A B pontversenyben kitűzött feladatok (5006–5013.)

B. 5006. Az $ABCD$ trapéz alapjai AB és CD, az átlók metszéspontja M. Az AC átló felezi a BAD szöget, $AM=BC$ és $BM=CD$. Határozzuk meg a trapéz szögeit.

(*4 pont*) OKTV feladat alapján

B. 5007. Van $3n+1$ darab érménk. Ezek közül n érmének az egyik oldalán 0, a másik oldalán 11 áll. További n érmének az egyik oldalán 0, a másik oldalán 44, a többi $n+1$ érmének pedig az egyik oldalán 0, a másik oldalán 99 szerepel. Az összes érmét egyszerre feldobva mi annak a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 7-tel osztható? (Az érmék mindkét oldalukra azonos eséllyel esnek.)

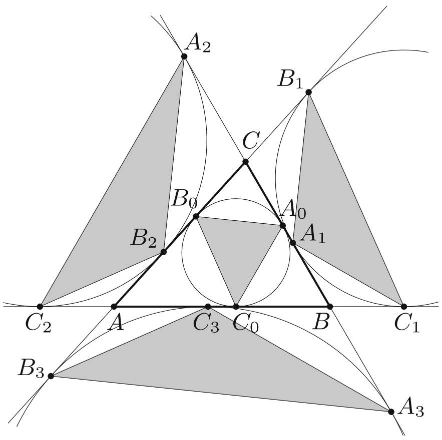
(*4 pont*)

B. 5008. Adottak az A középpontú k_A és a B középpontú k_B körök. Az l_1 egyenes A_1-ben érinti k_A-t és B_1-ben k_B-t; az l_2 egyenes pedig A_2-ben érinti k_A-t és B_2-ben k_B-t. Bizonyítsuk be, hogy az A_1A_2 és a B_1B_2 szakaszok AB egyenesre vett merőleges vetülete egyenlő hosszúságú.

(*3 pont*)

B. 5009. Az x, y, z pozitív számokra $x^2+y^2+z^2=3$ teljesül. Bizonyítsuk be, hogy $2^{\frac{1}{x}}+2^{\frac{1}{y}}+2^{\frac{1}{z}}\geqslant 6$.

(*3 pont*) Javasolta: *Nguyen Van Nho* (Vietnam)



B. 5010. Egy hegyesszögű ABC háromszög beírt köre az oldalakat az A_0, B_0 és C_0 pontokban érinti. A háromszög három hozzáírt körének érintési pontjai az oldalegyeneseken rendre A_1, B_1 és C_1; A_2, B_2 és C_2; illetve A_3, B_3 és C_3. Az $A_iB_iC_i$ háromszög területét jelölje T_i ($i=0,1,2,3$). Mutassuk meg, hogy

$$\frac{1}{T_0}=\frac{1}{T_1}+\frac{1}{T_2}+\frac{1}{T_3}.$$

(*5 pont*)

B. 5011. Adott a síkon 6 általános helyzetű pont úgy, hogy bármely két pont távolsága különböző. Mutassuk meg, hogy megadható két olyan háromszög, amelyeknek minden csúcsa ezen pontok közül való, és a két háromszögnek van egy közös oldala, amely az egyik háromszögben a legrövidebb, a másikban a leghosszabb oldal.

(*5 pont*) Javasolta: *Róka Sándor* (Nyíregyháza)

B. 5012. Legyen $f(x)$ egész együtthatós polinom. Jelölje $f^{(n)}$ az f függvény n-szeri alkalmazását:

$$f^{(n)}(x)=\underbrace{f\Big(f\big(\ldots f}_{n}(x)\ldots\big)\Big).$$

Jelölje $k(f)$ a legkisebb olyan k pozitív egészt, melyre $f^{(k)}(x)\equiv x \pmod{13}$ teljesül minden x egész számra, ha létezik ilyen k, és legyen $k(f)=0$ egyébként. Mutassuk meg, hogy a $k(f)$ értékek között létezik legnagyobb, és határozzuk meg a maximumot.

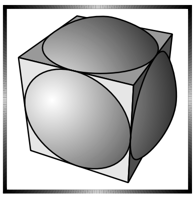
(*6 pont*)

B. 5013. Az ABC háromszög A-val szemközti hozzáírt köre az AC egyenest a B_1 pontban érinti, a BB_1 szakasz a hozzáírt kört B_2-ben metszi, és a hozzáírt körhöz B_2-ben húzott érintő a BC oldalt B_3-ban metszi. Hasonlóan, a háromszög beírt köre az AB oldalt a C_1 pontban érinti, a CC_1 szakasz a beírt kört C_2-ben metszi, és a beírt körhöz C_2-ben húzott érintő a BC oldalt a C_3 pontban metszi. Mutassuk meg, hogy $B_2B_3=C_2C_3$.

(*6 pont*)

Beküldési határidő: 2019. március 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (743–745.)



A. 743. Az $ABCD$ konvex érintőnégyszög beírt köre a BD átlót a P és Q pontokban metszi ($BP<BQ$). A beírt kör AC-re merőleges átmérője UV ($BU<BV$). Mutassuk meg, hogy az AC, PV és QU egyenesek egy ponton mennek át.

IOM 2018 (Moszkva) 2. feladata alapján