Tehát $f(x)$ maximális csak $\left(\frac{\pi}{3}+m\cdot 2\pi\right)$-nél, minimális csak $\left(\frac{5\pi}{3}+n\cdot 2\pi\right)$-nél lehet (ahol $m,n\in\mathbb{Z}$).

$$f\left(\frac{\pi}{3}+m\cdot 2\pi\right)=f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\frac{\pi}{3}+\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2},$$

$$f\left(\frac{5\pi}{3}+n\cdot 2\pi\right)=f\left(\frac{5\pi}{3}\right)=2\sin\frac{5\pi}{3}+\sin\left(2\cdot\frac{5\pi}{3}\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Mivel $\frac{3\sqrt{3}}{2}\approx 2{,}598$ és $\frac{3+2\sqrt{2}}{2}\approx 2{,}914$, így $\left|f(x)\right|\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}<\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$, vagyis

$$\left|2\sin x+\sin(2x)\right|<\frac{3+2\sqrt{2}}{2},$$

és pontosan ezt szerettük volna belátni.

Spányik Teodor (Budapest, Képző- és Iparművészeti Szakgimn. és Koll., 12. évf.)

Megjegyzések. 1. A leggyakoribb hiba az volt, hogy a megoldó feltette, hogy a bal oldali két tagú összeg akkor maximális, ha valamelyik tag maximális (azaz azt a két esetet vizsgálta meg, amikor $2\sin x$ maximális vagy $\sin(2x)$ maximális).

2. Sok helyen hiányzott a kiszámolt szélsőértékek és a jobb oldali szám értéke közötti egyenlőtlenség igazolása.

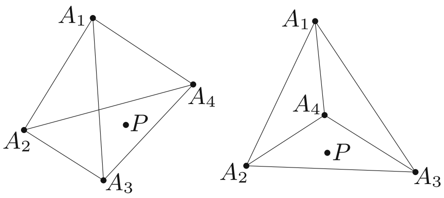
32 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 12 versenyző: Agócs Katinka, Ajtai Boglárka, Almási Adél Csilla, Bukor Benedek, Debreczeni Tibor, Jankovits András, Molnár István, Németh Csilla Márta, Nyitrai Boglárka, Spányik Teodor, Surján Anett, Szécsi Adél Lilla. 4 pontos 7, 3 pontos 1, 1 pontos 11, 0 pontos 1 dolgozat.

Matematika feladatok megoldása

B. 4915. *Adottak az A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 és P általános helyzetű pontok a síkon. Jelölje k_i azt a számot, ahányféleképpen az A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 pontok közül kiválasztható i darab úgy, hogy a kiválasztott pontok konvex burka tartalmazza P-t. Mutassuk meg, hogy $k_3=k_4$.*

(*5 pont*)

Megoldás. Jelölje h^{A_i} $(i=1,2,3,4,5)$ azon háromszögek számát, amelyeknek minden csúcsa az $\{A_1,A_2,A_3,A_4,A_5\}\setminus\{A_i\}$ pontok valamelyike, és tartalmazzák P-t. Így minden P-t tartalmazó háromszöget pontosan kettő h^{A_i}-ben számolunk meg, pl. ha $P\in A_1A_2A_3\triangle$, akkor az $A_1A_2A_3\triangle$-et megszámoltunk h^{A_4} és h^{A_5} kiszámítása közben. Következésképpen $k_3=\left(h^{A_1}+\ldots+h^{A_5}\right)/2$.



Most tegyük fel, hogy P benne van az A_1, A_2, A_3, A_4 pontok konvex burkában. A négy általános helyzetű pont konvex burka lehet négyszög vagy háromszög. Mindkét esetben könnyen láthatjuk, hogy a P pont pontosan két olyan háromszögben van benne, amelynek csúcsai A_1, A_2, A_3, A_4 közül valók. Az *ábrán* látható első esetben pontosan az $A_1A_3A_4\triangle$ és az $A_2A_3A_4\triangle$ tartalmazza P-t, a második esetben pedig pontosan az $A_1A_2A_3\triangle$ és az $A_2A_3A_4\triangle$. Világos, hogy P-t a lérejövő tartományok másikába helyezve is mindig pontosan két háromszög fogja tartalmazni. Kaptuk, hogy $h^{A_5}=2$, ha P benne van az A_1, A_2, A_3, A_4 pontok konvex burkában; és nyilvánvalóan $h^{A_5}=0$, ha P nincs benne az A_1, A_2, A_3, A_4 pontok konvex burkában.

Az érvelésben A_5 szerepe lényegtelen, azaz általában is igaz, hogy h^{A_j} értéke 2, ha P az A_j elhagyása után megmaradt négy pont konvex burkába esik, egyébként pedig 0. Eszerint a $h^{A_1}+\ldots+h^{A_5}$ összeg pontosan a kétszerese azon pontnégyesek számának, amelyek konvex burka tartalmazza P-t, azaz $h^{A_1}+\ldots+h^{A_5}=2k_4$. Így $k_3=\left(h^{A_1}+\ldots+h^{A_5}\right)/2=k_4$, amivel az állítást beláttuk.

91 dolgozat érkezett. 5 pontos 69, 4 pontos 13, 3 pontos 3, 2 pontos 5, 1 pontos 1 dolgozat.

B. 4942. *A nemzetközi kombinatorikai konferenciára érkező száz matematikust egy szállodában helyezik el, ahol a szobák egytől százig vannak megszámozva. A recepciós azt tervezi, hogy a matematikusokat érkezésük sorrendjében az adott sorszámú szobába küldi. Az elsőnek érkező vendégnek viszont elfelejti a megfelelő utasítást megadni, így ő a szobák közül véletlenszerűen választ egyet. Végül a recepciós a többieknek azt az utasítást adja, hogy az érkezési sorszámuknak megfelelő szobát egyesével foglalják el; illetve ha az már foglalt, akkor válasszanak a szabad szobák közül egyet tetszés szerint. Hányféleképpen költözhettek be a szobákba a vendégek?*

(*4 pont*) Javasolta: *Faragó András* és *Káspári Tamás* (Paks)

I. megoldás. Azt állítjuk, hogy k matematikus 2^{k-1}-féleképpen tud beköltözni a szobákba. Ezt teljes indukcióval bizonyítjuk.

$k=1$: Egy ember egy szobába csak $1=2^0=2^{1-1}$-féleképpen költözhet be.

$k=2$: Az első ember beköltözik valamelyik szobába a kettő közül, a másodiknak már nincs választása, tehát $2=2^1=2^{2-1}$-féleképpen tudnak beköltözni.

Most tegyük fel, hogy valamely k-ig ($k\geqslant 2$) minden pozitív egészre igaz az állításunk. Megmutatjuk, hogy ekkor $(k+1)$-re is igaz, vagyis $k+1$ matematikus 2^k-féleképpen tud beköltözni a szobákba.

Ha az első ember a saját szobájába (az első számúba) megy, akkor utána mindenki a neki kijelölt szobába fog menni, tehát ez egyféle beköltözés.

Ha az első ember az n-edik szobába megy ($2\leqslant n\leqslant k+1$), akkor egészen az $(n-1)$-edik emberig mindenki más el tudja foglalni a saját szobáját. Foglalkozzunk a többi matematikussal, akiknek száma $(k+1)-(n-1)=k-n+2$. Az n-edikként érkezőnek az első foglalta el a szobáját, a többieké viszont még szabad. Vegyük észre, hogy éppen olyan helyzetben van ez a $k-n+2$ matematikus, mintha csak ők lennének a szállodában, és előttük senki sem érkezett volna. Mindenkinek megvan az előre kijelölt szobája: értelmezhető úgy, mintha az n-edik emberé lenne az 1. szoba, ő érkezne elsőnek, és neki felejtette volna el a recepciós megadni az utasítást. Vagyis ha az első ember az n-edik szobába megy ($2\leqslant n\leqslant k+1$), akkor a többiek $2^{(k-n+2)-1}$-féleképpen foglalhatják el a szobákat (az indukciós feltevés miatt).

Mivel n értéke 2 és $k+1$ között bármi lehet, így ezeket összegezve kapjuk meg, hogy $k+1$ matematikus hányféleképpen választhat szobát:

$$1+\sum_{n=2}^{k+1}2^{(k-n+2)-1}=1+\sum_{n=2}^{k+1}2^{k-n+1}=$$
$$=1+(2^{k-1}+2^{k-2}+\ldots+2^1+2^0)=1+(2^k-1)=2^k.$$

Tehát 2^{99}-féleképpen költözhetnek be a szobákba a vendégek.

Weisz Máté (Szegedi Radnóti Miklós Kís. Gimn., 10. évf.)

II. megoldás. Megvizsgálom a lehetőségek számát úgy csoportosítva, hogy hány ember nem került arra a helyre, ahova szánták:

– Ha minden ember oda került, akkor az első ember az első szobába ment, ez 1 lehetőség.

– Pontosan 1 ember nem kerülhetett rossz helyre.

– 2 ember került rossz helyre, ha az első vendég az n. szobát foglalta el ($2\leqslant n\leqslant 100$), majd az n. vendég az első szobát választotta. Ez $99=\binom{99}{1}$ lehetőség.

– 3 ember nem került jó helyre, ha az első ember elfoglalta az n. szobát ($2\leqslant n\leqslant 99$), az n. ember elfoglal egy m. szobát ($n<m\leqslant 100$), az m. ember pedig az elsőt. Ez annyi lehetőség, ahányféleképpen 2-től 100-ig 2 szobát ki tudunk választani, ahol a kisebb szám n-nek, a nagyobb m-nek felel meg, vagyis $\binom{99}{2}$ lehetőség.

– Hasonlóan gondolkodva: ha x ember került rossz helyre ($2\leqslant x\leqslant 100$), akkor a szobák közül 2-től 100-ig $x-1$ ember nincs jó helyen, hiszen $x>1$ esetén az első szobában nem az első vendég foglal helyet. A 99 szoba közül $(x-1)$-et $\binom{99}{x-1}$-féleképpen lehet kiválasztani. Minden ilyen lehetőség egyféleképpen valósulhat meg, hiszen ha sorban vesszük a „rossz" szobákat, akkor a bent lakó vendégek érkezésének sorszáma is növekvő sorrendbe kerül, mivel minden vendég csak a saját, vagy nála nagyobb sorszámú szobába mehetett, mert a többit addigra feltöltötték.

Az összes lehetőség száma tehát: $1+\binom{99}{1}+\binom{99}{2}+\binom{99}{3}+\ldots+\binom{99}{99}$.

Mivel $1=\binom{99}{0}$, így a lehetőségek száma $\binom{99}{0}+\binom{99}{1}+\binom{99}{2}+\binom{99}{3}+\ldots+$ $+\binom{99}{99}$, ami a Pascal-háromszög 100. sorában lévő számok összege. Az első sorban az összeg 1; és utána minden egyes szám az alatta lévő sorba két számhoz adódik hozzá, tehát a számok összege lefelé mindig megkétszereződik, a 100. sorban 2^{99}.

Tehát 2^{99}-féleképpen költözhettek be.

Vida Tamás (Győr, Kazinczy F. Gimn., 10. évf.)

III. megoldás. Legyen a lehetséges beköltözések száma n darab matematikus esetén C_n. Nyilvánvaló, hogy $C_1 = 1$. n matematikus esetén, ha az első matematikus az első szobába költözik be, akkor mindenki egyértelműen beköltözik az érkezésének megfelelő szobába. Ha az első matematikus beköltözik a k-adik szobába ($2 \leqslant k \leqslant n$), akkor az első utáni $k-2$ matematikus egyértelműen be tud költözni az érkezésének megfelelő szobába. A maradék $n-k+1$ matematikusnak adott az 1., $(k+1)$-edik, $(k+2)$-edik, …, n-edik szoba a beköltözésre. Ekkor tekintsük a szobaszámokat 1, 2, 3, …, $(n-k+1)$-nek. Ekkor az első matematikus tetszőleges szobába költözik be, a többi pedig a feladat szövegének megfelelően, tehát ekkor C_{n+k-1}-féleképpen tudnak beköltözni a matematikusok. Így

$$C_n = 1 + C_{n-2+1} + C_{n-3+1} + \ldots + C_{n-n+1} =$$

$$= 1 + C_{n-1} + C_{n-2} + \ldots + C_1 = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} C_i.$$

Ebből

$$C_{n-1} = 1 + \sum_{i=1}^{n-2} C_i,$$

és így

$$C_n = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} C_i = 1 + \sum_{i=1}^{n-2} C_i + C_{n-1} = 2 \cdot C_{n-1}.$$

Tudjuk, hogy $C_1 = 1$, így $C_n = 2^{n-1}$.

Ebből pedig következik, hogy 100 matematikus esetén a lehetséges beköltözések száma 2^{99}.

Győrffi Ádám György (Miskolc, Földes Ferenc Gimn., 9. évf.)

IV. megoldás. Vegyünk egy tetszőleges 100 jegyű kettes számrendszerbeli számot. Minden számjegy azt jelöli, hogy az adott ember jó szobában van-e: a 0 azt, hogy jó ember van a szobában, az 1 pedig azt, hogy nem.

Ha az első számjegy 0 (balról nézve), akkor minden számjegy 0, mert ha az első ember jó helyre ment, akkor már mindenki más is.

Ha első számjegy 1 (balról nézve), akkor ez azt jelenti, hogy az első ember nem jó szobába ment. Ha az x-edik szobába ment, akkor x és az 1 számjegy között csupa 0 van.

Ugyanígy, ha az n-edik ember az i. szobát választja (ahol $i \neq 1$ és $n > 1$), akkor $i > n$ és az n és i sorszámú számjegyek között minden szám 0 lesz. Ha az n-edik ember az 1-es szobát választja, akkor minden n feletti számjegy 0 lesz.

Olyan nem fordulhat elő, hogy az első számjegy 1 és a többi 0, mert az első ember elfoglalja valakinek a szobáját.

Ilyen módon minden ilyen kettes számrendszerbeli számból egyértelműen kiszámolható, hogy ki melyik szobába ment és fordítva: abból, hogy ki melyik szobába ment, leírható pontosan egy kettes számrendszerbeli szám.

(Pl. 100100100110100…0010: Az 1. ember a 4. szobába ment, a 4. ember a 7. szobába, a 7. ember a 10. szobába, a 10. ember a 11. szobába, a 11. ember a 13. szobába, …, a 99. ember az 1. szobába. Mindenki más a saját szobájába ment.)

Összesen tehát $2^{99}-1+1=2^{99}$ eset van.

Fraknói Ádám (Budapest, Jedlik Ányos Gimn., 11. évf.)

V. megoldás. Tekintsük a feladatot általánosan: n egy adott pozitív egész, és n matematikus érkezik a szállodába, 1-től n-ig számozott szobákba a feladatban leírt módon. Teljes indukcióval belátjuk, hogy ekkor a vendégek 2^{n-1}-féle sorrendben költözhettek be a szobákba. Ez $n=1$ esetén nyilvánvalóan igaz, hiszen 1 ember csak egyféleképp költözhet be az egyetlen szobába.

Tegyük fel, hogy egy adott n pozitív egészre beláttuk, hogy n vendég 2^{n-1}-féleképpen költözhet be a leírt módon. Ezt felhasználva számláljuk össze, hányféleképpen költözhet be $n+1$ matematikus.

Megfigyelhető, hogy az $n+1$. matematikus vagy az egyes számú, vagy az $(n+1)$-es számú szobába költözhetett be, hiszen ha az i. számú szoba $2\leqslant i\leqslant n$-re még szabad az i. matematikus érkezésekor, akkor ő ide költözik, és elfoglalja azt, tehát az $(n+1)$-edik vendég már nem költözhet ide.

Az olyan beköltözési sorrendek száma, melyekben az $n+1$. matematikus az $(n+1)$-es szobába kerül, éppen 2^{n-1}, hiszen ekkor az első n vendég beérkezési sorrendjére igaz, hogy az első vendég egy tetszőleges, 1-től n-ig számozott szobába költözött, a többi vendég pedig, ha tud, a saját sorszámával megegyező szobába, egyébként pedig egy tetszőleges, 1-től n-ig számozott szobába kerül, ami éppen az indukciós feltevésünk által megszámolt (azaz az n vendégre vonatkozó) sorrendek száma.

Most tekintsünk olyan sorrendeket, melyekben az $n+1$. matematikus az 1-es szobába kerül. Vegyünk egy ilyen sorrendet, és tegyük fel, hogy benne az i. vendég költözött az $(n+1)$-es sorszámú szobába (ahol $1\leqslant i\leqslant n$ a feltevés szerint). Tekintsük azt a sorrendet, melyben minden vendég ugyanabba a szobába kerül, kivéve az i. és az utolsó vendéget, mert ezek szobáit felcseréljük (tehát az i. vendég az 1-es szobába, az $n+1$. vendég pedig az $(n+1)$-es szobába kerül). Az így kapott sorrend továbbra is a feltételeknek megfelelő, hiszen $i\neq 1$ esetén az i. vendég az eredeti sorrendben sem az i. sorszámú szobába kerül, azaz tetszőlegesen választhat szobát, akár az elsőt is, $i=1$ esetén pedig az első vendég egyébként is tetszőlegesen választhat. Az i. vendég előtt érkezők továbbra is szabályosan költöznek be, és az utána következők is, hiszen $i<j<(n+1)$-re a j-edik vendég nem költözhet az $(n+1)$-es számú szobába, mert ekkor az $n+1$. vendégnek nem lenne helye (az 1-es és az $(n+1)$-es szoba is foglalt lenne már, ami nem lehet). Így tehát minden sorrendhez, melyben az $n+1$. matematikus az 1-es szobába kerül, rendelhető egy olyan, melyben az $(n+1)$-edikbe kerül. Ugyanez a hozzárendelés visszafelé is elvégezhető: ha az $(n+1)$-edik matematikus az $(n+1)$-edik szobába költözik, és az i-edik vendég az egyes szobába, akkor az ő szobáikat kicserélve ismét megfelelő sorrendhez jutunk. Könnyen látható, hogy ezek a hozzárendelések egymás inverzei, így azon sorrendek száma, melyekben az $n+1$. matematikus az egyes sorszámú szobába költözik, ugyanannyi, mint melyekben az $(n+1)$-es számúba, azaz 2^{n-1}. A kettőt összevetve kapjuk, hogy $n+1$ matematikus éppen $2\cdot 2^{n-1}=2^n$-féleképp költözhet be. Ezzel az indukciós lépést beláttuk.

Az eredményt $n=100$ esetén alkalmazva kapjuk, hogy 100 matematikus 2^{99}-féleképp költözhet be.

Schrettner Jakab (Szegedi Radnóti Miklós Kís. Gimn., 11. évf.)

97 dolgozat érkezett. 4 pontos 52, 3 pontos 30, 2 pontos 10, 1 pontos 5 dolgozat.

B. 4980. *Legyen $n>3$ pozitív egész, $a_1,a_2,\ldots,a_n$ pedig pozitív valós számok. Igazoljuk, hogy*

$$1<\frac{a_1}{a_n+a_1+a_2}+\frac{a_2}{a_1+a_2+a_3}+\ldots+\frac{a_n}{a_{n-1}+a_n+a_1}<\left[\frac{n}{2}\right]$$

és az egyenlőtlenség bal oldala nem cserélhető nagyobb, a jobb oldala pedig kisebb számra (ahol $[x]$ az x szám egész részét jelenti).

(*6 pont*)

Megoldás. Könnyen látható, hogy $a_i=\frac{1}{n^i}$ és $n\to\infty$ esetén, ha $i\ne 1$, akkor $\frac{a_i}{a_{i-1}+a_i+a_{i+1}}$ határértéke 0 lesz, $\frac{a_1}{a_n+a_1+a_2}$ határértéke pedig 1, ezért a teljes összeg 1-hez konvergál. Az is látszik, hogy ha minden $a_{2k+1}=0$, és minden $a_{2k}=1$ lenne, akkor az összeg éppen $\frac{n}{2}$ egész része lenne; azonban az a_i számok előírt pozitivitása miatt $a_{2k+1}=0$ helyett az $a_{2k+1}\to 0$ esetet vizsgáljuk: ilyenkor az összeg tetszőlegesen közelíti az $\frac{n}{2}$ egész részét. Ezzel a feladat második részének két követelményét igazoltuk.

Rátérünk a két egyenlőtlenség bizonyítására.

Az 1 *szigorú alsó korlát:* $n=3$ esetén a három tag összege $\frac{a_1+a_2+a_3}{a_1+a_2+a_3}=1$. Beláttjuk, hogy ha minden $a_1,\ldots,a_n$ pozitív szám n-esre az összeg 1-nél nagyobb, akkor ez minden pozitív $a_1,\ldots,a_{n+1}$ szám $n+1$-esre is teljesül. Legyen a_i az $a_1,\ldots,a_{n+1}$ számok közül a(z egyik) legkisebb; ekkor speciálisan $a_i\leqslant a_{i-1}$ és $a_i\leqslant a_{i+1}$. Tekintsük azt a szám n-est, amelyet az $a_1,\ldots,a_{n+1}$ számokból az a_i elhagyásával kapunk. Az ehhez a szám n-eshez tartozó összeget az $a_1,\ldots,a_{n+1}$-hez tartozó összegből kivonva a különbség:

$$\frac{a_{i-1}}{a_{i-2}+a_{i-1}+a_i}+\frac{a_i}{a_{i-1}+a_i+a_{i+1}}+\frac{a_{i+1}}{a_i+a_{i+1}+a_{i+2}}-$$

$$-\frac{a_{i-1}}{a_{i-2}+a_{i-1}+a_{i+1}}-\frac{a_{i+1}}{a_{i-1}+a_{i+1}+a_{i+2}}=$$

$$=\left(\frac{a_{i-1}}{a_{i-2}+a_{i-1}+a_i}-\frac{a_{i-1}}{a_{i-2}+a_{i-1}+a_{i+1}}\right)+$$

$$+\left(\frac{a_{i+1}}{a_i+a_{i+1}+a_{i+2}}-\frac{a_{i+1}}{a_{i-1}+a_{i+1}+a_{i+2}}\right)+\frac{a_i}{a_{i-1}+a_i+a_{i+1}}.$$

Itt az első különbség $a_i \leqslant a_{i+1}$, a második pedig $a_i \leqslant a_{i-1}$ miatt nemnegatív, az utolsó tag pedig az a_k számok pozitív voltából adódóan pozitív, tehát az $n+1$ számhoz tartozó összeg nagyobb, mint az a_i elhagyásával kapott n számhoz tartozó összeg; ezzel az első egyenlőtlenséget az n szerinti indukcióval beláttuk.

Az $\left[\frac{n}{2}\right]$ *szigorú felső korlát:* Bármely két szomszédos tag összege legfeljebb 1, hiszen

$$\frac{a_i}{a_{i-1}+a_i+a_{i+1}}+\frac{a_{i+1}}{a_i+a_{i+1}+a_{i+2}}<\frac{a_i+a_{i+1}}{a_i+a_{i+1}}=1.$$

Tehát páros n-re kettesével összepárosítva a tagokat, éppen a kívánt állítást kapjuk.

Páratlan n-re indukcióval bizonyítunk; $n=3$ esetén a három tag összege, mint korábban láttuk, $1=\left[\frac{3}{2}\right]$.

Tegyük föl ezután, hogy az egyenlőtlenség bármely $n-2=2k+1$ szám esetén fennáll, és tekintsünk $n=2k+3$ pozitív számot. Ha létezik köztük a_i, a_{i-1} úgy, hogy $a_{i-1} \geqslant a_{i+1}$ és $a_i \geqslant a_{i-2}$, akkor őket elhagyva, a kapott $n-2$ tagú sorozathoz tartozó összeget jelölje $S(n-2)$, az n számból álló sorozathoz tartozó összeget pedig $S(n)$. Ekkor

$$\begin{aligned}S(n)=S(n-2)&-\left(\frac{a_{i-2}}{a_{i-3}+a_{i-2}+a_{i+1}}-\frac{a_{i-2}}{a_{i-3}+a_{i-2}+a_{i-1}}\right)-\\&-\left(\frac{a_{i+1}}{a_{i-2}+a_{i+1}+a_{i+2}}-\frac{a_{i+1}}{a_i+a_{i+1}+a_{i+2}}\right)+\\&+\frac{a_{i-1}}{a_{i-2}+a_{i-1}+a_i}+\frac{a_i}{a_{i-1}+a_i+a_{i+1}}\leqslant\\&\leqslant S(n-2)+\frac{a_{i-1}}{a_{i-2}+a_{i-1}+a_i}+\frac{a_i}{a_{i-1}+a_i+a_{i+1}}\leqslant\\&\leqslant S(n-2)+\frac{a_{i-1}}{a_{i-1}+a_i}+\frac{a_i}{a_{i-1}+a_i}=S(n-2)+1,\end{aligned}$$

ami az indukciós feltevés szerint kisebb, mint $\left[\frac{n-2}{2}\right]+1\leqslant\left[\frac{n}{2}\right]$. Így az állítás minden pozitív szám n-esre is igaz.

Végül, a megfelelő, $a_{i-1} \geqslant a_{i+1}$ és $a_i \geqslant a_{i-2}$ feltételeket kielégítő a_i, a_{i-1} pár megtalálásához válasszuk a_i-nek a számok legnagyobbikát; ekkor speciálisan $a_i \geqslant a_{i-2}$. Ha ezen kívül $a_{i-1} \geqslant a_{i+1}$ is teljesül, akkor az a_i, a_{i-1} pár megfelelő. Ellenkező esetben $a_{i+1} > a_{i-1}$, akkor viszont az a_{i+1}, a_i pár felel meg.

Szabó Kornél (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.)

39 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott 13 versenyző: Argay Zsolt, Biczó Benedek, Dékány Barnabás, Dobák Dániel, Füredi Erik Benjámin, Győrffi Ádám György, Győrffy Ágoston, Hegedűs Dániel, Kerekes Anna, Nagy Nándor, Szabó Kornél, Telek Zsigmond, Weisz Máté. 5 pontos 7, 4 pontos 3, 3 pontos 7, 2 pontos 3, 0 pontos 3 dolgozat. Nem versenyszerű: 3 dolgozat.