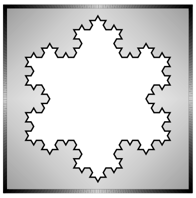
Meg kell oldanunk a $3^{-n+3} < \frac{1}{2019}$ egyenlőtlenséget. Mindkét oldal tízes alapú logaritmusát véve adódik, hogy $n > 9{,}93$, tehát $n \geqslant 10$. A sorozat azon tagjai kisebbek $\frac{1}{2019}$-nél, amelyeknek indexe legalább 10. Ezek az elemek egy mértani sorozat tagjai, a belőlük képzett mértani sor konvergens és összege:

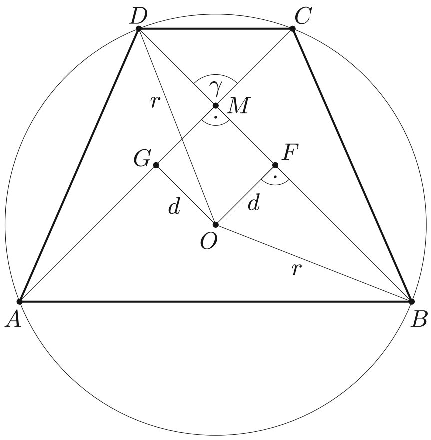
$$\sum_{n=10}^{\infty} 3^{-n+3} = 3^{-7} + 3^{-8} + \ldots = \frac{3^{-7}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{1458}.$$

**Fridrik Richárd**
**Magister Universitas**
**Matematika Szekció**
Szeged



## C gyakorlatok megoldása

**C. 1452.** *Egy* 13 cm *sugarú körbe írható trapézról tudjuk, hogy átlói a kör középpontjától* 5 cm*-re helyezkednek el. Legfeljebb mekkora lehet a trapéz területe?*




*1. ábra*

**I. megoldás.** Használjuk az *1. ábra* jelöléseit és legyen a $BD$ átló felezőpontja az $F$, az $AC$ átlóé a $G$ pont, az átlók metszéspontja $M$, végül $DMC\sphericalangle = \gamma$. A kör sugara $r = 13$ cm, az átlók távolsága a kör középpontjától $OF = OG = d = 5$ cm.

A trapéz átlói a körben húrok. A húr felező merőlegese átmegy a középponton, így $OFB\sphericalangle = 90°$. A Pitagorasz-tételt felírva az $OFB$ derékszögű háromszögben:

$$BF = \sqrt{r^2 - d^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} =$$

$$= \sqrt{144} = 12 \text{ cm},$$

ebből pedig

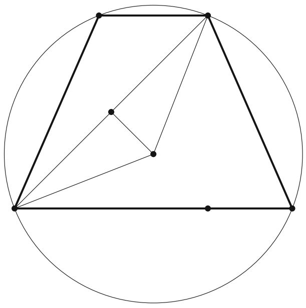
$$AC = BD = 2BF = 24 \text{ cm}.$$

A trapéz területe tehát:

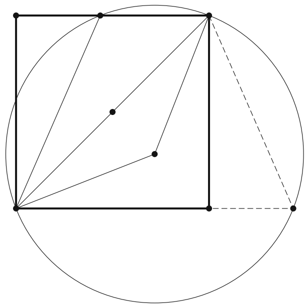
$$T = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD \cdot \sin\gamma = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 24 \cdot \sin\gamma = 288 \cdot \sin\gamma.$$

Mivel $\sin\gamma$ értéke legfeljebb 1, ezért a terület akkor maximális, ha $\sin\gamma = 1$, vagyis $\gamma = 90°$. Ekkor a terület: $T_{\max} = 288\ \text{cm}^2$.

**II. megoldás.** A kör sugara 13 cm, a kör középpontjától a húrnégyszög átlói 5 cm távol vannak. Rajzoljuk be az egyik átlót, és a végpontjait kössük össze a kör középpontjával (*2. ábra*) Az így keletkezett két vonal egyenlő hosszú, hiszen mindkettő a kör sugara, tehát az átlóval egy egyenlő szárú háromszöget alkotnak. A háromszöget felezzük el az alapjával szemközti csúcsból húzott magassággal. Az így kapott háromszögek derékszögűek, hiszen két oldaluk merőleges egymásra, és egybevágók, mivel oldalaik páronként egyenlő hosszúak. Egy ilyen derékszögű háromszög egyik befogója a kör középpontjának és a húrnégyszög egyik átlójának távolsága, tehát 5 cm hosszú, a befogója a kör sugara, tehát 13 cm hosszú, így a másik befogó, ami az átló fele, a Pitagorasz-tételből számolható: 12 cm hosszú.



*2. ábra*



*3. ábra*

Egy húrnégyszög átlói egyenlő hosszúak, tehát a húrnégyszög mindkét átlója 24 cm hosszú. A húrnégyszög átdarabolható egy olyan téglalappá, amelynek egyik átlója megegyezik a húrnégyszög egyik átlójával (*3. ábra*).

Egy téglalap két szomszédos oldalára és egy átlójára szintén felírható a Pitagorasz-tétel, mely szerint a két szomszédos oldal hosszának négyzetösszege egyenlő az átfogó hosszának négyzetével. Ugyanezen két oldal hosszának szorzata egyenlő a téglalap, és így a húrnégyszög területével is. A két oldalt $a$-val és $b$-vel jelölve írjuk fel a mértani és a négyzetes közepek közötti egyenlőtlenséget:

$$\sqrt{ab} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = \frac{24}{\sqrt{2}},$$

$$ab \leqslant \frac{24^2}{2}.$$

Az egyenlőtlenség szerint két adott négyzetösszegű szám szorzata akkor a legnagyobb, ha a két szám egyenlő, tehát a maximális területű téglalapban a két szomszédos oldal egyenlő hosszú, vagyis a téglalap négyzet. Egy négyzet területe az átlók szorzatának fele, esetünkben $\frac{24^2}{2} = 288\ \mathrm{cm}^2$.

Tehát a húrnégyszög területének maximális értéke 288 cm$^2$.

*Czett Mátyás* (Zalaegerszegi Zrínyi Miklós Gimn., 10. évf.)

102 dolgozat érkezett. 5 pontos 63, 4 pontos 1, 3 pontos 10, 2 pontos 12, 1 pontos 6, 0 pontos 6 dolgozat. Nem versenyszerű: 4 dolgozat.

**C. 1462.** *Egy számtani sorozat első tagja $a_1 = 3$, differenciája 9. Bizonyítsuk be, hogy a sorozat tagjai között minden természetes $k$ szám esetén szerepel $3\cdot 4^k$.*

**I. megoldás.**

$$3\cdot 4^k = 3(3+1)^k = 3\left(3^k + \binom{k}{1}3^{k-1} + \binom{k}{2}3^{k-2} + \ldots + \binom{k}{k-1}3^1 + 1\right) =$$

$$= 3(3n+1) = 9n+3$$

(mivel a $3^k$, $3^{k-1}$, $3^{k-2}$, ..., $3^1$ számok mindegyike osztható 3-mal, ezért az összeg is osztható 3-mal, így felírható $3n$ alakban, ahol $n$ természetes szám).

A számtani sorozat elemei $a_m = 3 + 9(m-1)$ alakúak. A sorozat tartalmaz minden olyan természetes számot, amely 9-cel osztva 3-at ad maradékul, tehát az összes $3\cdot 4^k$ alakú számot is, hiszen azok is 9-cel osztva 3 maradékot adnak.

*Bérczi Péter* (Szegedi Deák Ferenc Gimn., 9. évf.)

*Megjegyzés.* Több megoldó felismerte, hogy $(a_m)$ minden tagja 9-cel osztva 3-at ad maradékul, és ebből következtetett arra, hogy ha $3\cdot 4^k$ is ilyen alakú minden $k$-ra, akkor kész az állítás bizonyítása. Ez így viszont nem igaz. A megállapítás akkor helyes, ha a megoldó azt veszi észre, hogy $a_m$ *minden* olyan pozitív egész számot tartalmaz, mely 9-cel osztva 3-at ad maradékul. Ebből már következik, hogy ha $3\cdot 4^k$ is ilyen alakú, akkor minden $k$-ra tagja a sorozatnak.

**II. megoldás.** $a_1 = 3$, $d = 9$: a sorozat tagjai $3 + 9n$ alakúak, ahol $n$ természetes szám. Belátjuk, hogy minden $k$ esetén van megfelelő $n$.

$$\begin{aligned} 3\cdot 4^k &= 3+9n,\\ 3\cdot 4^k &= 3(3n+1),\\ 4^k &= 3n+1,\\ 4^k - 1 &= 3n,\\ (2^k+1)(2^k-1) &= 3n. \end{aligned}$$

Ha $k$ páratlan, akkor a $(2^k+1)$ tényezőből, ha pedig páros, akkor a $(2^k-1) = \left(2^{2m}-1\right) = (4^m-1)$ tényezőből emelhető ki a 3, tehát a két tényező szorzata mindig osztható 3-mal, és így bármely $k$ esetén van megfelelő $n$ természetes szám.

*Német Franciska* (Békásmegyeri Veres Péter Gimn., 10. évf.)

**III. megoldás.** A számtani sorozat első tagja $a_1 = 3$, differenciája $d = 9$, általános tagja $a_n = 3 + (n-1)\cdot 9$. A sorozat első hat tagja: 3; 12; 21; 30; 39; 48. Teljes indukcióval bizonyítunk. Ha $k = 0$, akkor $3\cdot 4^0 = 3$; ha $k = 1$, akkor $3\cdot 4^1 = 12$, ha $k = 2$, akkor $3\cdot 4^2 = 48$ – vagyis ezekben az esetekben igaz az állítás.

Most belátjuk, hogy ha $3\cdot 4^k$ tagja a sorozatnak, akkor $3\cdot 4^{k+1}$ is tagja.

$$3\cdot 4^{k+1} - 3\cdot 4^k = 3\cdot 4^k(4-1) = 3\cdot 4^k\cdot 3 = 9\cdot 4^k.$$

Mivel $3\cdot 4^{k+1}$ és $3\cdot 4^k$ különbsége 9 többszöröse, ezért ha $3\cdot 4^k$ tagja a fenti sorozatnak, akkor $3\cdot 4^{k+1}$ is tagja.

Tehát minden $k$-ra teljesül, hogy $3\cdot 4^k$ tagja az $a_n=3+(n-1)\cdot 9$ sorozatnak.

*Szalontai Kinga Sára* (Budapest, Deák Téri Evangélikus Gimn., 10. évf.)

100 dolgozat érkezett. 5 pontos 57, 4 pontos 18, 3 pontos 11, 2 pontos 3, 1 pontos 8, 0 pontos 3 dolgozat.

**C. 1482.** *Igazoljuk, hogy*

$$\left|2\sin x+\sin(2x)\right|<\frac{3+2\sqrt{2}}{2}.$$

**I. megoldás.** Belátjuk, hogy a függvény maximuma $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. Ez kisebb, mint $\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$, ugyanis a nevezők elhagyása után a számlálókat négyzetre emelve a bal oldal 27, a jobb oldal $17+12\sqrt{2}$, ami legalább 29, lévén $\sqrt{2}$ nagyobb, mint 1. (A két szám kerekítve 2,60 és 2,91. )

A szinusz-függvény kétszeres szögekre vonatkozó szabálya szerint $\sin(2x)= =2\sin x\cos x$, tehát a bal oldalon az abszolútértéken belüli kifejezés így is felírható:

$$2\sin x+2\sin x\cos x=2\sin x(\cos x+1). \tag{1}$$

Mivel az eredeti egyenlőtlenségben mindkét oldal nemnegatív, a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás:

$$4\sin^2 x(\cos x+1)^2\leqslant\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{27}{4}. \tag{2}$$

Mint ismeretes, minden $x$ valós szám esetén $\sin^2 x+\cos^2 x=1$. Tehát $\sin^2 x= =1-\cos^2 x=(1-\cos x)(1+\cos x)$, amit (2) bal oldalába beírva (4-gyel való osztás után):

$$(1-\cos x)(1+\cos x)(\cos x+1)^2\leqslant\frac{27}{16},$$

$$(1-\cos x)(\cos x+1)^3\leqslant\frac{27}{16}.$$

Mindkét oldalt 3-mal szorozva:

$$(3-3\cos x)(\cos x+1)^3\leqslant\frac{81}{16}. \tag{3}$$

A bal oldali négytényezős szorzatban minden tényező nemnegatív, mert $\cos x$ minimuma $-1$. Ezért felírható a számtani-mértani közepek közötti egyenlőtlenség négytényezős alakja:

$$\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}\leqslant\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4},$$

amit negyedik hatványra emelve így is írhatunk:

$$a_1a_2a_3a_4 \leqslant \left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}\right)^4.$$

Ha a négy tényezőnek a (3) bal oldalán szereplő dolgokat vesszük, akkor azok összege éppen 6, ugyanis a $-3\cos x$ és a 3 darab $\cos x$ kiejti egymást. A jobb oldalon ekkor ennek negyede, azaz $\frac{3}{2}$ szerepel a zárójelben, aminek a negyedik hatványa valóban $\frac{81}{16}$. Ezzel az állítást beláttuk, tehát egy erősebb felső korlátot adtunk a kifejezésnek.

Egyenlőség lehet (3)-ban, mégpedig akkor, ha $3-3\cos x=\cos x+1$, azaz $\cos x=\frac{1}{2}$. Ekkor visszaírva, az (1)-beli kifejezés értéke valóban

$$2\cdot\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{\pm3\sqrt{3}}{2}$$

szerepel (attól függően, hogy a $\sin x$ a $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ közül melyik értéket veszi fel, de az abszolútérték miatt ez ugyanezt a szélsőértéket adja).

*Nyitrai Boglárka* (Brüsszel, European School, 11. évf.)

**II. megoldás.** Legyen $f(x)=2\sin x+\sin(2x)$. Ennek ott lehet szélsőértéke, ahol a deriváltja 0:

$$\begin{aligned} f'(x)=2\cos x+\cos(2x)\cdot 2&=0,\\ \cos x+\cos(2x)&=0,\\ \cos(2x)&=-\cos x,\\ \cos(2x)&=\cos(\pi-x). \end{aligned}$$

Vagyis $2x=\pi-x+k\cdot2\pi$ (ahol $k\in\mathbb{Z}$), vagy pedig $2x=x-\pi+l\cdot2\pi$ (ahol $l\in\mathbb{Z}$). Az első esetben $x=\frac{\pi}{3}+k\cdot\frac{2\pi}{3}$, a másodikban pedig $x=-\pi+l\cdot2\pi$. Ez utóbbi megoldáshalmazt tartalmazza az előbbi, így külön vizsgálni szükségtelen.

Mivel a koszinusz függvény értékeit periodikusan veszi föl, periódusa pedig $\omega=2\pi$, így elég a $[0;2\pi)$ intervallumon táblázatot készíteni.

| $x\in$ | $\left[0;\frac{\pi}{3}\right)$ | $\left\{\frac{\pi}{3}\right\}$ | $\left(\frac{\pi}{3};\pi\right)$ | $\{\pi\}$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 |
| $f'(x)$ | $\nearrow$ | lokális maximum | $\searrow$ | inflexiós pont |
| $x\in$ | $\left(\pi;\frac{5\pi}{3}\right)$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $\left(\frac{5\pi}{3};2\pi\right)$ | |
| $f(x)$ | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f'(x)$ | $\searrow$ | lokális minimum | $\nearrow$ | |

Tehát $f(x)$ maximális csak $\left(\frac{\pi}{3}+m\cdot 2\pi\right)$-nél, minimális csak $\left(\frac{5\pi}{3}+n\cdot 2\pi\right)$-nél lehet (ahol $m,n\in\mathbb{Z}$).

$$f\left(\frac{\pi}{3}+m\cdot 2\pi\right)=f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\frac{\pi}{3}+\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2},$$

$$f\left(\frac{5\pi}{3}+n\cdot 2\pi\right)=f\left(\frac{5\pi}{3}\right)=2\sin\frac{5\pi}{3}+\sin\left(2\cdot\frac{5\pi}{3}\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Mivel $\frac{3\sqrt{3}}{2}\approx 2{,}598$ és $\frac{3+2\sqrt{2}}{2}\approx 2{,}914$, így $\left|f(x)\right|\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}<\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$, vagyis

$$\left|2\sin x+\sin(2x)\right|<\frac{3+2\sqrt{2}}{2},$$

és pontosan ezt szerettük volna belátni.

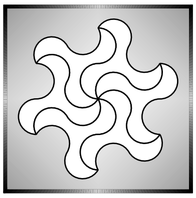
*Spányik Teodor* (Budapest, Képző- és Iparművészeti Szakgimn. és Koll., 12. évf.)

*Megjegyzések.* 1. A leggyakoribb hiba az volt, hogy a megoldó feltette, hogy a bal oldali két tagú összeg akkor maximális, ha valamelyik tag maximális (azaz azt a két esetet vizsgálta meg, amikor $2\sin x$ maximális vagy $\sin(2x)$ maximális).

2. Sok helyen hiányzott a kiszámolt szélsőértékek és a jobb oldali szám értéke közötti egyenlőtlenség igazolása.

32 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 12 versenyző: Agócs Katinka, Ajtai Boglárka, Almási Adél Csilla, Bukor Benedek, Debreczeni Tibor, Jankovits András, Molnár István, Németh Csilla Márta, Nyitrai Boglárka, Spányik Teodor, Surján Anett, Szécsi Adél Lilla. 4 pontos 7, 3 pontos 1, 1 pontos 11, 0 pontos 1 dolgozat.

## Matematika feladatok megoldása



**B. 4915.** *Adottak az $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$, $A_5$ és $P$ általános helyzetű pontok a síkon. Jelölje $k_i$ azt a számot, ahányféleképpen az $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$, $A_5$ pontok közül kiválasztható $i$ darab úgy, hogy a kiválasztott pontok konvex burka tartalmazza $P$-t. Mutassuk meg, hogy $k_3=k_4$.*

(*5 pont*)

**Megoldás.** Jelölje $h^{A_i}$ $(i=1,2,3,4,5)$ azon háromszögek számát, amelyeknek minden csúcsa az $\{A_1,A_2,A_3,A_4,A_5\}\setminus\{A_i\}$ pontok valamelyike, és tartalmazzák $P$-t. Így minden $P$-t tartalmazó háromszöget pontosan kettő $h^{A_i}$-ben számolunk meg, pl. ha $P\in A_1A_2A_3\triangle$, akkor az $A_1A_2A_3\triangle$-et megszámoltunk $h^{A_4}$ és $h^{A_5}$ kiszámítása közben. Következésképpen $k_3=\left(h^{A_1}+\ldots+h^{A_5}\right)/2$.