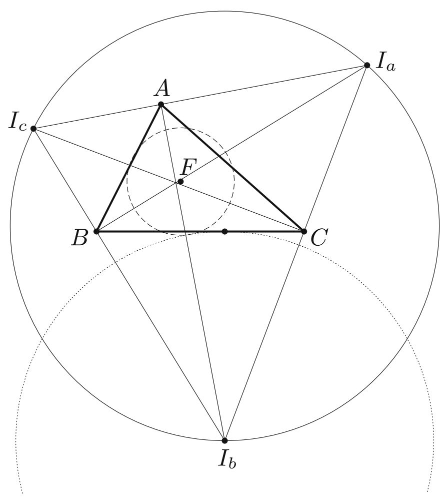
$$y^2z \geqslant x^2y,$$

$$2yz^2 \geqslant 2x^2y.$$

Ezeket összeadva éppen a bizonyítandó állítást kapjuk, és mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért az eredeti is igaz. Egyenlőség csakis úgy teljesülhet, ha $x = y = z$, vagyis a háromszög szabályos.

Tubak Dániel (Szegedi Radnóti Miklós Kís. Gimn., 10. évf.)
dolgozata alapján

II. megoldás. Jelölje szokásosan a, b, c az oldalakat, s a félkerületet, R a köréírt kör sugarát, továbbá r_a, r_b, r_c a kozzáírt körök sugarait, F a Feuerbach-kör középpontját, O a köréírt kör középpontját, I_a, I_b, I_c pedig a hozzáírt körök középpontjait.



$FI_a = \frac{R}{2} + r_a$, hiszen a Feuerbach-kör sugara $\frac{R}{2}$, továbbá a Feuerbach-kör érinti a hozzáírt köröket. Ezért hasonlóan $FI_b = \frac{R}{2} + r_b, FI_c = \frac{R}{2} + r_c$.

Rövid számolással belátható, hogy a hozzáírt körök középpontjaiból álló háromszög szögei $\frac{\alpha+\beta}{2}$, $\frac{\beta+\gamma}{2}$, $\frac{\gamma+\alpha}{2}$ (ahol α, β, γ a háromszög szögei), így ez a háromszög hegyesszögű. A hozzááírt körök középpontjaiból rajzolt háromszög magasságainak talppontjai A, B, C, így e háromszög Feuerbach-köre éppen az ABC háromszög köréírt köre, melynek sugara R – vagyis az $I_aI_bI_c$ háromszög köréírt körének sugara $2R$. Legyen ennek a körnek a középpontja G. A G az $I_aI_bI_c$ háromszögön belül van, hiszen ez a háromszög hegyesszögű. A síkon ez az egyetlen pont, amely az I_a, I_b, I_c pontok mindegyikétől legfeljebb $2R$ távolságra van, ugyanis ha vennénk az I_a, I_b és I_c középpontú $2R$ sugarú köröket, akkor azoknak még további közös pontja is lenne, de mivel a körvonalaik G-ben közösen metszik egymást és a köréírt kör középpontja egyértelmű (nincs a körvonalaknak még egy közös metszéspontja), ezért G az egyetlen ilyen pont.

Így van olyan körközéppont, mondjuk I_a úgy, hogy $FI_a > 2R$, azaz

$$\frac{R}{2} + r_a \geqslant 2R \quad \Leftrightarrow \quad r_a \geqslant \frac{3}{2}R.$$

Egyenlőség pontosan akkor van, ha F és G egybeesik. Az I_a, I_b és I_c középpontú hozzáírt körök sugarai általában különbözőek. A G pont az $I_aI_bI_c$ háromszög körülírt körének középpontja, az eredeti F középpontú Feuerbach-kör pedig mindhárom hozzáírt kört kívülről érinti. Az F és G pontok tehát akkor eshetnek egybe, ha az F pont is egyenlő távolságra van mindegyik hozzáírt kör középpontjától, tehát a három kör sugara egyenlő, vagyis az eredeti háromszög szabályos.

Kerekes Anna (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.) dolgozata alapján

Összesen 40 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 21, 4 pontot 8 versenyző. 3 pontos 5, 2 pontos 2, 1 pontos 4 tanuló dolgozata.

B. 4964. *Igaz-e, hogy ha az $f, g: \mathbb{R} \to [0,1]$ függvények periodikusak, és az $f+g$ függvény is periodikus, akkor van közös periódusuk?*

(*6 pont*)

Megoldás. Nem igaz az állítás.

Fel fogjuk használni azt a könnyen belátható állítást, miszerint ha egy x valós szám felírható $q_1 + q_2\sqrt{2}$, vagy $q_1\sqrt{2} + q_2\sqrt{3}$, vagy $q_1\sqrt{3} + q_2$ alakban, ahol $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ ($\mathbb{Q}$ a racionális számok halmazát jelöli), akkor ez a felírás egyértelmű. Például, ha $q_1\sqrt{2} + q_2\sqrt{3} = r_1\sqrt{2} + r_2\sqrt{3}$ (ahol $q_i, r_j \in \mathbb{Q}$), akkor $(q_1 - r_1)\sqrt{2} = (r_2 - q_2)\sqrt{3}$. Itt $q_1 - r_1$ pontosan akkor nulla, ha $r_2 - q_2$ az. Ha $r_2 - q_2 \neq 0$, akkor $\frac{q_1 - r_1}{r_2 - q_2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$, ami ellentmondás.

A valós számok tetszőleges H részhalmazára jelölje $C(H)$ a következő függvényt:

$$C(H)(x) = \begin{cases} \frac{1}{7}, & \text{ha } \ x \in H; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Az α valós számra legyen

$$H\alpha = \{h\alpha \mid h \in H\},$$

továbbá a H_1 és H_2 halmazok összegét jelölje

$$H_1 + H_2 = \big\{h_1 + h_2 \mid h_j \in H_j \ (j = 1, 2)\big\}.$$

Legyen ezután

$$f = C\big(\mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt{2}\,\big) + C\big(\mathbb{Q}\sqrt{2} + \mathbb{Q}\sqrt{3}\,\big)$$

és

$$g = 3C\big(\mathbb{Q}\sqrt{3} + \mathbb{Q}\big) - C\big(\mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt{2}\,\big) + \frac{2}{7}.$$

Ekkor

$$h = f + g = C\big(\mathbb{Q}\sqrt{2} + \mathbb{Q}\sqrt{3}\,\big) + 3C\big(\mathbb{Q}\sqrt{3} + \mathbb{Q}\big) + \frac{2}{7}.$$

Könnyen látható, hogy minden $q\sqrt{2}$ ($q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$) periódusa f-nek. Továbbá f pontosan a $\mathbb{Q}\sqrt{2}$ halmaz elemeinél (a két halmaz metszetén) vesz fel $\frac{2}{7}$ függvényértéket, azaz minden p periódusra és $q \in \mathbb{Q}$ számra mivel $f\big(q\sqrt{2} + p\big) = f\big(q\sqrt{2}\,\big) = \frac{2}{7}$, így $q\sqrt{2} + p$-nek szintén $q'\sqrt{2}$ ($q' \in \mathbb{Q}$) alakúnak kell lennie, azaz szükségszerűen p is ilyen alakú. Vagyis f periódusainak halmaza $\mathbb{Q}\sqrt{2} \setminus \{0\}$.

Hasonlóan látható g-nél – a $\frac{4}{7}$ függvényérték vizsgálatából –, hogy g periódusainak halmaza $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$, h-nál pedig a $\frac{6}{7}$ függvényértékéből, hogy h periódusainak halmaza $\mathbb{Q}\sqrt{3} \setminus \{0\}$.

Tehát f, g és h periodikus, ám f-nek és g-nek nincsen közös periódusa.

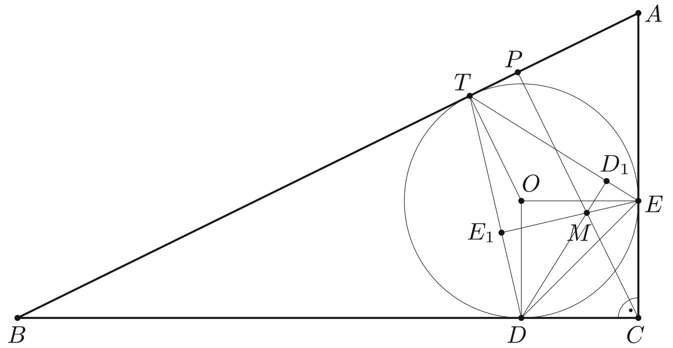
Pituk Gábor (Veszprém, Lovassy László Gimn., 11. évf.)

23 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott 9 versenyző: Dobák Dániel, Döbröntei Dávid Bence, Gáspár Attila, Kerekes Anna, Nagy Nándor, Pituk Gábor, Schifferer András, Schrettner Jakab, Weisz Máté. 5 pontos 1, 4 pontos 2, 1 pontos 4, 0 pontos 5 dolgozat. Nem versenyszerű: 2 dolgozat.

B. 4977. *Bizonyítsuk be, hogy egy derékszögű háromszög beírt körének érintési pontjai által meghatározott háromszög magasságpontja a derékszögű háromszög átfogójához tartozó magasságvonalára illeszkedik.*

(*4 pont*) (*Kvant*)

I. megoldás. Legyen a háromszög három csúcsa A, B és C, melyek közül C a derékszögű csúcs, és jelölje a B-nél lévő szöget β, az A-nál lévő szög ekkor $\alpha = 90° - \beta$. Legyenek beírt kör érintési pontjai az AB, AC, BC oldalakon T, E, D, a TDE háromszög magasságpontja M, és a beírt kör középpontja O. Ekkor $OECD$ egy négyzet. Legyen E_1 és D_1 az ETD háromszög E-ből, illetve D-ből induló magasságának talppontja.



1. ábra

Végül legyen P az ABC háromszög C-hez tartozó magasságtalppontja, M_D a PC és DM egyenes metszéspontja, M_E pedig a PC és EM egyenes metszéspontja.

Végezzünk szögszámítást.

$$EDM\sphericalangle = EDD_1\sphericalangle = 90^\circ - D_1ED\sphericalangle = 90^\circ - TED\sphericalangle.$$

A középponti és kerületi szögek tételéből

$$EDM\sphericalangle = 90^\circ - \frac{TOD\sphericalangle}{2}.$$

Mivel $ODB\sphericalangle = OTB\sphericalangle = 90^\circ$, ezért $OTBD$ húrnégyszög, így

$$EDM_D\sphericalangle = EDM\sphericalangle = 90^\circ - \frac{180^\circ - \beta}{2} = \frac{\beta}{2}.$$

Hasonló módon

$$DEM\sphericalangle = DEE_1\sphericalangle = 90^\circ - EDE_1\sphericalangle = 90^\circ - EDT\sphericalangle = 90^\circ - \frac{EOT\sphericalangle}{2},$$

$OEA\sphericalangle = OTA\sphericalangle = 90^\circ$, $OTAE$ húrnégyszög, és

$$DEM_E\sphericalangle = DEM\sphericalangle = 90^\circ - \frac{180^\circ - (90^\circ - \beta)}{2} = 45^\circ - \frac{\beta}{2}.$$

Ismert továbbá, hogy $ACP\sphericalangle = \beta$, $PCB\sphericalangle = 90^\circ - \beta$, és $CAP\sphericalangle = 90^\circ - \beta$. Ezekből következik, hogy $ECM_E\sphericalangle = \beta$ és $DCM_D\sphericalangle = 90^\circ - \beta$.

Mivel $OECD$ négyzet, így $CED\sphericalangle = CDE\sphericalangle = 45^\circ$, vagyis

$$CEM_E\sphericalangle = CED\sphericalangle + DEM_E\sphericalangle = 90^\circ - \frac{\beta}{2}, \quad \text{és}$$

$$CDM_D\sphericalangle = CDE\sphericalangle + EDM_D\sphericalangle = 45^\circ + \frac{\beta}{2}.$$

Mivel $ECM_E\sphericalangle = ACP\sphericalangle = \beta$ és $CEM_E\sphericalangle = 90^\circ - \beta/2$, ezért

$$EM_EC\sphericalangle = 180^\circ - \beta - \left(90^\circ - \frac{\beta}{2}\right) = 90^\circ - \frac{\beta}{2},$$

vagyis az ECM_E háromszög egyenlő szárú, $EC = CM_E$.

Mivel $DCM_D\sphericalangle = PCB\sphericalangle = 90^\circ - \beta$ és $CDM_D\sphericalangle = 45^\circ + \beta/2$, ezért

$$DM_DC\sphericalangle = 180^\circ - (90^\circ - \beta) - \left(45^\circ + \frac{\beta}{2}\right) = 45^\circ + \frac{\beta}{2},$$

vagyis DCM_D háromszög egyenlő szárú, $DC = CM_D$.

Mivel $OECD$ négyzet, így $EC = DC$, vagyis $CM_E = CM_D$, tehát $M_E \equiv$ $\equiv M_D \equiv M$, tehát M rajta van a derékszögű csúcshoz tartozó magasságvonalon.

Az egyetlen kritikus pont a bizonyításban annak feltételezése, hogy a TED háromszög hegyesszögű (ebből következik, hogy M a háromszög belsejében van és az ábrán megfelelően állnak a szögek). A fentiek alapján

$$TED\sphericalangle = \frac{TOD\sphericalangle}{2} = \frac{180^\circ - \beta}{2} = 90^\circ - \frac{\beta}{2}.$$

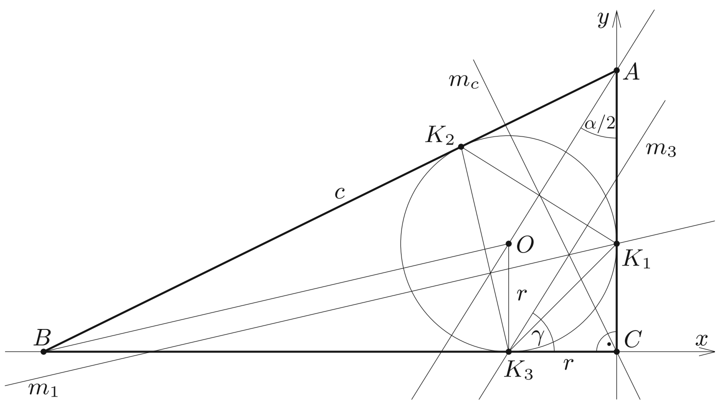
Mivel β 0° és 90° közt van, így ez hegyesszög.

$$EDT\sphericalangle = \frac{EOT\sphericalangle}{2} = \frac{180^\circ - (90^\circ - \beta)}{2} = 45^\circ + \frac{\beta}{2}.$$

Mivel β 0° és 90° közt van, így ez hegyesszög. $ETD\sphericalangle = 180^\circ - TED\sphericalangle - EDT\sphericalangle =$ $= 45^\circ$. Ezek alapján a TED háromszög valóban hegyesszögű.

Zsigri Bálint (Budapest XIV. Ker. Szent István Gimn., 12. évf.)

II. megoldás. Helyezzük el a háromszöget a derékszögű koordinátarendszerben a *2. ábrán* látható módon. A derékszögű háromszög beírt körének érintési pontjait jelölje K_1, K_2 és K_3. A K_1-hez és K_3-hoz tartozó magasságvonalak legyenek m_1 és m_3, a c oldalhoz tartozó pedig m_c. Felírva ezen magasságvonalak egyenleteit könnyen ellenőrizhetjük, hogy valóban egy pontban metszik-e egymást. Legyen $BAC\sphericalangle = \alpha$, $ABC\sphericalangle = \beta$ és jelölje γ az ábrán berajzolt szöget.



2. ábra

Mivel m_3 és az AO szögfelező is merőleges K_1K_2-re, ezért párhuzamosak egymással. Az OK_3CK_1 négyszög egy r oldalú négyzet, ezért m_3 a $-r$ koordinátánál metszi az x tengelyt, így egyenlete $y = \operatorname{tg}\gamma \cdot x + \operatorname{tg}\gamma \cdot r$. Hasonlóan belátható, hogy m_1 párhuzamos BO-val és az y tengelyt r-nél metszi. Az egyenlete $y = \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \cdot x + r$. Az m_c magasság egyenes merőleges a c oldalra és az origón megy keresztül, ezért az egyenletét könnyen megkaphatjuk: $y = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} \cdot x$.

Az AO szögfelező és m_3 párhuzamosságából következik, hogy γ az $\frac{\alpha}{2}$ pótszöge. Felhasználva, hogy $\frac{\alpha}{2}=\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}$, ebből $\gamma=\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}$ adódik. A félszögek tangensére vonatkozó azonosságot felhasználva $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{\sin\beta}{1+\cos\beta}$, valamint

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{\frac{\pi}{2}+\beta}{2}\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)}=\frac{\cos\beta}{1-\sin\beta}.$$

Összegezve:

$$m_3 \text{ egyenlete: } y=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}\right)\cdot x+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}\right)\cdot r=(x+r)\frac{\cos\beta}{1-\sin\beta},$$

$$m_1 \text{ egyenlete: } y=\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\cdot x+r=\frac{\sin\beta}{1+\cos\beta}\cdot x+r,$$

$$m_c \text{ egyenlete: } y=-\frac{1}{\operatorname{tg}\beta}x=-\frac{\cos\beta}{\sin\beta}x.$$

Az m_1 és az m_3 egyenes biztosan metszik egymást, méghozzá abban az x koordinátájú pontban, amelyre

$$(x+r)\frac{\cos\beta}{1-\sin\beta}=\frac{\sin\beta}{1+\cos\beta}x+r.$$

Ebből

$$x\left(\frac{\cos\beta}{1-\sin\beta}-\frac{\sin\beta}{1+\cos\beta}\right)=r\left(1-\frac{\cos\beta}{1-\sin\beta}\right),$$

$$x=r\cdot\frac{1-\frac{\cos\beta}{1-\sin\beta}}{\frac{\cos\beta}{1-\sin\beta}-\frac{\sin\beta}{1+\cos\beta}}=r\cdot\frac{\frac{1-\sin\beta-\cos\beta}{1-\sin\beta}}{\frac{\cos\beta(1+\cos\beta)-\sin\beta(1-\sin\beta)}{(1-\sin\beta)(1+\cos\beta)}}=$$

$$=r\cdot\frac{(1-\sin\beta-\cos\beta)(1+\cos\beta)}{\cos\beta+\cos^2\beta-\sin\beta+\sin^2\beta}=$$

$$=r\cdot\frac{1-\sin\beta-\cos\beta+\cos\beta-\sin\beta\cos\beta-\cos^2\beta}{\cos\beta-\sin\beta+1}=$$

$$=\frac{\sin\beta(\cos\beta-\sin\beta+1)}{\cos\beta-\sin\beta+1}=-r\cdot\sin\beta.$$

Behelyettesítve ezt az x értéket m_c és m_3 egyenletébe:

$$m_c:-\frac{\cos\beta}{\sin\beta}(-\sin\beta\cdot r)=\cos\beta\cdot r,$$

$$m_3:(-\sin\beta\cdot r+r)\frac{\cos\beta}{1-\sin\beta}=\cos\beta\cdot r.$$

Tehát valóban egy pontban metszik egymást.

Bokor Endre (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.)

III. megoldás. Jelölje K_1, K_2 és K_3 az ABC háromszögbe írt kör érintési pontjait az oldalakon a 2. ábra szerint, és legyen a $K_1K_2K_3$ háromszög magasságpontja M.

Külső pontból körhöz húzott érintők hossza egyenlő, tehát $CK_1 = CK_3$. Továbbá az érintési pontba húzott sugár merőleges az érintőre: $OK_1C\sphericalangle = OK_3C\sphericalangle = 90°$. Mindezekből következik, hogy az OK_3CK_1 négyszög négyzet.

Legyen O az origo, valamint mutasson minden pontba azonos nevű helyvektor ($\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}, \ldots$).

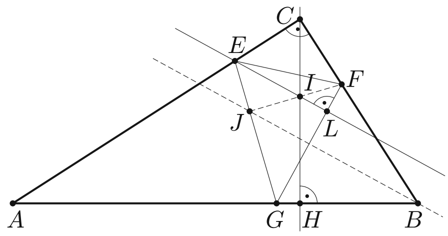
Ismert, hogy a háromszög köréírt körének O középpontjából a csúcsokba mutató vektorok összege az O-ból a magasságpontba mutató vektor. Mivel most O a $K_1K_2K_3\triangle$ köré írt körének középpontja, ezért O-ból e háromszög M magasságpontjába az $\mathbf{m} = \mathbf{k_1} + \mathbf{k_2} + \mathbf{k_3}$ vektor mutat.

OK_3CK_1 négyzet, ezért egyben paralelogramma is: $\mathbf{c} = \mathbf{k_1} + \mathbf{k_3}$. Ebből $\overrightarrow{CM} = \mathbf{m} - \mathbf{c} = (\mathbf{k_1} + \mathbf{k_3} + \mathbf{k_2}) - (\mathbf{k_1} + \mathbf{k_3}) = \mathbf{k_2} = \overrightarrow{OK_2}$.

Tudjuk, hogy $OK_2 \perp AB$, ezért a fentiekből következik, hogy $CM \perp AB$, és így M rajta van a C-ből induló magasságvonalon.

Csertán András (Nagykanizsa, Batthyány L. Gimn., 12. évf.)

IV. megoldás. Az ABC háromszögbe írt kör érintési pontjai által meghatározott háromszög legyen EFG, és jelölje I az EL és CH egyenesek metszéspontját (*3. ábra*).



3. ábra

Mivel GF merőleges a $CBH\sphericalangle$ szögfelezőjére és merőleges EL-re, ezért EL párhuzamos a szögfelezővel. Legyen $\alpha = CAB\sphericalangle$ és $\beta = CBA\sphericalangle$, ekkor

$$BCH\sphericalangle = \alpha \quad \text{és} \quad ACH\sphericalangle = \beta, \quad HBC_\triangle \sim HCA_\triangle.$$

Tehát a HBC háromszöget el tudjuk forgatni H körül 90 fokkal, majd H pont körüli nagyítást alkalmazhatunk úgy, hogy a B pont a C pontba, a C pont pedig az A pontba kerüljön. Ekkor a HAC háromszöget fogjuk kapni, tehát EL merőleges az $ACH\sphericalangle$ szögfelezőjére (mert 90 fokkal forgattunk és AHC és CHB hasonlók). Ebből következik, hogy $CE = CI$. Hasonlóan belátható, hogy FJ merőleges a $BCH\sphericalangle$ szögfelezőjére. Mivel $CE = CF$ (körhöz húzott érintőszakaszok egyenlők), ezért $CF = CI$ is teljesül. Emiatt a $BCH\sphericalangle$ szögfelezője merőleges FI-re, vagyis F, I és J egy egyenesre esnek. Tehát FJ és CH metszéspontja is az I pont, azaz EFG magasságpontja az ABC háromszög C-hez tartozó magasságán fekszik.

Bukva Dávid (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.)

69 dolgozat érkezett. 4 pontos 50, 3 pontos 5, 2 pontos 4, 1 pontos 4, 0 pontos 6 dolgozat.

B. 4986. *Jelölje* KP *azt a* 64 *térbeli pontot, amelyeknek mindhárom koordinátája* 1, 2, 3 *vagy* 4. *Kata és Péter térbeli amőbát játszanak a* KP *pontjain. Kata kezdi a játékot, kiválaszt egy tetszés szerinti pontot* KP*-ből, és azt kékre színezi. A második lépésben Péter választ egy, az előzőtől különböző pontot, és azt pirosra színezi. Ezután felváltva színeznek kékre, illetve pirosra egy korábban még színezetlen* KP*-beli pontot. Az győz, aki először színez a saját színére négy, egy egyenesre illeszkedő pontot. Mutassuk meg, hogy Katának mindegy, hogy az első lépésben az* $(1,1,2)$ *vagy a* $(2,2,1)$ *pontot színezi kékre.*

(*5 pont*) Javasolta: *Benkő Dávid* (South Alabama)

Megoldás. Megadjuk a KP halmaz olyan, önmagára történő kölcsönösen egyértelmű leképezését, ami egyenestartó, azaz bármely négy, egy egyenesbe eső pont képe is egy egyenesbe esik (és akkor megfordítva is, mivel az egy egyenesbe eső pontnégyesek száma véges). Legyen ez a hozzárendelés a következő: az (x,y,z) koordinátájú pont képét jelölje $\big(f(x),f(y),f(z)\big)$, ahol f a következő függvény:

$$1\mapsto 2\quad 2\mapsto 1\quad 3\mapsto 4\quad 4\mapsto 3.$$

Az f függvény kölcsönösen egyértelmű, ezért KP általa nyert leképezése is az.

Az A, B, C, D pontok ebben a sorrendben pontosan akkor esnek egy egyenesbe, ha mindegyik koordinátájuk számtani sorozatot alkot ebben a sorrendben. (Ekkor azt mondjuk, hogy az A, B, C, D pontok ebben a sorrendben esnek egy egyenesbe.) Egy ilyen számtani sorozat vagy négyszer ugyanaz a szám, vagy az $(1\ 2\ 3\ 4)$, vagy pedig a $(4\ 3\ 2\ 1)$ sorozat. Ha $(x\ y\ z\ t)$ ezek bármelyike, akkor e számok f-nél vett képei az $\big(f(y)\ f(x)\ f(t)\ f(z)\big)$ sorrendben alkotnak számtani sorozatot. Ebből következik, hogy ha az A, B, C, D pontok ebben a sorrendben esnek egy egyenesbe, akkor A', B', C', D' képeik a B', A', D', C' sorrendben esnek egy egyenesbe. Végül, mivel KP megadott leképezésénél az $(1\ 1\ 2)$ pont képe $(2\ 2\ 1)$, e két pontnak ugyanaz a szerepe a játékban, tehát mindegy, hogy Kata melyiküket jelöli be elsőként.

Nagy Nándor (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.) megoldása alapján

44 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 14 versenyző: Beke Csongor, Csaplár Viktor, Dobák Dániel, Fleiner Zsigmond, Füredi Erik Benjámin, Hámori Janka, Hegedűs Dániel, Kerekes Anna, Nagy Nándor, Szabó Dávid, Szabó Kornél, Terjék András József, Tóth Ábel, Várkonyi Zsombor, Zsigri Bálint. 4 pontos 6, 1 pontos 3, 0 pontos 20 dolgozat.

B. 4994. *Bizonyítsuk be, hogy ha* A, B *és* C *olyan valós számok, amelyekre az* $x^3+Ax^2+Bx+C=0$ *paraméteres harmadfokú egyenletnek három különböző pozitív gyöke van, akkor* $A^2+B^2+18C>0$.

(*4 pont*) (*Német feladat*)

I. megoldás. Jelölje a harmadfokú polinomot $p(x)$, aminek a pozitív gyökei a, b és c. Ekkor $p(x)=(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc$, így $A=-(a+b+c)$, $B=(ab+bc+ca)$, $C=-abc$, ezért a bizonyítandó egyenlőtlenség $A^2+B^2+18C=(a+b+c)^2+(ab+bc+ca)^2-18abc>0$. Adjunk hozzá mindkét oldalhoz $18abc$-t, és hajtsuk végre a bal oldalon kijelölt műveleteket. Így a bizonyítandóval ekvivalens

$$a^2+b^2+c^2+ab+ab+bc+bc+ca+ca+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+a^2bc+a^2bc+$$
$$+ab^2c+ab^2c+abc^2+abc^2>18abc$$

egyenlőtlenséget kapjuk, ami a 18 változós számtani-mértani közép közötti egyenlőtlenség miatt igaz (hiszen a gyökök pozitívak), és a bal oldal szigorúan nagyobb, hiszen a gyökök nem esnek egybe a feltétel alapján.

Csiszár Zoltán (Szeged, Radnóti M. Kísérleti Gimn., 11. évf.)

II. megoldás. A bizonyítandó

$$S=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2a^2bc+$$
$$+2ab^2c+2abc^2-18abc>0$$

egyenlőtlenség bal oldala a következőképpen alakítható:

$$\begin{aligned}S&=(a^2-2abc+b^2c^2)+(b^2-2abc+a^2c^2)+(c^2-2abc+a^2b^2)+\\&\quad+2ab(c^2-2c+1)+2ac(b^2-2b+1)+2bc(a^2-2a+1)=\\&=(a-bc)^2+(b-ac)^2+(c-ab)^2+2ab(c-1)^2+2ac(b-1)^2+2bc(a-1)^2,\end{aligned}$$

ami nyilván pozitív.

Hámori Janka (Szeged, Radnóti M. Kísérleti Gimn., 10. évf.)

69 dolgozat érkezett. 4 pontos 52, 3 pontos 10, 2 pontos 3, 1 pontos 1, 0 pontos 3 dolgozat.

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (619–623.)

K. 619. Legfeljebb hány prímet lehet megadni úgy, hogy közülük bármely három összege is prím legyen?

K. 620. Öt pozitív egész szám összege 20. Az öt szám páronként vett különbségeinek abszolút értéke: 1, 2, 3, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10. Adjuk meg az összes ilyen számötöst.