A mechanikai energia megmaradási tétele szerint

$$E_{\text{helyzeti}} + E_{\text{rugó}} + \frac{1}{2}mv^2 = 0,$$

ahonnan a test maximális sebessége

$$v = \sqrt{\frac{2}{0{,}41\ \text{kg}}(0{,}81\ \text{J} - 0{,}20\ \text{J})} \approx 1{,}7\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

c) Ha a test eljutna $H = 40$ cm mélységbe, a helyzeti energiája

$$E_{\text{helyzeti}} = -mgH = -1{,}62\ \text{J}$$

lenne, a rugók rugalmas energiája pedig

$$E_{\text{rugó}} = 2 \cdot \frac{1}{2}D\Big(\sqrt{x_0^2 + H^2} - x_0\Big)^2 = 2{,}93\ \text{J}.$$

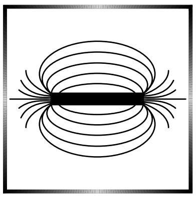
Ezek szerint a test mozgási energiája ezen a helyen

$$\frac{1}{2}mv^2 = 1{,}62\ \text{J} - 2{,}93\ \text{J} = -1{,}31\ \text{J} < 0$$

lenne, ami nem lehetséges. A test tehát *nem ér el* 40 cm mélységbe.

Megjegyzés. Első pillanatra talán meglepő az eredmény, mert a 40 cm-es mélység éppen az egyensúlyi helyzet 20 cm-es mélységének kétszerese. Ugyanakkor vegyük figyelembe, hogy a test mozgása *nem* harmonikus rezgőmozgás, mert a két rugó által kifejtett eredő erő nem egyenesen arányos a test elmozdulásával. Numerikus vagy grafikus közelítő módszerekkel belátható, hogy a test legfeljebb $h_{\text{max}} \approx 32$ cm mélységig süllyed le a rugók vízszintes helyzetének megfelelő helyzete alá.

Markovits Tibor
Budapest



Fizika feladatok megoldása

P. 5044. *András és Béla ikertestvérek. A* 20*. születésnapjukon sorsuk megváltozik: András a Földön marad, Béla viszont egy hosszabb űrexpedícióra indul. Az űrhajó állandó sebességgel távolodik a Földtől. Egy év múlva András készít egy fényképet a születésnapi tortájáról, és rádiójelekkel elküldi azt Bélának, aki azt épp a* 22*. születésnapján kapja meg az űrhajóban.*

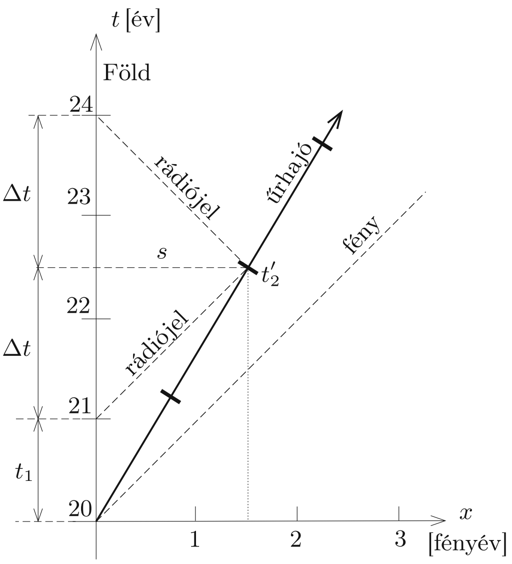
a) *Mekkora sebességgel távolodik az űrhajó a Földtől?*

b) Milyen távol van az űrhajó a Földtől András szerint a fénykép megérkezésekor?

c) Béla is készít egy felvételt a 22. születésnapjáról, és azonnal elküldi azt testvérének. Hány éves korában kapja meg András ezt a fényképet?

(*6 pont*) Közli: *Simon Péter,* Pécs

Megoldás. Jelöljük az űrhajó indulásától a születésnapi fénykép elkészítéséig a Földön eltelt időt (András „öregedését”) t_1-gyel ($t_1 = 1$ év). Az űrhajón az indulástól a rádiójelek megérkezéséig $t_2' = 2$ év idő telik el. A „vessző” arra utal, hogy ez az időtartam a Földtől v sebességgel távolodó űrhajóban, Béla vonatkoztatási rendszerében mérhető. Ennyi idő alatt Béla 2 évet öregszik. A Föld, az űrhajó és a fényjelek (rádióüzenetek) „mozgását” a Földhöz rögzített koordináta-rendszerben az *ábrán* látható módon szemléltethetjük.



a) Legyen a fénykép elkészítése és az űrhajóhoz érkezése között eltelt idő András szerint Δt, a vákuumbeli fénysebességet (a rádióhullámok terjedési sebességét) pedig jelölje c. Az András által elküldött jelnek meg kell tennie az űrhajó által az indulásától a rádiójelek megérkezéséig megtett utat:

$$\Delta t \cdot c = (t_1 + \Delta t) \cdot v. \tag{1}$$

Tudjuk továbbá, hogy a relativisztikus *idődilatáció* jelensége miatt az űrhajón tartózkodó Béla által mért időtartam a Földön maradt András szerint a következő kapcsolatban áll az űrhajó indulása és a rádiójelek megérkezése között eltelt idővel:

$$t_2' = (\Delta t + t_1)\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{2}$$

Az (1) egyenletből kifejezhetjük Δt-t, és azt (2)-be helyettesíthetjük:

$$\Delta t = t_1 \frac{v}{c-v}, \tag{3}$$

$$t_2' = t_1 \left(1 + \frac{v}{c-v}\right) \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = t_1 \sqrt{\frac{c+v}{c-v}},$$

ahonnan az űrhajó sebességére

$$v = \frac{t_2'^2 - t_1^2}{t_2'^2 + t_1^2} c = \frac{4-1}{4+1} c = \frac{3}{5} c = 1{,}8 \cdot 10^8 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

adódik.

b) A v sebességet (3)-ba helyettesítve

$$\Delta t = \frac{3}{2} c t_1 = 1{,}5 \text{ év},$$

a keresett távolságra pedig az $s = c\Delta t = 1{,}5$ fényév $\approx 1{,}42 \cdot 10^{16}$ m eredményt kapjuk.

c) Mivel a Béla által visszafelé küldött rádióhullámok a speciális relativitáselmélet alapján c sebességgel teszik meg az András által mért s távolságot, így András szerint 1,5 év telik el a fénykép megérkezéséig. Tehát András életkora 20 év + 1,0 év + 1,5 év + 1,5 év = 24 év lesz, amikor a Földön megkapja Béla fényképét.

Pszota Máté (Révkomárom, Selye János Gimn., 12. évf.)
dolgozata alapján

22 dolgozat érkezett. Helyes 15 megoldás. Kicsit hiányos (5 pont) 1, hiányos (1–2 pont) 4, hibás 2 dolgozat.

P. 5068. *Egy kicsiny, pontszerűnek tekinthető, m tömegű üstökös közeledik egy M tömegű, R sugarú, gömb alakú bolygó felé ($m \ll M$). Az üstökös sebessége a bolygótól nagyon messze v_0, és ha nem hatna rá a bolygó gravitációs tere, akkor d távolságra haladna el a bolygó középpontjától ($d > R$). Mekkora v_0 minimális értéke, amelynél az üstökös még nem ütközik a bolygóba? (A bolygón és az üstökösön kívül minden más égitest gravitációs hatását elhanyagolhatjuk.)*

(*5 pont*) Közli: *Kovács József,* Szombathely

Megoldás. Számoljuk ki azt a v_0 sebességet, amivel egy „nagyon távoli” pontban rendelkező üstökös pályája éppen érinti az M tömegű, R sugarú bolygót. Centrális erőtérben alkalmazhatjuk az impulzusnyomaték (perdület) megmaradásának tételét, majd a munkatételt. Az üstökös legnagyobb sebességét ($v_{\max}$-ot) a bolygó középpontjához legközelebbi helyen éri el, és itt a sebessége merőleges a bolygó ottani sugarára. A perdület a végtelenben mv_0d, a bolygóhoz legközelebb pedig $mv_{\max}R$, ezek egyenlőségéből

$$v_{\max} = \frac{d}{R} v_0.$$

A munkatétel szerint:

$$\frac{1}{2}mv_{\max}^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = 0 - \left(-\gamma Mm\frac{1}{R}\right).$$

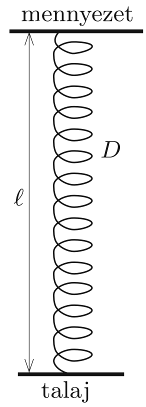
Ezekből az egyenletekből a keresett sebesség alsó határa:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2\gamma MR}{d^2 - R^2}}.$$

Mácsai Dániel (Keszthelyi Vajda J. Gimn., 10. évf.)

39 dolgozat érkezett. Helyes 29 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 1, hiányos (1–3 pont) 4, hibás 5 dolgozat.

P. 5070. *Egy ℓ magasságú barlangban D rugóállandójú, feszítetlen állapotában $d < \ell$ hosszúságú, elhanyagolható tömegű rugó helyezkedik el függőleges helyzetben. A rugó egyik végét a barlang mennyezetéhez, a másik végét pedig a talajhoz rögzítették az* ábrán *látható módon.*



A rugó közepére rárepül és a rugóba kapaszkodik egy m tömegű, kis méretű denevér, és a rugó vezérelte bonyolult rezgésbe kezd. (A denevér mozgása során a rugó semelyik darabja nem lazul meg.)

a) Hol fog megállni a denevér a rezgés lecsillapodása után? (A rugó még nagy megnyújtásnál is követi a Hooke-törvényt.)

b) Innen a denevér igen óvatosan visszamászik újra a talajtól mért $\ell/2$ magasságra. Legalább mekkora munkát végez eközben?

(*5 pont*) Közli: *Balogh Péter,* Gödöllő

Megoldás. *a*) A barlang mennyezetéhez és a talajhoz rögzített rugó megnyúlása terheletlen (denevérmentes) állapotban $\ell - d$. Amikor a rugó közepére rárepül és a rugóba kapaszkodik egy m tömegű, kis méretű denevér, akkor tekinthetjük az elrendezést úgy, mintha a rugót még a nyújtatlan állapotában félbevágtuk volna két, egyenként $d/2$ hosszúságú részre. Ha az egyik részt felül, a másikat alul rögzítjük, majd középen összekötjük őket, akkor mindkét rugódarab megnyúlása $(\ell - d)/2$ lesz.

A félbevágott rugó egy-egy részének a rugóállandója $2D$, hiszen ugyanakkora erő hatására csak fele akkorát változik meg a hossza, mint az eredeti rugó tette volna. Ha a denevér súlya hatására (a kialakuló új egyensúlyi állapotban) a felső rugó megnyúlása x értékkel nő, az alsó rugóé ugyanennyivel csökken, akkor a denevérre ható erők egyensúlyi egyenlete:

$$2D\left(\frac{\ell - d}{2} + x\right) = 2D\left(\frac{\ell - d}{2} - x\right) + mg.$$

Eszerint a denevér (a rezgések lecsillapodása után)

$$x = \frac{mg}{4D}$$

távolsággal kerül mélyebbre a barlang közepénél, a talajtól $\frac{\ell}{2}-\frac{mg}{4D}$ távolságban lesz egyensúlyban.

b) Innen a denevér lassan, óvatosan (elkerülve, hogy a rugó rezgésbe vagy lengésbe jöjjön) felmászik a rugónak egy olyan pontjáig, amelynél kapaszkodva a kialakuló egyensúlyi helyzete éppen a barlang közepénél lesz. Legyen ebben a helyzetben a denevér felett az egész rugó p-ed része (vagyis nyújtatlan állapotban d/p hosszúságú darabja), a denevér alatt pedig nyújtatlanul $d-(d/p)$ hosszúságú rugódarab. p itt egy 1-nél nagyobb, később meghatározandó szám.

A nyújtatlanul d/p hosszúságú rugó rugóállandója

$$D^{(\text{felső})}=pD,$$

a másik darabé pedig

$$D^{(\text{alsó})}=\frac{1}{1-\frac{1}{p}}D=\frac{p}{p-1}D$$

lesz, hiszen a megrövidített rugók erőssége a hosszukkal fordított arányban növekszik. A denevér egyensúlyi állapotában a rugóerők és a nehézségi erő egyensúlyba kerülnek:

$$pD\left(\frac{\ell}{2}-\frac{d}{p}\right)=\frac{p}{p-1}D\left(\frac{\ell}{2}-\frac{p-1}{p}d\right)+mg,$$

vagyis (algebrai átalakítások után):

$$\frac{p-2}{p-1}p=2\frac{mg}{D\ell}.$$

Ennek a p-re nézve másodfokú egyenletnek a számunkra megfelelő (1-nél nagyobb) megoldása:

$$p=1+\frac{mg}{D\ell}+\sqrt{1+\left(\frac{mg}{D\ell}\right)^2}.$$

Érdekes, hogy a fenti képlet nem tartalmazza a feszítetlen rugó hosszát (d-t).

A denevérnek legalább annyi munkát kell végeznie, amennyivel összességében növekszik a saját helyzeti energiája és a két rugó rugalmas energiája a mászás során. A helyzeti energia változása:

$$E^{(\text{helyzeti})}=mgx=\frac{m^2g^2}{4D}.$$

A felső rugó rugalmas energiája kezdetben:

$$E_1^{(\text{felső})}=\frac{1}{2}\cdot 2D\left(\frac{\ell-d}{2}+x\right)^2,$$

az alsó rugó rugalmas energiája kezdetben:

$$E_1^{(\text{alsó})}=\frac{1}{2}\cdot 2D\left(\frac{\ell-d}{2}-x\right)^2,$$

a felső rugó rugalmas energiája a végállapotban:

$$E_2^{(\text{felső})} = \frac{1}{2} \cdot (pD) \left(\frac{\ell}{2} - \frac{d}{p}\right)^2,$$

és végül az alsó rugó rugalmas energiája a végállapotban:

$$E_2^{(\text{alsó})} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{p}{p-1} D\right) \left(\frac{\ell}{2} - d\frac{p-1}{p}\right)^2.$$

A szükséges munka:

$$W \geqslant E^{(\text{helyzeti})} + \left(E_2^{(\text{felső})} - E_1^{(\text{felső})}\right) + \left(E_2^{(\text{alsó})} - E_1^{(\text{alsó})}\right),$$

amit algebrai átalakítások és p korábban kiszámított értékének behelyettesítése után így is fel lehet írni:

$$W \geqslant \frac{m^2 g^2}{8D} + \frac{mg\ell}{4} \frac{p-2}{p} = \frac{(mg)^2}{8D} + \frac{D\ell^2}{4} \left(\sqrt{1 + \frac{m^2 g^2}{D^2 \ell^2}} - 1\right).$$

(Érdekes, hogy ez a képlet sem tartalmazza d-t, a rugó nyújtatlan hosszát.)

Markó Gábor (Győr, Révai Miklós Gimn., 11. évf.)

22 dolgozat érkezett. Helyes Markó Gábor és Marozsák Tádé megoldása. Kicsit hiányos (4 pont) 5, hiányos (1–3 pont) 13, hibás 2 dolgozat.

P. 5071. *Rugalmas fonálon lógó terhet* 0*-ról lassan növekvő erővel húzunk lefelé. A fonál* F_1 *erőnél szakad el. Milyen minimális erő alkalmazásánál szakad el a fonál, ha az erő azonnal felveszi értékét, és utána nem változik?*

(*5 pont*) *A Kvant nyomán*

Megoldás. Feltételezzük, hogy a fonálban ható erő követi a Hooke-törvényt, vagyis a megnyúlással arányosan növekszik. A fonál egy meghatározott feszítőerőnél, azaz egy meghatározott megnyúlásnál szakad el. Legyen ez a megnyúlás a kezdeti megnyúlásnál Δx-szel nagyobb.

A kezdeti helyzettől az elszakadás pillanatáig a fonál rugalmas energiája is és a teher helyzeti energiája is ugyanannyit változik mindkét esetben. Ezek szerint a húzóerő W munkájának is ugyanannyinak kell lennie a kétféle nyújtás esetében. A második esetben az állandó F_2 erő munkája $F_2\Delta x$. Az első esetben az erő lassan növekszik nullától F_1-ig, átlagos értéke $\frac{1}{2}F_1$, így a munkája $\frac{1}{2}F_1\Delta x$. A két munka egyenlőségéből következik, hogy $F_2 = F_1/2$.

Bokor Endre (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.)

10 dolgozat érkezett. Helyes Bokor Endre, Máth Benedek, Osztényi József, Pácsonyi Péter és Varga Vázsony megoldása. Hiányos (1–3 pont) 3, hibás 2 dolgozat.