a) A *2. ábrán* a híd vázlatos oldalnézetét látjuk. Határozzuk meg a híd görbéjéhez tartozó két paraméter értékét 3 tizedesjegyre kerekítve (a talajszintet tekintsük az x-tengelynek.)

b) Határozzuk meg, hogy az A pontban a híd milyen szöget zár be a vízszintessel.

c) Reklámfelülelet szeretnének felszerelni a híd egyik oldalára úgy, hogy a felülelet a talajszint, a híd és a két fa zárja közre. Mekkora felület keletkezik így? (*16 pont*)

9. *a*) Hány osztója van a $2018\cdot 2019$, illetve a 2018^{2019} számnak?

b) Mennyi az egyik, illetve a másik szám osztóinak az összege?

c) Bizonyítsuk be, hogy 2018^{2019} legalább $3\cdot 2019$ számjegyből áll.

d) Melyik nagyobb: 2018^{2019} vagy 2019^{2018}? (*16 pont*)

Ratkó Éva
Budapest
(zömmel német érettségi feladatokból válogatva)

Megoldásvázlatok a 2019/1. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

A Magister Universitas érettségi felkészítő az 2000-es évek eleje óta működik. Jelenleg három városban lehetséges felkészítő tanfolyamainkra jelentkezni: Budapesten, Szegeden és Debrecenben. Matematika, fizika, kémia, biológia, történelem, magyar és angol tantárgyból készítünk fel diákokat az érettségire emelt- és középszinten is. Diákjainknak saját tanáraink által kifejlesztett és gondosan szerkesztett tananyagainkkal könnyítjük meg az érettségire való felkészülést. Jelentkezni a `https://erettsegi-felkeszito.hu/` oldalon tudtok. Még idén is érdemes becsatlakozni intenzív tanfolyamainkra. Aki jövőre vagy később érettségizik a fenti tárgyak akármelyikéből, szívesen látjuk érettségi felkészítőinken. Ne maradjatok le!

I. rész

1. *Kilencjegyű pozitív egész számokat képezünk úgy, hogy a képzett számban szereplő számjegy annyiszor fordul elő, amekkora a számjegy. Hány ilyen kilencjegyű szám képezhető?* (*11 pont*)

Megoldás. A szám számjegyei között nem szerepelhet a 0. A lehetséges eseteket aszerint soroljuk fel, hogy mi a legnagyobb számjegy, ami a felírt kilencjegyű számban szerepelni fog.

1. eset: 9 darab 9-es jegy. Ebből 1 darab kilencjegyű szám van.

2. eset: 8 darab 8-as, 1 darab 1-es jegy. Ezekből 9 szám képezhető.

3. eset: 7 darab 7-es, 2 darab 2-es jegy. Ezekből a számjegyekből $\binom{9}{2} = 36$ szám képezhető.

4. eset: 6 darab 6-os, 3 darab 3-as jegy. Ezekből $\binom{9}{3} = 84$ szám képezhető.

5. eset: 6 darab 6-os, 2 darab 2-es, 1 darab 1-es jegy. Ezekből $\frac{9!}{6!\cdot 2!} = 252$ szám van.

6. eset: 5 darab 5-ös, 4 darab 4-es jegy. Ezekből $\binom{9}{4} = 126$ szám képezhető.

7. eset: 5 darab 5-ös, 3 darab 3-as, 1 darab 1-es jegy. Ezekből $\frac{9!}{5!\cdot 3!} = 504$ szám van.

8. eset: 4 darab 4-es, 3 darab 3-as, 2 darab 2-es jegy. Ezekből $\frac{9!}{4!\cdot 3!\cdot 2!} = 1260$ szám van.

Tehát összesen 2272 darab kilencjegyű szám képezhető, amely a feladat feltételeit kielégíti.

2. *Tekintsük a következő állításokat:*

A : *Ha egy függvény periodikus, akkor van legkisebb periódusa (alapperiódusa).*

B : *Létezik olyan* 10 *csúccsal rendelkező gráf, melynek fokszámai egy növekvő számtani sorozat egymást követő tagjait alkotják.*

C : *Ha* a_n *és* b_n *korlátos sorozatok, akkor* a_nb_n *is korlátos.*

a) Döntsük el, hogy igazak vagy hamisak az állítások. Válaszainkat indokoljuk. (*8 pont*)

b) Fogalmazzuk meg a C *állítás megfordítását. Döntsük el, hogy igaz vagy hamis az állítás megfordítása. Válaszunkat indokoljuk.* (*4 pont*)

Megoldás. *a*) Az A állítás hamis, mert pl. az $f(x) = 5$ függvény periodikus, de nincs legkisebb periódusa.

A B állítás igaz, pl. a tízpontú gráf csúcsai rendelkezzenek rendre $1; 2; \ldots; 10$ hurokéllel. Ekkor a csúcsok fokszámai rendre $2; 4; \ldots; 20$, ami növekvő számtani sorozat.

A C állítás igaz, mert ha a_n és b_n korlátos sorozatok, akkor megadhatók olyan $k; K > 0$ számok, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $|a_n| < k$ és $|b_n| < K$. Innen adódik, hogy $|a_nb_n| < k \cdot K$, tehát a_nb_n korlátos.

Megjegyzések. Az A állításhoz jó ellenpélda még pl. az ún. Dirichlet függvény, $f : \mathbb{R} \to \{0; 1\}$, $f(x) = 0$, ha $x \in \mathbb{Q}$ és $f(x) = 1$, ha $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Ez a függvény bármely $p \in \mathbb{Q}^+$ szerint periodikus, de nincs alapperiódusa, mert nincs legkisebb pozitív racionális szám.

Ha a B állításnál megköveteljük, hogy a gráf legyen egyszerű, akkor már nem tudunk a feltételeknek megfelelő gráfot megadni. Ennek oka az, hogy egy adott csúcs fokszáma a $0; 1; 2; \ldots; 9$ értékek közül kerül ki, de a 0 és 9 együtt nem szerepelhet a fokszámok között, tehát a skatulya-elv miatt lesz két azonos fokszáma a gráfnak. Ha lesz két azonos fokszám, akkor a fokszámok nem alkothatnak növekvő számtani sorozatot.

b) A *C* állítás megfordítása: Ha az $a_n b_n$ sorozat korlátos, akkor az a_n és b_n is korlátos sorozatok. Ez hamis állítás, ugyanis legyen $a_n = n$ és $b_n = \frac{1}{n}$. Ekkor $a_n b_n = 1$, ami nyilván korlátos, de a_n nem korlátos.

3. *Tekintsük az ABC háromszöget, ahol* $A(0;1)$, $B(3;4)$ *és* $C(4;-3)$.

a) *Határozzuk meg a háromszög szögeinek nagyságát.* (*4 pont*)

b) *Írjuk fel a háromszög köré írt kör egyenletét.* (*3 pont*)

c) *Határozzuk meg a háromszögbe írható kör sugarának pontos értékét.* (*3 pont*)

d) *Számítsuk ki annak a pontnak a koordinátáit, amelyben a B-ből induló belső szögfelező metszi a szemközti oldalt.* (*4 pont*)

Megoldás. *a*) Először kiszámoljuk a háromszög oldalainak hosszát: $AB = 3\sqrt{2}$; $AC = 4\sqrt{2}$; $BC = 5\sqrt{2}$. Mivel $AB^2 + AC^2 = BC^2$, ezért Püthagorasz tételének megfordítása miatt $\alpha = 90°$.

A hegyesszögeket szögfüggvénnyel számoljuk ki, $\operatorname{tg}\beta = \frac{AC}{AB} = \frac{4}{3}$, innen $\beta \approx 53{,}13°$ és $\gamma = 90° - \beta \approx 36{,}87°$.

b) Mivel a háromszög derékszögű, ezért köré írt körének középpontja az átfogó felezőpontjával egyezik meg és a sugara az átfogó fele. Az átfogó felezőpontja $F\left(\frac{7}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Az átfogó hossza $5\sqrt{2}$, így a köré írt kör sugara $\frac{5\sqrt{2}}{2}$. Tehát a köré írt kör egyenlete $\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{50}{4}$ vagy más alakban $x^2 + y^2 - 7x - y = 0$.

Megjegyzés. A köré írt kör középpontját meghatározhattuk volna az oldalfelező merőlegesek metszeteként is, viszont ez jelenleg nem praktikus, mert a háromszög derékszögű.

c) Használjuk az $r = \frac{T}{s}$ képletet. A terület $T = \frac{3\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{2}}{2} = 12$, a kerület fele pedig $6\sqrt{2}$. Innen $r = \sqrt{2}$ adódik.

Megjegyzés. Derékszögű háromszög lévén az ismert $r = \frac{AB+AC-BC}{2} = \sqrt{2}$ alapján is megkaphatjuk a beírt kör sugarát.

d) Jelöljük *L*-lel azt a pontot, ahol a *B*-ből induló belső szögfelező metszi az *AC* oldalt. A szögfelezőtétel szerint $\frac{AL}{LC} = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{5}$, azaz az *L* pont az *AC* szakaszt $3:5$ arányban osztja ketté. Így *L* koordinátáti: $L\left(\frac{3\cdot 4+5\cdot 0}{8}; \frac{3\cdot(-3)+5\cdot 1}{8}\right) = \left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

4. *a*) *Adjuk meg a következő kifejezés értelmezési tartományát:*

$$\log_{x+2-6x^2}\left(\frac{3-5x}{2x+4}\right). \qquad (10\ pont)$$

b) *Határozzuk meg az A; B; C kijelentések logikai értékét, ha tudjuk, hogy az alábbi állítás logikai értéke hamis.*

$$(A \leftrightarrow B) \to (B \vee C). \qquad (4\ pont)$$

Megoldás. *a*) A $\log_a b$ kifejezés akkor van értelmezve, ha $a>0$; $a\neq 1$; $b>0$. Tehát $x+2-6x^2>0$, továbbá $x+2-6x^2\neq 1$ és $\frac{3-5x}{2x+4}>0$. A másodfokú egyenlőtlenség megoldása $x\in\left]-\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right[$, mivel az egyenlőtlenségből képzett $x+2-6x^2=0$ egyenlet gyökei $x_1=-\frac{1}{2}$ és $x_2=\frac{2}{3}$ és a parabola lefelé nyíló. Mivel $x+2-6x^2\neq 1$, ezért $x\neq-\frac{1}{3}$ és $x\neq\frac{1}{2}$.

A törtes egyenlőtlenség megoldása $x\in\left]-2;\frac{3}{5}\right[$, ugyanis

$$\frac{3-5x}{2x+4}>0\leftrightarrow\big((3-5x>0)\wedge(2x+4>0)\big)\vee\big((3-5x<0)\wedge(2x+4<0)\big).$$

Mindezeket egybevetve kapjuk, hogy a kifejezés értelmezési tartománya

$$\left]-\frac{1}{2};\frac{3}{5}\right]\setminus\left\{-\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right\}.$$

b) Az $(A\leftrightarrow B)\to(B\vee C)$ kijelentés pontosan akkor hamis, ha előtagja igaz és utótagja hamis, tehát $A\leftrightarrow B=i$ és $B\vee C=h$. Mivel a $B\vee C$ kijelentés logikai értéke hamis, ezért B és C is hamisak. Tudjuk, hogy $A\leftrightarrow B=i$, így A és B logikai értékének meg kell egyeznie. Mivel B hamis volt, ezért A is hamis. Tehát a fenti kijelentés akkor hamis, ha A; B; C is hamisak.

Megjegyzés. A feladatot megoldhattuk volna igazságtáblázat felírásával is.

II. rész

5. *a*) *Egy négypontú üres gráfba berajzolunk három élt úgy, hogy a gráf egyszerű legyen. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az így kapott gráf összefüggő lesz?* (*5 pont*)

b) *Hány négy hosszú kört tartalmaz egy tízpontú teljes gráf?* (*4 pont*)

Egy angolos nyelvi csoportban, ahol öt fiú és öt lány tanul, minden óra elején szódolgozatot írat a tanárnő. A szódolgozatot mindig öt tanuló írja meg úgy, hogy tanáruk egymástól függetlenül, egyenlő valószínűséggel választja ki a tanulókat.

c) *Mennyi annak a valószínűsége, hogy a dolgozatot író tanulók között a fiúk és a lányok számának eltérése legfeljebb* 2? (*3 pont*)

d) *Mennyi annak a valószínűsége, hogy öt egymást követő szódolgozatnál az ötödik lesz az első olyan, ahol teljesül, hogy a dolgozatot író diákok számának eltérése legfeljebb* 2?

Eredményeinket tízezredekre kerekítve adjuk meg. (*4 pont*)

Megoldás. *a*) A kérdezett esemény komplementerének valószínűségét határozzuk meg. Egy négypontú teljes gráfnak $\binom{4}{2}=6$ éle van. Ebből jelölünk ki hármat, ezt $\binom{6}{3}=20$ különböző módon tehetjük meg. Ez az összes esetek száma. A komplementer esemény az, hogy ha kijelölünk három élt, akkor azok nem alkotnak összefüggő gráfot. Gondoljuk meg, hogy három él (melyek megfelelnek a feladat feltételeinek) mikor nem alkot összefüggő gráfot. Pontosan akkor, ha egy három hosszúságú kört határoznak meg. Ezt $\binom{4}{3}=4$ különböző módon tehetik meg. Tehát a komplementer esemény valószínűsége $\frac{4}{20}$, azaz a kérdezett esemény valószínűsége $\frac{16}{20}=0{,}8$.

Megjegyzés. A kedvező esetek száma pontosan azt adja meg, hogy hány négypontú számozott fa van. Ezek számát az ún. Cayley-tétel megadja, ami kimondja, hogy az n pontú számozott fák száma n^{n-2}, tehát jelenleg $4^2=16$.

b) Először azt gondoljuk meg, hogy ha adott egy négypontú teljes gráf, akkor abban hány négy hosszúságú kör van. Legyenek a pontok pl. A; B; C; D. Az ezek által meghatározott teljes gráfban az alábbi négy hosszú körök vannak: $ABCDA$; $ABDCA$; $ACBDA$. A tízpontú teljes gráf $\binom{10}{4}=210$ ilyen négypontú teljes részgráfot tartalmaz, melyek mindegyike 3 darab négy hosszú kört határoz meg, ezért a válasz a kérdésre $210\cdot 3=630$.

c) A fiúk és a lányok számának eltérése úgy lehet legfeljebb 2, ha 3 fiú és 2 lány vagy 2 fiú és 3 lány ír szódolgozatot.

$$P(3\text{ fiú, }2\text{ lány})=P(2\text{ fiú, }3\text{ lány})=\frac{\binom{5}{3}\cdot\binom{5}{2}}{\binom{10}{5}}=\frac{25}{63},$$

így a keresett valószínűség $\frac{50}{63}$, ami tízezredekre kerekítve 0,7937.

d) Az előző részben $\frac{50}{63}$ adódott annak az eseménynek a valószínűségére, hogy a dolgozatot író fiúk és lányok számának eltérése legfeljebb 2. Ennek az eseménynek a komplementerének a valószínűsége $\frac{13}{63}$. Az első négy napon a komplementer esemény és az ötödik napon a kívánt esemény következik be. Az egyes napok függetleneknek tekinthetők egymástól, ezért a keresett valószínűség $\left(\frac{13}{63}\right)^4\cdot\frac{50}{63}$, ami tízezredekre kerekítve 0,0014.

6. *a*) *Az $ABCDEF$ szabályos hatszög körülírt körén felvettünk egy olyan P pontot, amely nem csúcsa a hatszögnek. Mutassuk meg, hogy a P pontnak a hatszög csúcsaitól mért távolságainak négyzetösszege a P pont helyzetétől függetlenül mindig ugyanakkora.* (*4 pont*)

Az iskolai darts szakkör táblája háromszög alakú, melynek oldalai 13, 14 *és* 15 *egység hosszúak. Egy dobássorozat hét dobásból áll. Robi még kezdő játékos, ezért szorgalmasan gyakorol. Feltételezzük, hogy a táblát biztosan eltalálja, és a tábla minden pontját egyenlő valószínűséggel találja el.*

b) *Mekkora annak a valószínűsége, hogy a hét dobásból legfeljebb háromszor talál bele a háromszög beírt körébe? Válaszunkat normálalakban adjuk meg.* (*6 pont*)

A tábla különböző részeinek eltalálása más-más pontot ér.

Robi utolsó hét dobásáról tudjuk, hogy az átlaguk 120 *pont. Pontosan annyi, mint az adatok mediánja. Az adathalmaz egyetlen módusza* 100 *pont. Két dobás során éppen az átlagnak megfelelő összeget dobott, míg a legjobb találata* 160 *pontra sikerült.*

c) *Számítsuk ki az elért pontszámok szórását.* (*6 pont*)

Megoldás. *a*) Ha lerajzoljuk az ábrát, akkor könnyen látszik, hogy AD; BE; CF átmérői a körnek. Thalész tétele miatt $APD\sphericalangle=BPE\sphericalangle=CPF\sphericalangle=90°$.

A létrejövő derékszögű háromszögekben felírhatjuk Püthagorasz tételét: $PA^2 + PD^2 = AD^2 = 4r^2$; $PB^2 + PE^2 = BE^2 = 4r^2$; $PC^2 + PF^2 = CF^2 = 4r^2$, ahol r jelöli a körülírt kör sugarát. Ezeket összeadva kapjuk, hogy $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 + PE^2 + PF^2 = 12r^2$, ami nyilván állandó.

b) Először meghatározzuk, mennyi annak a valószínűsége, hogy Robi beletalál a beírt körbe. A háromszög területét Héron-képlettel határozzuk meg: $s = 21$, így $T = \sqrt{21 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} = 84$. A beírt kör sugara $r = \frac{T}{s} = 4$.

$$P(\text{egy lövés beletalál a beírt körbe}) = \frac{4^2 \cdot \pi}{84} \approx 0{,}5984.$$

Annak a valószínűsége, hogy 7 dobásból k-szor $\bigl(k \in \{0; 1; \ldots; 7\}\bigr)$ talál bele a beírt körbe, binomiális eloszlással modellezhető:

$$P(k\text{-szor talál bele a beírt körbe 7 dobásból}) = \binom{7}{k} \cdot 0{,}5984^k \cdot 0{,}4016^{7-k}.$$

Nekünk a $\sum\limits_{k=0}^{3} \binom{7}{k} \cdot 0{,}5984^k \cdot 0{,}4016^{7-k}$ összeget kell meghatározni, melynek értéke kb. 0,2929, ami normálalakban megadva $2{,}929 \cdot 10^{-1}$.

c) Az elért pontszámokat növekvő sorrendbe rendezve kapjuk, hogy a negyedik pontszám a 120, mivel ennyi az átlag és az átlag megegyezik a mediánnal. Mivel Robi kétszer is dobott 120 pontot és az adatok egyetlen módusza 100, ezért legalább háromszor kellett 100 pontot dobnia. Többször nem tudott 100-at dobni, mert a negyedik legnagyobb dobott szám biztosan az adatok mediánja, azaz 120. Tehát azt tudjuk, hogy háromszor dobott 100-at, kétszer 120-at és egyszer 160-at. Az adatok átlaga 120, ezért a kimaradt dobás csak 140 lehet. A dobások növekvő sorrendben: 100; 100; 100; 120; 120; 140; 160. Ezek szórása az ismert képlet alapján

$$\sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{7} (120 - x_i)^2}{7}} \approx 21{,}38.$$

7. *a*) *Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a valós számok halmazán.*

$$4 \cdot \sqrt{a+1} + \sqrt{b+1} = \sqrt{ab+a+b+1}, \tag{1}$$

$$2 \cdot \sqrt{a+1} + 5 \cdot \sqrt{b+1} = 2 \cdot \sqrt{ab+a+b+1}. \tag{2}$$

(*8 pont*)

b) *Kedvenc együttesem legújabb albumán négy dal különösen jóra sikerült, ezért már egy ideje csak ezt a négy dalt hallgatom a telefonomon. A telefon a dalokat egymás után véletlenszerűen, egymástól függetlenül, mindegyiket* $\frac{1}{4}$ *valószínűséggel játssza le. Addig hallgatom a zenéket, amíg nem következik be az első ismétlődés.*

Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy ehhez 1, 2, 3, 4, 5, *illetve* 6 *dalt kell meghallgassak, majd számítsuk ki az első ismétlésig meghallgatott dalok számának várható értékét.* (*8 pont*)

Megoldás. *a*) Először átalakítjuk kissé az egyenletrendszert:

$$4\cdot\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}=\sqrt{(a+1)\cdot(b+1)}, \tag{1}$$

$$2\cdot\sqrt{a+1}+5\cdot\sqrt{b+1}=2\cdot\sqrt{(a+1)\cdot(b+1)}. \tag{2}$$

Most vizsgáljuk meg a fellépő kifejezések értelmezési tartományát. Annak kell teljesülnie, hogy $a\geqslant-1$ és $b\geqslant-1$. Ha a vagy b értéke -1, akkor a másik értéke is csak -1 lehet és ez megoldása is az egyenletrendszernek.

Most tegyük fel, hogy $a>-1; b>-1$. Ekkor nyugodtan oszthatjuk mindkét egyenletet $\sqrt{(a+1)\cdot(b+1)}$-gyel:

$$\frac{4}{\sqrt{b+1}}+\frac{1}{\sqrt{a+1}}=1, \tag{1}$$

$$\frac{2}{\sqrt{b+1}}+\frac{5}{\sqrt{a+1}}=2. \tag{2}$$

Bevezetve az $\frac{1}{\sqrt{b+1}}=x$; $\frac{1}{\sqrt{a+1}}=y$ új ismeretleneket a

$$4x+y=1; \tag{3}$$

$$2x+5y=2 \tag{4}$$

egyenletrendszert kapjuk, melynek megoldása: $x=\frac{1}{6}$; $y=\frac{1}{3}$. Innen $a=8$; $b=35$ adódik.

Tehát az egyenletrendszernek két megoldása van: $a_1=b_1=-1$ és $a_2=8$; $b_2=35$.

Mindvégig ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért ezek és csakis ezek a megoldásai az egyenletrendszernek.

b) Jelöljük X-szel azt a valószínűségi változót, amely megadja, hogy hány dalt kell meghallgatni addig, amíg bekövetkezik az első ismétlődés. Nyilván $P(X=1)=$ $=0$ és $P(X=k)=0$, ha $k\geqslant6$, hiszen az ötödik dal meghallgatásakor biztosan ismétlődés lesz, így $P(X=6)=0$. Kapjuk, hogy $P(X=2)=\frac{4}{4^2}=\frac{1}{4}$; $P(X=3)=$ $=\frac{4\cdot3\cdot2}{4^3}=\frac{3}{8}$; $P(X=4)=\frac{4\cdot3\cdot2\cdot3}{4^4}=\frac{9}{32}$; $P(X=5)=\frac{4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot4}{4^5}=\frac{3}{32}$. Ezek valóban eloszlást alkotnak, hiszen összegük 1.

A várható érték:

$$E(X)=\sum_{k=2}^{5}k\cdot P(X=k)=2\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\frac{3}{8}+4\cdot\frac{9}{32}+5\cdot\frac{3}{32}=\frac{103}{32}\approx3{,}2.$$

8. *Adott az*

$$f(x)=\begin{cases}x^3, & ha\quad x\leqslant3,\\ \dfrac{12x^2-35x-3}{x-3}+p, & ha\quad x>3.\end{cases}$$

függvény.

a) Határozzuk meg a p paraméter értékét úgy, hogy az $f(x)$ függvény folytonos legyen a valós számok halmazán. (*4 pont*)

Tekintsük a fenti függvényt a $[-1;2]$ intervallumon. Legyen ez a $g(x)$ függvény.

b) Adjuk meg a $g(x)$ függvénynek az inverz függvényét. Adjuk meg az inverz függvény értelmezési tartományát és értékkészletét is. (*4 pont*)

Az $f(x)$ függvény 2 abszcisszájú pontjába érintőt húzunk. (Pont abszcisszája: a pont első koordinátája.)

c) Írjuk fel az érintő egyenletét. (*4 pont*)

d) Határozzuk meg az érintő és az $f(x)$ függvény által határolt korlátos zárt síkidom területét. (*4 pont*)

Megoldás. *a*) A függvény folytonossága egyedül az $x=3$ pontban kérdéses. Nyilván $f(3)=27$ és $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} x^3 = 27$. Számoljuk ki a jobboldali határértéket is, felhasználva, hogy

$$12x^2-35x-3 = 12\cdot(x-3)\cdot\left(x+\frac{1}{12}\right) = (x-3)\cdot(12x+1).$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+}\left(\frac{12x^2-35x-3}{x-3}+p\right) = \lim_{x\to 3^+}\left(\frac{(x-3)\cdot(12x+1)}{x-3}+p\right) = $$
$$= \lim_{x\to 3^+}(12x+1+p) = 37+p.$$

A két féloldali határértéknek egyenlőnek kell lennie, tehát $37+p=27$, innen $p=-10$ adódik. Tehát $p=-10$ és ekkor a függvény az alábbi alakban írható fel:

$$f(x)=\begin{cases} x^3, & \text{ha } x\leqslant 3,\\ 12x-9, & \text{ha } x>3.\end{cases}$$

b) Mivel $[-1;2]\subseteq\,]-\infty;3]$, ezért $g:\,[-1;2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^3$. Először megállapítjuk $g(x)$ értékkészletét. Mivel a függvény szigorúan monoton növekedő, ezért valóban invertálható és értékkészlete $R_g=[-1;8]$. Innen már felírhatjuk az inverz függvényt: $g^{-1}:\,[-1;8]\to[-1;2]$, $g^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$, tehát $D_{g^{-1}}=[-1;8]$ és $R_{g^{-1}}=[-1;2]$.

c) A pont, ahová az érintőt húzzuk: $P(2;8)$. Az érintő meredekségét a derivált adott pontbeli értéke adja meg. Mivel $f'(x)=3x^2$, ha $x\leqslant 3$, ezért az érintő meredeksége $m=f'(2)=12$. Az érintő egyenlete $y-8=12(x-2)$, azaz $y=12x-16$.

d) Először meghatározzuk, hogy hol metszi egymást az érintő és az $f(x)$ függvény. Ha $x>3$, akkor $f(x)=12x-9$ és ez párhuzamos az $y=12x-16$ egyenletű érintővel. Tehát ekkor nem lesz metszéspont. Ha $x\leqslant 3$, akkor $f(x)=x^3$. Meg kell oldanunk az $x^3=12x-16$ egyenletet. Segítségünkre lesz, hogy tudjuk, $x=2$ megoldása. Ez azért igaz, mert ebben az abszcisszájú pontban érinti az érintő a függvényt.

$$x^3-12x+16 = x^3-4x-8x+16 = x\cdot(x^2-4)-8\cdot(x-2) = (x-2)^2\cdot(x+4),$$

tehát a másik metszéspont $x=-4$. Véve egy próbapontot a $[-4;2]$ intervallumból (pl. $x=0$-t), látható, hogy az $f(x)$ függvény grafikonja mindvégig az érintő felett halad. A kérdéses terület:

$$T=\int_{-4}^{2}(x^3-12x+16)\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x^4}{4}-6x^2+16x\right]_{-4}^{2}=108.$$

9. *Egy mértani sorozat első eleme* 9*, az első* n *elem összege* $\frac{40}{3}$*, ugyanezen elemek reciprokainak összege* $\frac{40}{9}$.

a) Mutassuk meg, hogy a sorozat hányadosa $\frac{1}{3}$. *(7 pont)*

b) Határozzuk meg n *értékét.* *(2 pont)*

c) A sorozat mely elemei kisebbek $\frac{1}{2019}$*-nél? Mennyi az összege ezen elemeknek?* *(7 pont)*

Megoldás. *a*) Legyen az eredeti mértani sorozat hányadosa q. Ekkor az eredeti sorozat tagjai $9; 9q; 9q^2; \ldots$, míg ezen tagok reciprokai $\frac{1}{9}; \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{q}; \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{q^2}; \ldots$. Látszik, hogy ez is egy mértani sorozat, melynek első eleme $\frac{1}{9}$ és hányadosa $\frac{1}{q}$. Nézzük meg, hogy lehet-e $q=1$. Nem lehet, mert ekkor a sorozat minden tagja 9 lenne és így az első n elem összege nem lehetne $\frac{40}{3}$. Mivel $q\neq 1$, ezért használhatjuk az ismert $s_n=a_1\cdot\frac{q^n-1}{q-1}$ képletet. Kapjuk, hogy

$$9\cdot\frac{q^n-1}{q-1}=\frac{40}{3}\quad \text{és}\quad \frac{1}{9}\cdot\frac{\left(\frac{1}{q}\right)^n-1}{\frac{1}{q}-1}=\frac{40}{9}.$$

Innen adódik, hogy

$$\frac{q^n-1}{q-1}=\frac{40}{27}\quad\text{és}\quad 40=\frac{\frac{1-q^n}{q^n}}{\frac{1-q}{q}}=\frac{q^n-1}{q-1}\cdot\frac{q}{q^n}=\frac{40}{27}\cdot\frac{q}{q^n},$$

azaz $q^n=\frac{q}{27}$. Ezt beírhatjuk a $\frac{q^n-1}{q-1}=\frac{40}{27}$ összefüggésbe. Megoldva a

$$\frac{\frac{q}{27}-1}{q-1}=\frac{40}{27}$$

egyenletet adódik, hogy $q=\frac{1}{3}$.

b) Írjuk be $q=\frac{1}{3}$-t a $q^n=\frac{q}{27}$ összefüggésbe. Kapjuk, hogy $\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{1}{81}$, innen $n=4$ adódik az exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt. Tehát a sorozat első négy tagját adtuk össze.

Ellenőrzés a szöveg alapján.

c) Az eredeti sorozat általános tagja: $a_n=9\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=3^{-n+3}$.

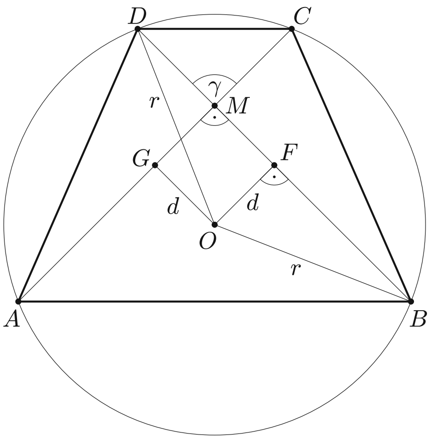
Meg kell oldanunk a $3^{-n+3} < \frac{1}{2019}$ egyenlőtlenséget. Mindkét oldal tízes alapú logaritmusát véve adódik, hogy $n > 9{,}93$, tehát $n \geqslant 10$. A sorozat azon tagjai kisebbek $\frac{1}{2019}$-nél, amelyeknek indexe legalább 10. Ezek az elemek egy mértani sorozat tagjai, a belőlük képzett mértani sor konvergens és összege:

$$\sum_{n=10}^{\infty} 3^{-n+3} = 3^{-7} + 3^{-8} + \ldots = \frac{3^{-7}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{1458}.$$

Fridrik Richárd
Magister Universitas
Matematika Szekció
Szeged

C gyakorlatok megoldása

C. 1452. *Egy* 13 cm *sugarú körbe írható trapézról tudjuk, hogy átlói a kör középpontjától* 5 cm*-re helyezkednek el. Legfeljebb mekkora lehet a trapéz területe?*



1. ábra

I. megoldás. Használjuk az *1. ábra* jelöléseit és legyen a BD átló felezőpontja az F, az AC átlóé a G pont, az átlók metszéspontja M, végül $DMC\sphericalangle = \gamma$. A kör sugara $r = 13$ cm, az átlók távolsága a kör középpontjától $OF = OG = d = 5$ cm.

A trapéz átlói a körben húrok. A húr felező merőlegese átmegy a középponton, így $OFB\sphericalangle = 90°$. A Pitagorasz-tételt felírva az OFB derékszögű háromszögben:

$$BF = \sqrt{r^2 - d^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} =$$

$$= \sqrt{144} = 12 \text{ cm},$$

ebből pedig

$$AC = BD = 2BF = 24 \text{ cm}.$$

A trapéz területe tehát:

$$T = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD \cdot \sin\gamma = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 24 \cdot \sin\gamma = 288 \cdot \sin\gamma.$$

Mivel $\sin\gamma$ értéke legfeljebb 1, ezért a terület akkor maximális, ha $\sin\gamma = 1$, vagyis $\gamma = 90°$. Ekkor a terület: $T_{\max} = 288 \text{ cm}^2$.