Euler arányösszeg-tétele*

Bemutatjuk Euler arányösszeg-tételének történetét, adunk rá egy új bizonyítást, és egy érdekes egyenlőtlenséggé alakítjuk Euler arányösszeg-formuláját.

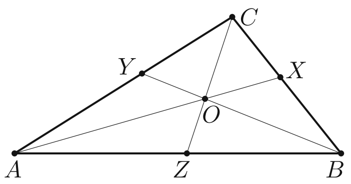
1. Bevezetés

Leonhard Euler (1707–1783), korának legnagyobb matematikusa, a geometriát is számos azóta híressé vált tétellel gazdagította. Ebben a dolgozatban[1] a Magyarországon kevésbé ismert arányösszeg-tételével foglalkozunk, amelynek nemzetközi irodalma sem túlságosan bőséges, habár időről időre feltűnnek újabb bizonyításokat, illetve lehetséges általánosításokat tárgyaló cikkek (lásd [4, 5, 6, 9, 10]).

1. tétel (Euler arányösszeg-tétele [2]). *Az euklideszi sík minden ABC háromszögének bármely O belső pontjára*

$$\frac{AO}{OX}+\frac{BO}{OY}+\frac{CO}{OZ}+2=\frac{AO}{OX}\cdot\frac{BO}{OY}\cdot\frac{CO}{OZ}, \tag{1}$$

ahol $X=AO\cap BC$, $Y=BO\cap CA$, $Z=CO\cap AB$.



Habár Euler már 1780. május 1-jén benyújtotta a kiadónak az arányösszegtételt tartalmazó tanulmányát [2], az csak 1783-ban bekövetkezett halála után 22 évvel jelent meg. Sok munkája jutott erre a sorsa, aminek legfőbb oka az volt, hogy valósággal ontotta magából a cikkeket (élete során több, mint 800-at írt a 28 nagyobb mű mellett), így az általa preferált Berlini, illetve Szentpétervári Akadémiák folyóiratainál kiadatlan művei igencsak feltorlódtak.

A kortársak azonban ismerték Euler arányösszeg-tételét, amit jól mutat, hogy Anders Johan Lexell (1740–1783), aki az Euler-család jó barátja volt, és haláláig ugyanannak a Szentpétervári Akadémiának volt a tagja, már 1784-ben publikálta a tétel gömbháromszögekre érvényes változatát [3].

Jelen szerzőknek is egy általánosabb problémával, a projektív-metrikus terek karakterizációjával [8] összefüggésben került látóterébe az arányösszeg-tétel [7].

*Ez a kutatás az NKFIH K-116451 és KH_18 129630 projektjei támogatásával készült.
[1]Ugyanez angol nyelven is elérhető, lásd [7].

Még az arányösszeg-tételnél is kevésbé ismert, pedig már Euler [2] dolgozatában is szerepelt, hogy az ABC háromszög megszerkeszthető az (1) formulában szereplő hosszak ismeretében.

2. tétel (Szerkeszthetőség). *Ha adottak egy ismeretlen ABC háromszög valamely O pontjára illeszkedő AX, BY és CZ szakaszok hosszai, valamint azok O pont általi felosztásának arányai, akkor az ABC háromszög megszerkeszthető.*

Ebben a dolgozatban nemcsak a fenti tételeket igazoljuk, hanem a 3. tételben pontosan megadjuk annak feltételeit is, hogy három olyan szakaszt, amelyek belsejében adott egy-egy pont, mikor lehet ezen belső pontjaikban úgy összeilleszteni, hogy a valamely három kiválasztott végpontjuk által meghatározott háromszögnek a kiválasztott végponttal szemben lévő oldalai tartalmazzák a szakaszok nem kiválasztott végpontjait[2].

Végül, bár bemutatjuk a közvetlen általánosítás lehetőségét is, inkább egy az (1) egyenlőségből született egyenlőtlenséget bizonyítunk, mely éppenséggel pontosan akkor válik egyenlőséggé, ha az AX, BY és CZ szakaszok egy ponton mennek át. A 4. tétel határozottan emlékeztet Routh tételére ([1, 13.55], [11]).

2. Az arányösszeg-tétel és megfordításának bizonyítása

Az 1. tétel bizonyítása. Áttekinthetőbbé válik Euler (1) formulája, ha bevezetjük az $a=\frac{AO}{OX}$, $b=\frac{BO}{OY}$ és $c=\frac{CO}{OZ}$ jelöléseket:

$$a+b+c+2=abc. \tag{2}$$

Mindkét oldalhoz hozzáadva az $1+a+b+c+ab+bc+ca$ kifejezést, a jobb oldal újra szorzatalakba írható, és a bal oldal is szorzatok összegévé válik:

$$(1+b)(1+c)+(1+a)(1+c)+(1+a)(1+b)=(1+a)(1+b)(1+c).$$

Az a, b és c értéke nyilván nem -1, ezért a jobb oldallal osztva az ekvivalens

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}=1 \tag{3}$$

egyenlőséghez jutunk, vagyis (1) ekvivalens az

$$\frac{OX}{AX}+\frac{OY}{BY}+\frac{OZ}{CZ}=1 \tag{4}$$

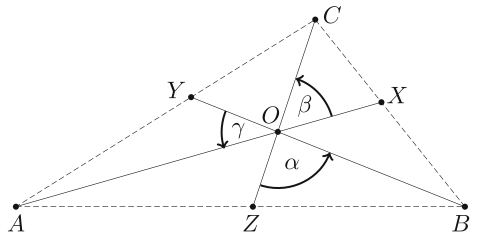
egyenlőséggel. Ez azonban közvetlenül adódik az

$$\frac{OX}{AX}=\frac{t(OBC)}{t(ABC)},\quad \frac{OY}{BY}=\frac{t(OCA)}{t(ABC)},\quad \frac{OZ}{CZ}=\frac{t(OAB)}{t(ABC)}$$

egyenlőségekből. □

[2] A [9] tanulmány igazolta, hogy amennyiben csak az (1) egyenletben szereplő arányok betartása fontos, akkor (1) elegendő: minden további feltétel nélkül van olyan háromszög, amelyben éppen az (1) egyenletben szereplő arányok lépnek fel. Sőt, a szerző megjegyzi, hogy egy ilyen háromszög minden affin képe is megteszi.

A 2. tétel bizonyítása. Annak érdekében, hogy elkerüljük az áttekinthetetlenül összetett formulákat, most is alkalmazzuk az $a=\frac{AO}{OX}$, $b=\frac{BO}{OY}$ és $c=\frac{CO}{OZ}$ jelöléseket, melyekre a feltétel szerint (2), vagy ami ugyanaz, (3) teljesül. Bevezetjük még az $\alpha=ZOB\sphericalangle$, $\beta=XOC\sphericalangle$ és $\gamma=YOA\sphericalangle$ szögeket, amelyekre nyilván $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ érvényes.



Feladatunk tehát az α, β és $\gamma=\pi-\alpha-\beta$ értékek megtalálása.

Az X pont akkor és csak akkor esik a BC szakaszra, ha

$$BO\cdot OC\sin\alpha=t(BOC)=BO\cdot OX\sin\gamma+CO\cdot OX\sin\beta,$$

vagyis

$$\frac{AO}{OX}\cdot\frac{\sin\alpha}{OA}=\frac{\sin\alpha}{OX}=\frac{\sin\gamma}{OC}+\frac{\sin\beta}{BO}.$$

A csúcsok ciklikus permutációjával ugyanígy látjuk, hogy $Y\in CA$ és $Z\in AB$ akkor és csak akkor igaz, ha rendre

$$\frac{BO}{OY}\cdot\frac{\sin\beta}{OB}=\frac{\sin\alpha}{OA}+\frac{\sin\gamma}{CO},$$

$$\frac{CO}{OZ}\cdot\frac{\sin\gamma}{OC}=\frac{\sin\beta}{OB}+\frac{\sin\alpha}{AO}.$$

Az $x=\frac{\sin\alpha}{AO}$, $y=\frac{\sin\beta}{OB}$ és $z=\frac{\sin\gamma}{OC}$ bevezetésével azt kapjuk, hogy ezek teljesítik az

$$\begin{aligned} ax-y-z&=0,\\ -x+by-z&=0,\\ -x-y+cz&=0 \end{aligned}\tag{5}$$

homogén lineáris egyenletrendszert. Az (5) egyenleteinek különbségéből rögtön adódik, hogy a megoldásokra $(1+a)x=(1+b)y=(1+z)c$ teljesül, vagyis minden megoldás $\left(\frac{\lambda}{1+a},\frac{\lambda}{1+b},\frac{\lambda}{1+c}\right)$ alakú, ahol $\lambda\in\mathbb{R}$. Eszerint

$$\lambda\frac{AO}{1+a}=\sin\alpha,\quad \lambda\frac{BO}{1+b}=\sin\beta\quad\text{és}\quad \lambda\frac{CO}{1+c}=\sin\gamma.\tag{6}$$

Ebből

$$\frac{OB}{1+b}\sin\alpha = \frac{OA}{1+a}\sin\beta,$$

és

$$\frac{OC}{1+c} = \frac{\sin\gamma}{\lambda} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha}{\lambda} = \frac{\sin\alpha}{\lambda}\cos\beta + \cos\alpha\frac{\sin\beta}{\lambda} =$$
$$= \frac{OA}{1+a}\cos\beta + \frac{OB}{1+b}\cos\alpha$$

is következik. Utóbbi egyenlőség mindkét oldalából kivonva az $\frac{OB}{1+b}\cos\alpha$ kifejezést, majd az eredményt négyzetre emelve és hozzáadva az első egyenlethez, azt kapjuk, hogy

$$\frac{OB^2}{(1+b)^2}\sin^2\alpha + \left(\frac{OC}{1+c} - \frac{OB}{1+b}\cos\alpha\right)^2 = \frac{OA^2}{(1+a)^2}.$$

Ebből a bal oldalon a különbség négyzetre emelését elvégezve

$$\frac{OB^2}{(1+b)^2} - 2\cdot\frac{OC}{1+c}\cdot\frac{OB}{1+b}\cos\alpha + \frac{OC^2}{(1+c)^2} = \frac{OA^2}{(1+a)^2} \tag{7}$$

adódik. Ez a koszinusz-tétel értelmében azt jelenti, hogy van egy olyan PQR háromszög, amelynek a csúcsokkal szembeni oldalhosszaira rendre $p = \frac{OA}{1+a}$, $q = \frac{OB}{1+b}$ és $r = \frac{OC}{1+c}$ érvényes, és szögei a csúcsoknál rendre α, β és $\gamma = \pi - \alpha - \beta$.

Az eredeti háromszöget tehát úgy tudjuk megszerkeszteni, hogy a $p = \frac{AO\cdot OX}{AX}$, $q = \frac{BO\cdot OY}{BY}$ és $r = \frac{CO\cdot OZ}{CZ}$ hosszakat kiszámítjuk, ezekből megszerkesztjük a PQR háromszöget, ennek szögei megadják az α, β és $\gamma = \pi - \alpha - \beta$ szögeket, amelyek alapján az AX, BY és CZ szakaszok egymáshoz képest beállíthatók. □

Az 1. tétel és a 2. tétel bizonyítása alapján világos, hogy az alábbi tétel feltételeit nem lehet könnyíteni.

3. tétel (Az arányösszeg-tétel megfordítása). *Ha adott közös O pontra illeszkedő AX, BY és CZ szakaszokra érvényes Euler (1) formulája, valamint a $p = \frac{AO\cdot OX}{AX}$, $q = \frac{BO\cdot OY}{BY}$ és $r = \frac{CO\cdot OZ}{CZ}$ számok mindegyike kisebb a másik kettő összegénél, akkor az AX, BY és CZ szakaszokat el lehet forgatni O körül úgy, hogy az X, Y, Z pontok rendre az ABC háromszög megfelelő oldalaira essenek.*

Bizonyítás. Az egyszerűség kedvéért legyen $a = \frac{AO}{OX}$, $b = \frac{BO}{OY}$ és $c = \frac{CO}{OZ}$. A feltétel szerint

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = 1. \tag{8}$$

Szerkesszünk egy olyan PQR háromszöget, mely oldalainak hossza (a szokásos módon jelölve) p, q és r. A csúcsoknál lévő szögek legyenek rendre α, β és $\gamma = \pi - \alpha - \beta$.

Forgassuk el az AX, BY és CZ szakaszokat úgy, hogy $ZOB\sphericalangle$ legyen α, $XOC\sphericalangle$ legyen β és $YOA\sphericalangle$ legyen γ. Eszerint

$$\begin{aligned} q^2-2rq\cos\alpha+r^2&=p^2,\\ p^2-2rp\cos\beta+r^2&=q^2,\\ p^2-2qp\cos\gamma+q^2&=r^2. \end{aligned}\tag{9}$$

Most igazoljuk, hogy a kialakult ABC háromszög csúcsokkal szemközti oldalai rendre tartalmazzák az X, Y és Z pontokat.

Legyen $\widehat{X}=AX\cap BC$, $\widehat{Y}=BY\cap CA$ és $\widehat{Z}=CZ\cap AB$, továbbá $\widehat{a}=\frac{AO}{O\widehat{X}}$, $\widehat{b}=\frac{BO}{O\widehat{Y}}$ és $\widehat{c}=\frac{CO}{O\widehat{Z}}$. Az ABC háromszögre is érvényes (1), így

$$\frac{1}{1+\widehat{a}}+\frac{1}{1+\widehat{b}}+\frac{1}{1+\widehat{c}}=1\tag{10}$$

adódik. Bevezetve a $\widehat{p}=\frac{AO\cdot O\widehat{X}}{A\widehat{X}}$, $\widehat{q}=\frac{BO\cdot O\widehat{Y}}{B\widehat{Y}}$ és $\widehat{r}=\frac{CO\cdot O\widehat{Z}}{C\widehat{Z}}$ jelöléseket, (7) és a szerkesztés menete alapján

$$\begin{aligned} \widehat{q}^2-2\widehat{r}\widehat{q}\cos\alpha+\widehat{r}^2&=\widehat{p}^2,\\ \widehat{p}^2-2\widehat{r}\widehat{p}\cos\beta+\widehat{r}^2&=\widehat{q}^2,\\ \widehat{p}^2-2\widehat{q}\widehat{p}\cos\gamma+\widehat{q}^2&=\widehat{r}^2. \end{aligned}\tag{11}$$

Az (9) egyenleteket összevetve az (11) egyenletekkel, mivel mindkét egyenlethármas azonos szögű, tehát hasonló háromszögekre vonatkozik, adódik, hogy $\widehat{p}=\lambda p$, $\widehat{q}=\lambda q$ és $\widehat{r}=\lambda r$ valamely $\lambda>0$ számra. Tekintve a p, q, r és $\widehat{p}$, $\widehat{q}$, $\widehat{r}$ definícióit, ebből $\frac{1}{1+\widehat{a}}=\frac{\lambda}{1+a}$, $\frac{1}{1+\widehat{b}}=\frac{\lambda}{1+b}$, és $\frac{1}{1+\widehat{c}}=\frac{\lambda}{1+c}$ adódik, amiből (8) és (10) összevetésével $\lambda=1$ következik. Eszerint $\widehat{a}=a$, $\widehat{b}=b$, és $\widehat{c}=c$, vagyis $\widehat{X}=X$, $\widehat{Y}=Y$, és $\widehat{Z}=Z$.

Ezzel a tételt bebizonyítottuk. $\square$

3. Általánosítás helyett egy egyenlőtlenség

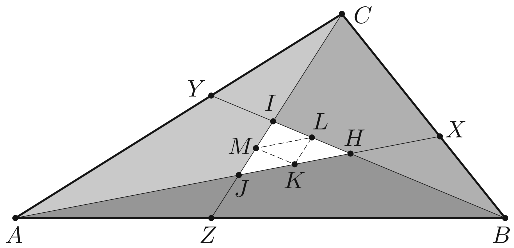
Belátható, hogy Euler arányösszeg-tétele igaz marad akkor is, ha a háromszög csúcsaiból kiinduló egyenesek metszéspontjáról csak annyit teszünk fel, hogy az nem esik a háromszög egyik oldalegyenesére se. Sőt, ezen általánosabb eset megfordítása is érvényben marad ha az X, Y, Z pontoktól csak azt várjuk el, hogy a megfelelő oldalegyenesekre essenek. Ennek bizonyítását itt nem végezzük el, helyette egy Routh tételére ([1, 13.55], [11]) emlékeztető egyenlőtlenséget mutatunk.

Az arányösszeg-formulát tekintsük most az ekvivalens (4) alakjában. Ez a formula a három szakasz egy ponton áthaladása esetén érvényes. Ha a szakaszok páronként különböző H, I, J pontokban metszik egymást, akkor is képezhetünk minden szakaszon arányt, ha a két metszéspont által meghatározott szakasz felezőpontját tekintjük új osztópontnak.

4. tétel. *Legyenek X, Y, Z az ABC háromszög rendre A, B, C csúccsal szemközti oldalainak pontjai, legyenek továbbá őket a szemközti csúcsokkal összekötő szakaszok metszéspontjai $H = AX \cap BY$, $I = BY \cap CZ$ és, $J = CZ \cap AX$. Végül legyenek ez utóbbiak által meghatározott HIJ háromszög oldalfelező pontjai $K = (J + H)/2$, $L = (H + I)/2$ és $M = (I + J)/2$. Ekkor*

$$\frac{KX}{AX} + \frac{LY}{BY} + \frac{MZ}{CZ} \geqslant 1, \tag{12}$$

ahol egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $K = L = M$.



Bizonyítás. Rendre azonos alapú háromszögek területének arányait írhatjuk fel a következőképpen:

$$\frac{t(HBC)}{t(ABC)} = \frac{HX}{AX}, \qquad \frac{t(JBC)}{t(ABC)} = \frac{JX}{AX}, \qquad \frac{t(ICA)}{t(ABC)} = \frac{IY}{BX},$$

$$\frac{t(HCA)}{t(ABC)} = \frac{HY}{BX}, \qquad \frac{t(JAB)}{t(ABC)} = \frac{JZ}{CX}, \qquad \frac{t(IAB)}{t(ABC)} = \frac{IZ}{CX}.$$

Ezeket a 12 bal oldalának kétszeresébe helyettesítve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
&\frac{HX+JX}{AX} + \frac{IY+HY}{BY} + \frac{JZ+IZ}{CZ} = \\
&= \frac{t(HBC)}{t(ABC)} + \frac{t(JBC)}{t(ABC)} + \frac{t(ICA)}{t(ABC)} + \frac{t(HCA)}{t(ABC)} + \frac{t(JAB)}{t(ABC)} + \frac{t(IAB)}{t(ABC)} = \\
&= \frac{t(HBC)}{t(ABC)} + \frac{t(HCA)}{t(ABC)} + \frac{t(ICA)}{t(ABC)} + \frac{t(IAB)}{t(ABC)} + \frac{t(JBC)}{t(ABC)} + \frac{t(JAB)}{t(ABC)} = \\
&= 1 - \frac{t(HAB)}{t(ABC)} + 1 - \frac{t(IBC)}{t(ABC)} + 1 - \frac{t(JAC)}{t(ABC)} = 3 - \frac{t(ABC) - t(HIJ)}{t(ABC)} = \\
&= 2 + \frac{t(HIJ)}{t(ABC)}.
\end{aligned}$$

Ezzel a tételünket bizonyítottuk. □

Hivatkozások

[1] H. S. M. Coxeter, *A geometriák alapjai,* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973.

[2] L. Euler, Geometrica et sphaerica quaedam, *Memoires de lAcademie des Sciences de Saint-Petersbourg,* **5** (1815), 96–114; Opera Omnia Series 1, vol. XXVI, 344–358;
eredeti: `http://eulerarchive.maa.org/docs/originals/E749.pdf`;
angol fordítás: `http://eulerarchive.maa.org/Estudies/E749t.pdf`.

[3] A. J. Lexell, Solutio problematis geometrici ex doctrina sphaericorum, *Acta academiae scientarum imperialis Petropolitinae,* **5**:1 (1784), 112–126;
`http://www.17centurymaths.com/contents/euler/lexellone.pdf`.

[4] A. Papadopoulos and W. Su, On hyperbolic analogues of some classical theorems in spherical geometry, *arXiv* (2015), `http://arxiv.org/abs/1409.4742`.

[5] B. Grünbaum and M. S. Klamkin, Euler's Ratio-Sum Theorem and Generalizations, *Mathematics Magazine,* **79**:2 (Apr) (2006), 122–130;
`http://www.jstor.org/stable/27642919`.

[6] B. Grünbaum, Cyclic ratio sums and products, *Crux Mathematicorum,* **24**:1 (1998), 20–25; `https://cms.math.ca/crux/v24/n1/page20-25.pdf`.

[7] Á. Kurusa and J. Kozma, Euler's ratio-sum theorem revisited, *Forum Geom.,* **19** (2019);
`http://forumgeom.fau.edu/FG2019volume19/FG2019index.html`.

[8] Á. Kurusa and J. Kozma, Euler's ratio-sum formula in projective-metric spaces, *Beiträge zur Algebra und Geometrie,* (2018);
`https://doi.org/10.1007/s13366-018-0422-6`.

[9] G. C. Shephard, Euler's Triangle Theorem, *Crux Mathematicorum,* **25**:3 (1999), 148–153; `https://cms.math.ca/crux/v25/n3/page148-153.pdf`.

[10] C. E. Sandifer, 19th century Triangle Geometry (May 2006), *How Euler did it,* Math. Ass. Amer., 2007, 19–27; `http://eulerarchive.maa.org/hedi/HEDI-2006-05.pdf`.

[11] `https://en.wikipedia.org/wiki/Routh's_theorem`; Accessed 2019. március 8.

Kurusa Árpád és **Kozma József**
(Bolyai Intézet, Szeged)

Maths Beyond Limits nemzetközi matematika tábor

Idén negyedik alkalommal kerül megrendezésre az intenzív és sokszínű Maths Beyond Limits (MBL) nemzetközi matematika tábor, 2019. szeptember 9. és 21. között. Helyszíne Milówka, egy kedves hegyvidéki falu Dél-Legyelországban,