Azt kaptuk tehát, hogy a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ vektorok meghatározta irányok páronként merőlegesek, ezért legfeljebb három ilyen irány lehetséges. Minthogy az azonos irányt meghatározó vektorok egymás ellentettjei, ezért minden irányt legfeljebb két vektor határoz meg, innen pedig közvetlenül adódik a bizonyítandó $n \leqslant 6$ állítás. □

Megjegyzés. Ha $p = k^2 + k + 1$ valamely k pozitív egészre, akkor megadható hat olyan vektor, amelyek teljesítik a feladatbeli követelményeket, és egyikük sem párhuzamos a koordinátatengelyekkel. Könnyű ellenőrizni, hogy például a $\big(k, k+1, k(k+1)\big)$, $\big(k+1, -k(k+1), k\big)$, illetve $\big(-k(k+1), -k, k+1\big)$ ilyen vektorhármast alkot.

Általánosságban az igaz, hogy a 2 és az 5 kivételével minden p prímre létezik hat vektor a fenti tulajdonsággal. A részletekért ld. az **A. 744.,** ehavi számunkban kitűzött feladatot.

3. *A k utcából álló Aprajafalván $k(n-1)+1$ klub működik, mindegyik tagsága n törpöt számlál. Egy törp több klubnak is tagja lehet, és két törp bizonyosan ismeri egymást, ha klubtársak vagy ha ugyanabban az utcában laknak. Igazoljuk, hogy kiválasztható n különböző klub és ezeknek egy-egy tagja úgy, hogy ez az n tag páronként különböző legyen és közülük bármely kettő ismerje egymást.*

Megoldás. Legyenek a klubok $K_1, K_2, \ldots$ és válasszunk sorra minden klubból egy-egy képviselőt azzal a megszorítással, hogy minden törp legfeljebb egy klubot képviselhet. Ha e választások során a K_i klubból nem tudunk képviselőt választani, akkor az azért van, mert K_i minden egyes tagja (akik persze páronként ismerik egymást) már képvisel egy-egy különböző klubot, ezért kész vagyunk. Ha azonban mind a $k(n-1)+1$ klubból sikerül különböző képviselőt választani, akkor a skatulya-elv miatt közülük n törp ugyanabban az utcában lakik, és ezért ismerik egymást. □

Fleiner Tamás

Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

I. rész

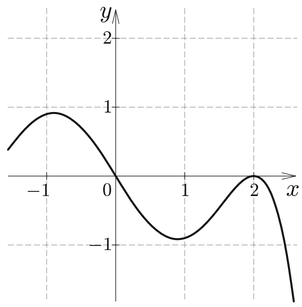
1. Lara 3 piros, 4 kék és 3 sárga építőkockával játszik, melyek legfeljebb csak a színükben különböznek egymástól. Az összes építőkockát egymásra téve szeretne egy tornyot építeni.

Hányféle színmintázatú tornyot építhet, ha

a) piros kockát sem alulra, sem felülre nem tesz;

b) legalább két piros elem közvetlenül egymás fölött van? (*12 pont*)

2. Az *ábra* egy f függvény deriváltfüggvényének ($f'(x)$) egy részletét mutatja. Adjuk meg az alábbi állítások esetén, hogy melyik igaz, melyik hamis, illetve melyiknél nem lehet ezt eldönteni. Válaszunkat indokoljuk.



a) A 0 pontban az f függvénynek lokális maximuma van.

b) Ha $0 \leqslant x \leqslant 2$, akkor $f(x) \leqslant 0$.

c) Az f függvény képe az origóra szimmetrikus a $(-1, 1)$ intervallumon.

d) Az f függvénynek a $x = 2$ helyen inflexiós pontja van. (*12 pont*)

3. Krisztiánnak 80 CD-ből álló gyűjteménye van. A CD-k között 48 olyan van, amin több előadó szerepel (T), 24 olyan van, amin egy előadó vagy együttes számai vannak (E), és 8 hangszeres zenei CD-je (H) is van. Sajnos Krisztián nem túl rendes, és az összes CD egy fiókban hever egymás hegyén-hátán.

Egyik barátja megkéri, hogy vigyen el a partijára 5 CD-t. Mivel – mint mindig – Krisztián nagy rohanásban van, anélkül, hogy a fiókba nézne, kivesz onnan 5 CD-t.

a) Mi a valószínűsége annak, hogy csak hangszerest visz?

b) Mi a valószínűsége, hogy az öt CD között lesz legalább egy (T), viszont nem lesz (H)?

c) Krisztián rápillantott a kezében lévő CD-kre, és látta, hogy a legfelső (H). Mi a valószínűsége, hogy a többi is az? (*13 pont*)

4. Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán:

a) $2^{4x-1} \cdot 4^{2x+3} = 8^x$;

b) $\sqrt{x - \sqrt{x+2}} \leqslant 2$. (*14 pont*)

II. rész

5. A Schiller Gimnázium diákjainak mindegyike első idegen nyelvként angolt tanul, és legalább egy, legfeljebb két nyelvet választhatnak a francia, spanyol és latin közül. A 10. évfolyam 72 diákjából 40-en két nyelvet is választottak. 48-an tanulnak franciául, 40-en spanyolul és valahányan latinul. 24-en tanulnak franciául és spanyolul is, és 12-en franciául és latinul.

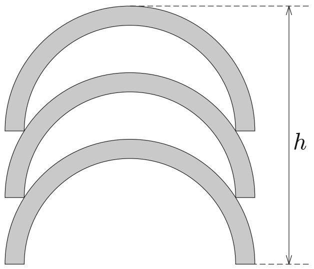
a) Hányan tanulnak összesen latinul; és ebből hányan spanyolul is?

Az évfolyamról egy tanulót véletlenszerűen kiválasztva mi annak a valószínűsége, hogy

b) franciául és spanyolul,

c) franciául vagy spanyolul,

d) vagy franciául, vagy latinul (de nem mindkét nyelven) tanul? (*16 pont*)



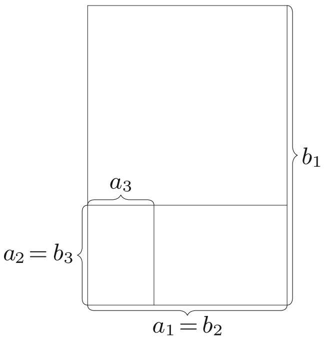
6. Egy parkban néhány, betonból készült, félgömb formájú virágtartót használnak. A félgömbök belső sugara 44 cm, falvastagsága 8 cm, a beton sűrűsége 2,2 g/cm^3.

a) Hány m^3 virágföld fér egy ilyen tartóba?

b) Milyen nehéz egy tartó?

c) A tél beállta előtt mindegyik tartót kiürítik, majd hármat-hármat egymásra helyeznek. Milyen magas egy ilyen rakás?

d) Tavasszal újra kihelyezik a tartókat. Előtte fehérre meszelik a tartók külső részét (a peremet is). Egy-egy virágtartónak mekkora területű része lesz így frissen meszelve (cm^2-ben)? (*16 pont*)



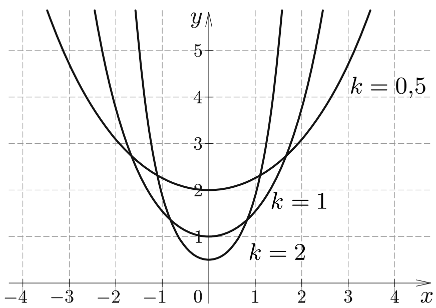
7. Egy téglalap oldalai $a_1 = 2$ m és $b_1 = 3$ m. Felosztjuk két téglalapra az *ábrán* látható módon úgy, hogy az egyik hasonló az elsőhöz, oldalai a_2 és $b_2 = a_1$. Ezt a második téglalapot is felosztjuk úgy, hogy a kapott két téglalap közül az egyik hasonló hozzá, és ennek a harmadik téglalapnak az oldalai a_3 és $b_3 = a_2$. Ezt az eljárást folytatjuk.

a) Milyen hosszúak az n-edik téglalap oldalai?

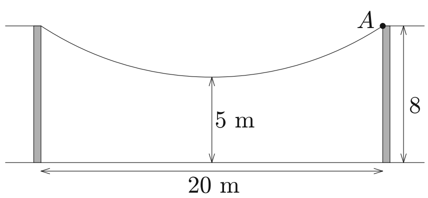
b) Milyen n esetén lesz az n-edik és az $(n+1)$-edik téglalap területének különbsége 1 cm^2-nél kisebb?

c) Mekkora az első n téglalap kerületének összege? (*16 pont*)

8. Egy kalandpark pályáján két fa között egy függőhíd található. Tudjuk, hogy egy ilyen felfüggeszett híd alakja ún. láncgörbe, melynek általános képlete $f(x) = a \cdot \frac{e^{kx}+e^{-kx}}{2k}$, ahol a és k valós paraméterek. Az *1. ábrán* a $k = 0,5$; $k = 1$ és $k = 2$ értékekhez tartozó láncgörbék láthatók.



1. ábra



2. ábra

a) A *2. ábrán* a híd vázlatos oldalnézetét látjuk. Határozzuk meg a híd görbéjéhez tartozó két paraméter értékét 3 tizedesjegyre kerekítve (a talajszintet tekintsük az x-tengelynek.)

b) Határozzuk meg, hogy az A pontban a híd milyen szöget zár be a vízszintessel.

c) Reklámfelülelet szeretnének felszerelni a híd egyik oldalára úgy, hogy a felülelet a talajszint, a híd és a két fa zárja közre. Mekkora felület keletkezik így?

(*16 pont*)

9. *a*) Hány osztója van a $2018 \cdot 2019$, illetve a 2018^{2019} számnak?

b) Mennyi az egyik, illetve a másik szám osztóinak az összege?

c) Bizonyítsuk be, hogy 2018^{2019} legalább $3 \cdot 2019$ számjegyből áll.

d) Melyik nagyobb: 2018^{2019} vagy 2019^{2018}? (*16 pont*)

Ratkó Éva
Budapest
(zömmel német érettségi feladatokból válogatva)

Megoldásvázlatok a 2019/1. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

A Magister Universitas érettségi felkészítő az 2000-es évek eleje óta működik. Jelenleg három városban lehetséges felkészítő tanfolyamainkra jelentkezni: Budapesten, Szegeden és Debrecenben. Matematika, fizika, kémia, biológia, történelem, magyar és angol tantárgyból készítünk fel diákokat az érettségire emelt- és középszinten is. Diákjainknak saját tanáraink által kifejlesztett és gondosan szerkesztett tananyagainkkal könnyítjük meg az érettségire való felkészülést. Jelentkezni a `https://erettsegi-felkeszito.hu/` oldalon tudtok. Még idén is érdemes becsatlakozni intenzív tanfolyamainkra. Aki jövőre vagy később érettségizik a fenti tárgyak akármelyikéből, szívesen látjuk érettségi felkészítőinken. Ne maradjatok le!

I. rész

1. *Kilencjegyű pozitív egész számokat képezünk úgy, hogy a képzett számban szereplő számjegy annyiszor fordul elő, amekkora a számjegy. Hány ilyen kilencjegyű szám képezhető?* (*11 pont*)

Megoldás. A szám számjegyei között nem szerepelhet a 0. A lehetséges eseteket aszerint soroljuk fel, hogy mi a legnagyobb számjegy, ami a felírt kilencjegyű számban szerepelni fog.

1. eset: 9 darab 9-es jegy. Ebből 1 darab kilencjegyű szám van.

2. eset: 8 darab 8-as, 1 darab 1-es jegy. Ezekből 9 szám képezhető.