KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK
INFORMATIKA ROVATTAL BŐVÍTVE
ALAPÍTOTTA: **ARANY DÁNIEL** 1894-ben

69. évfolyam 2. szám Budapest, 2019. február

Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta 64 oldalon. ÁRA: 950 Ft

TARTALOMJEGYZÉK

Főszerkesztő: RATKÓ ÉVA
Fizikus szerkesztő: GNÄDIG PÉTER
Műszaki szerkesztő: MIKLÓS ILDIKÓ
Kiadja: MATFUND ALAPÍTVÁNY
Alapítványi képviselő: OLÁH VERA
Felelős kiadó: KATONA GYULA
Nyomda: OOK-PRESS Kft.
Felelős vezető: SZATHMÁRY ATTILA
INDEX: 25 450 ISSN 1215-9247

A szerkesztőség címe: 1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1.A, II. emelet 2.76.; Telefon: 372-2500/6541; 372-2850
A lap megrendelhető az Interneten: `www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.h.shtml`.
Előfizetési díj egy évre: 8100 Ft
Kéziratokat nem őrzünk meg és nem küldünk vissza. Minden jog a KöMaL tulajdonosaié.
E-mail: `szerk@komal.hu`
Internet: `http://www.komal.hu`
This journal can be ordered from the Editorial office:
Pázmány Péter sétány 1.A, II. emelet 2.76., 1117–Budapest, Hungary
telephone: +36 (1) 372-2850
or on the Postal address
H–1518 Budapest 112, P.O.B. 32, Hungary,
or on the Internet:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.e.shtml`.
A Lapban megjelenő hirdetések tartalmáért felelősséget nem vállalunk.

Helyesbítés

125 éves a KöMaL 2. című cikkünkben sajnos három adat tévesen jelent meg. A helyes adatok: *Antal Márk* 1907 és 1914 között volt szerkesztő; *Faragó Andor* 1925 és 1939 között; *Bodó Zalán* pedig 1963 és 1988 között vezette a fizika szerkesztőbizottságot. Köszönjük **Kántor Sándornénak,** hogy ezt jelezte.

Jelentés a 2018. évi Kürschák József Matematikai Tanulóversenyről

A Bolyai János Matematikai Társulat a 2018. évi Kürschák József Matematikai Tanulóversenyt október 5-én, középeurópai idő szerint 14 órai kezdettel rendezte meg a következő huszonegy helyszínen: Békéscsaba, Budapest, Cambridge, Debrecen, Eger, Győr, Kaposvár, Kecskemét, Kolozsvár, Miskolc, Nagykanizsa, Nyíregyháza, Pécs, Sopron, Szeged, Székesfehérvár, Szolnok, Szombathely, Tatabánya, Veszprém és Zalaegerszeg.

A Társulat elnöksége a verseny lebonyolítására az alábbi bizottságot kérte fel: *Biró András, Fleiner Tamás* (elnök), *Frenkel Péter, Kós Géza, Maga Péter, Pach Péter Pál* (titkár), *Pelikán József.* A bizottság szeptember 14-i ülésén a következő feladatokat tűzte ki:

1. *Az ABC háromszög beírt köre a BC, a CA, illetve az AB oldalt rendre az A_1, a B_1, illetve a C_1 pontban érinti, A-ból induló súlyvonala pedig az M pontban metszi a B_1C_1 szakaszt. Mutassuk meg, hogy az A_1M szakasz merőleges a BC oldalra.*

2. *Legyenek $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ a térbeli derékszögű koordinátarendszer egész koordinátájú, páronként különböző, p hosszúságú vektorai, ahol p prímszám. Tegyük fel, hogy tetszőleges $1 \leqslant j < k \leqslant n$ esetén van olyan $0 < \ell < p$ egész szám, melyre a $\mathbf{v}_j - \ell \cdot \mathbf{v}_k$ vektor mindhárom koordinátája p-vel osztható. Igazoljuk, hogy $n \leqslant 6$.*

3. *A k utcából álló Aprajafalván $k(n-1)+1$ klub működik, mindegyik tagsága n törpöt számlál. Egy törp több klubnak is tagja lehet, és két törp bizonyosan ismeri egymást, ha klubtársak vagy ha ugyanabban az utcában laknak. Igazoljuk, hogy kiválasztható n különböző klub és ezeknek egy-egy tagja úgy, hogy ez az n tag páronként különböző legyen és közülük bármely kettő ismerje egymást.*

A bizottság a beérkezett dolgozatok átnézése után, november 28-i ülésén a következő jelentést fogadta el:

„A verseny minden helyszínen rendben zajlott le: a 130 regisztrált versenyzőtől összesen 81 dolgozat érkezett be.

Az idei versenyen 20-nál több versenyző jutott az első feladat megoldásának a közelébe, míg a második feladatot 8-an, a harmadikat pedig 6-an oldották meg helyesen vagy lényegében helyesen.

Két versenyző oldotta meg kisebb hiányosságoktól eltekintve helyesen mindhárom kitűzött feladatot. Ezért

I. díjban és fejenként 40 000 Ft pénzjutalomban részesülnek

Imolay András, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium érettségizett tanulója (tanárai *Hujter Bálint* és *Gyenes Zoltán*) és

Matolcsi Dávid, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 12. osztályos tanulója (tanárai *Dobos Sándor, Kiss Géza* és *Kiss Gergely*).

Hét versenyző oldott meg lényegében két feladatot. Ezért a teljesítményért

Dicséretben és 10 000 Ft pénzjutalomban részesül

Alexy Marcell, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium érettségizett tanulója (tanárai *Hujter Bálint, Gyenes Zoltán* és *Szűcs Gábor*) a második és harmadik feladat megoldásáért,

Gáspár Attila, a miskolci Földes Ferenc Gimnázium érettségizett tanulója (tanárai *Győry Ákos, Gulyás Tibor, Dobos Sándor, Pelikán József, Pósa Lajos* és *Szűcs Gábor*) az első és harmadik feladat megoldásáért,

Győrffy Ágoston, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 12. osztályos tanulója (tanárai *Dobos Sándor, Kiss Géza, Kiss Gergely* és *Pósa Lajos*) az első és második feladat megoldásáért,

Haiman Milán, a new yorki Stuyvesant High School 12. osztályos tanulója (tanára *Stanislav Kats*) az első és második feladat megoldásáért,

Szemerédi Levente, a Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium érettségizett tanulója (tanára *Tigyi István*) az első és második feladat megoldásáért,

Záhorsky Ákos, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium érettségizett tanulója (tanárai *Hujter Bálint, Gyenes Zoltán* és *Szűcs Gábor*) az első és harmadik feladat megoldásáért, illetve

Zólomy Kristóf, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium érettségizett tanulója (tanárai *Hujter Bálint* és *Gyenes Zoltán*) az első feladat helyes és a második feladat kissé hiányos megoldásáért.

A versenybizottság ezúton köszöni meg minden versenyző, felkészítő tanár és a lebonyolításban közreműködő kolléga munkáját, a díjazottaknak pedig további sikereket kívánva gratulál."

A 2018. évi Kürschák József Matematikai Tanulóverseny feladatainak megoldásai

1. *Az ABC háromszög beírt köre a BC, a CA, illetve az AB oldalt rendre az A_1, a B_1, illetve a C_1 pontban érinti, A-ból induló súlyvonala pedig az M pontban metszi a B_1C_1 szakaszt. Mutassuk meg, hogy az A_1M szakasz merőleges a BC oldalra.*

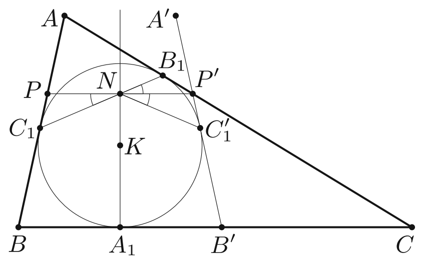
I. megoldás. Ha $|AB|=|AC|$, akkor az ábra szimmetrikus az A-ból induló magasságra, amely egyben súlyvonal is. Ezért az A_1 és az M pont is ezen a szimmetriatengelyen fekszik, így az állítás triviális.

A továbbiakban feltesszük, hogy $|AB| \neq |AC|$. Ekkor az A-ból induló szögfelező nem merőleges a BC oldalra, tehát az AB-nek egy, a BC-re merőleges egyenesre vett tükörképe nem párhuzamos AC-vel.

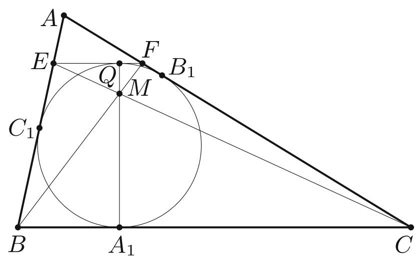
Legyen K az ABC háromszög beírt körének középpontja, és jelölje A', B' és C_1' rendre az A, B, illetve C_1 pontoknak az A_1K egyenesre vett tükörképét. Láttuk, hogy AC és $A'B'$ nem párhuzamosak, ezért egyértelműen létezik az AC és $A'B'$ egyeneseknek egy P' metszéspontja. Legyen P a P'-nek az A_1K-ra vett tükörképe, valamint jelölje N a PP' és A_1K metszéspontját (*1. ábra*).

Ekkor $KNP'\sphericalangle = 90°$ a tükrözés miatt, illetve $KB_1P'\sphericalangle = KC_1'P'\sphericalangle = 90°$, hiszen $P'B_1$ és $P'C_1'$ a beírt kör érintői. Ezek szerint K, N, B_1, P' és C_1' egy k körön vannak, konkrétan a KP' Thálesz-körén. Ezen k körnek $P'B_1$ és $P'C_1'$ egyenlő hosszúságú húrjai (mivel mindkét szakasz a beírt körnek ugyanabból a P' külső pontból húzott érintője), tehát k-ban ugyanakkora kerületi szögek tartoznak hozzájuk: $B_1NP'\sphericalangle = C_1'NP'\sphericalangle = C_1NP\sphericalangle$; az utóbbi egyenlőség a tükrözés miatt igaz. Ezek szerint N illeszkedik a C_1B_1 szakaszra.

$BC \perp A_1K \perp PP'$ miatt $BC \parallel PP'$ és $|PN| = |P'N|$ a tükrözésből adódóan. Alkalmas, A-ból végzett középpontos hasonlóság tehát PP'-t BC-be és N-et a BC szakasz felezőpontjába viszi. Ez pedig azt jelenti, hogy N rajta van az ABC háromszög A-ból induló súlyvonalán. Az N pont tehát megegyezik a B_1C_1 szakasznak és az ABC háromszög A-ból induló súlyvonalának metszéspontjával, M-mel, ahonnan $A_1M = A_1N \perp BC$ adódik. Nekünk pedig pontosan ezt kellett igazolunk. $\square$



1. ábra



2. ábra

Az alábbiakban közöljük Egri Máté rendkívül szellemes megoldásának vázlatát is.

II. megoldás. Jelölje Q az ABC háromszög beírt körének A_1-gyel átellenes pontját, és legyenek rendre E és F a beírt körhöz Q-ban húzott (és BC-vel párhuzamos) érintőnek az AB és AC oldalakkal vett metszéspontjai (*2. ábra*). Azt fogjuk megmutatni, hogy az M pont egyrészt megegyezik EC és BF metszéspontjával, másrészt, hogy illeszkedik az A_1Q szakaszra.

A konstrukció folytán $EBCF$ trapéz, így átlóinak metszéspontját a szárak metszéspontjával (azaz A-val) összekötő egyenes felezi az alapokat. Ez azt jelenti, hogy EC és BF metszéspontja illeszkedik az A-ból induló súlyvonalra.

A továbbiakban a jól ismert Brianchon-tételre támaszkodunk, amely szerint egy érintőhatszög szemközti csúcsait összekötő három átló egy ponton halad át.

A tételt abban az elfajuló esetben alkalmazzuk, amikor az érintőhatszög bizonyos csúcsai a hatszög beírt körén vannak.

Ilyenformán az EC_1BCB_1F elfajuló érintőhatszög fenti tulajdonsága alapján C_1B_1 tartalmazza EC és BF metszéspontját, amely – mint láttuk – az A-ból induló súlyvonalon van. Tehát EC és BF valóban az M pontban metszik egymást. Az EBA_1CFQ érintőhatszögre pedig az adódik, hogy A_1Q is tartalmazza M-et. A feladat állítása innen követlenül adódik. $\square$

2. *Legyenek* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ *a térbeli derékszögű koordinátarendszer egész koordinátájú, páronként különböző, p hosszúságú vektorai, ahol p prímszám. Tegyük fel, hogy tetszőleges $1 \leqslant j < k \leqslant n$ esetén van olyan $0 < \ell < p$ egész szám, melyre a $\mathbf{v}_j - \ell \cdot \mathbf{v}_k$ vektor mindhárom koordinátája p-vel osztható. Igazoljuk, hogy $n \leqslant 6$.*

Megoldás. Ha $p = 2$, akkor a p hosszúságú, egész koordinátájú vektorok kizárólag a $(\pm p, 0, 0)$, $(0, \pm p, 0)$, $(0, 0, \pm p)$ vektorok lehetnek, amiből pontosan hat db van. A továbbiakban feltesszük tehát, hogy $p \geqslant 3$. Figyeljük meg, hogy ha valamelyik $\mathbf{v}_j$ vektor mindhárom koordinátája p-vel osztható, akkor a feladatbeli feltétel szerint valamely $0 < \ell < p$ esetén a $\mathbf{v}_j - \ell \cdot \mathbf{v}_k$ vektor mindhárom koordinátája osztható p-vel. Ekkor azonban az $\ell \cdot \mathbf{v}_k$ vektornak, következésképp a $\mathbf{v}_k$ vektornak is mindhárom koordinátája osztható p-vel, tehát a $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ vektorok mindegyikére ugyanez igaz. Tekintettel arra, hogy a p hosszúságú, p-vel osztható egész koordinátájú vektorok csupán hatfélék lehetnek (konkrétan $(\pm p, 0, 0)$, $(0, \pm p, 0)$, $(0, 0, \pm p)$), ezért feltehetjük, hogy a $\mathbf{v}_j$ vektorok egyikének sem osztható mindhárom koordinátája p-vel.

A feladatbeli feltétel miatt tetszőleges $1 \leqslant j < k \leqslant n$ esetén létezik olyan $p \nmid \ell$ egész, amelyre az $\mathbf{u} = (\mathbf{v}_j - \ell \cdot \mathbf{v}_k)/p$ vektor mindhárom koordinátája egész. Ekkor (az $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ vektorok skaláris szorzatát $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$-nal jelölve)

$$\begin{aligned}|\mathbf{v}_j|^2 = (\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_j) &= (p \cdot \mathbf{u} + \ell \cdot \mathbf{v}_k, p \cdot \mathbf{u} + \ell \cdot \mathbf{v}_k) = \\ &= p^2 \cdot (\mathbf{u}, \mathbf{u}) + 2p\ell \cdot (\mathbf{u}, \mathbf{v}_k) + \ell^2 \cdot (\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_k) = \\ &= p^2 \cdot |\mathbf{u}|^2 + 2p\ell \cdot (\mathbf{u}, \mathbf{v}_k) + \ell^2 \cdot |\mathbf{v}_k|^2,\end{aligned}$$

azaz

$$-2p\ell \cdot (\mathbf{u}, \mathbf{v}_k) = p^2 \cdot |\mathbf{u}|^2 + \ell^2 \cdot |\mathbf{v}_k|^2 - |\mathbf{v}_j|^2 = p^2 \cdot |\mathbf{u}|^2 + \ell^2 \cdot p^2 - p^2 = p^2\big(|\mathbf{u}|^2 + \ell^2 - 1\big).$$

Mivel $p > 2$ és $|\mathbf{u}|^2 = (\mathbf{u}, \mathbf{u})$ egész, ezért a fenti egyenlőség bal oldala is p^2 többszöröse, tehát $p \mid (\mathbf{u}, \mathbf{v}_k)$. Ekkor

$$\begin{aligned}(\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_k) &= (p \cdot \mathbf{u} + \ell \cdot \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_k) = p(\mathbf{u}, \mathbf{v}_k) + \ell(\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_k) = \\ &= p(\mathbf{u}, \mathbf{v}_k) + \ell \cdot |\mathbf{v}_k|^2 = p(\mathbf{u}, \mathbf{v}_k) + \ell \cdot p^2,\end{aligned}$$

így $p \mid (\mathbf{u}, \mathbf{v}_k)$ okán $p^2 \mid (\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_k)$. Azonban $\big|(\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_k)\big| \leqslant |\mathbf{v}_j| \cdot |\mathbf{v}_k| = p^2$ miatt $(\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_k)$ csak $\pm p^2$ vagy 0 lehet. Ezért ha $\mathbf{v}_j$ és $\mathbf{v}_k$ nem párhuzamosak, akkor bizonyosan merőlegesek egymásra.

Azt kaptuk tehát, hogy a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ vektorok meghatározta irányok páronként merőlegesek, ezért legfeljebb három ilyen irány lehetséges. Minthogy az azonos irányt meghatározó vektorok egymás ellentettjei, ezért minden irányt legfeljebb két vektor határoz meg, innen pedig közvetlenül adódik a bizonyítandó $n \leqslant 6$ állítás. □

Megjegyzés. Ha $p = k^2 + k + 1$ valamely k pozitív egészre, akkor megadható hat olyan vektor, amelyek teljesítik a feladatbeli követelményeket, és egyikük sem párhuzamos a koordinátatengelyekkel. Könnyű ellenőrizni, hogy például a $\big(k, k+1, k(k+1)\big)$, $\big(k+1, -k(k+1), k\big)$, illetve $\big(-k(k+1), -k, k+1\big)$ ilyen vektorhármast alkot.

Általánosságban az igaz, hogy a 2 és az 5 kivételével minden p prímre létezik hat vektor a fenti tulajdonsággal. A részletekért ld. az **A. 744.,** ehavi számunkban kitűzött feladatot.

3. *A k utcából álló Aprajafalván $k(n-1)+1$ klub működik, mindegyik tagsága n törpöt számlál. Egy törp több klubnak is tagja lehet, és két törp bizonyosan ismeri egymást, ha klubtársak vagy ha ugyanabban az utcában laknak. Igazoljuk, hogy kiválasztható n különböző klub és ezeknek egy-egy tagja úgy, hogy ez az n tag páronként különböző legyen és közülük bármely kettő ismerje egymást.*

Megoldás. Legyenek a klubok $K_1, K_2, \dots$ és válasszunk sorra minden klubból egy-egy képviselőt azzal a megszorítással, hogy minden törp legfeljebb egy klubot képviselhet. Ha e választások során a K_i klubból nem tudunk képviselőt választani, akkor az azért van, mert K_i minden egyes tagja (akik persze páronként ismerik egymást) már képvisel egy-egy különböző klubot, ezért kész vagyunk. Ha azonban mind a $k(n-1)+1$ klubból sikerül különböző képviselőt választani, akkor a skatulya-elv miatt közülük n törp ugyanabban az utcában lakik, és ezért ismerik egymást. □

Fleiner Tamás

Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

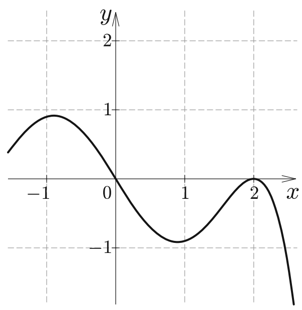
I. rész

1. Lara 3 piros, 4 kék és 3 sárga építőkockával játszik, melyek legfeljebb csak a színükben különböznek egymástól. Az összes építőkockát egymásra téve szeretne egy tornyot építeni.

Hányféle színmintázatú tornyot építhet, ha

a) piros kockát sem alulra, sem felülre nem tesz;

b) legalább két piros elem közvetlenül egymás fölött van? *(12 pont)*



2. Az *ábra* egy f függvény deriváltfüggvényének ($f'(x)$) egy részletét mutatja. Adjuk meg az alábbi állítások esetén, hogy melyik igaz, melyik hamis, illetve melyiknél nem lehet ezt eldönteni. Válaszunkat indokoljuk.

a) A 0 pontban az f függvénynek lokális maximuma van.

b) Ha $0 \leqslant x \leqslant 2$, akkor $f(x) \leqslant 0$.

c) Az f függvény képe az origóra szimmetrikus a $(-1, 1)$ intervallumon.

d) Az f függvénynek a $x = 2$ helyen inflexiós pontja van. (*12 pont*)

3. Krisztiánnak 80 CD-ből álló gyűjteménye van. A CD-k között 48 olyan van, amin több előadó szerepel (T), 24 olyan van, amin egy előadó vagy együttes számai vannak (E), és 8 hangszeres zenei CD-je (H) is van. Sajnos Krisztián nem túl rendes, és az összes CD egy fiókban hever egymás hegyén-hátán.

Egyik barátja megkéri, hogy vigyen el a partijára 5 CD-t. Mivel – mint mindig – Krisztián nagy rohanásban van, anélkül, hogy a fiókba nézne, kivesz onnan 5 CD-t.

a) Mi a valószínűsége annak, hogy csak hangszerest visz?

b) Mi a valószínűsége, hogy az öt CD között lesz legalább egy (T), viszont nem lesz (H)?

c) Krisztián rápillantott a kezében lévő CD-kre, és látta, hogy a legfelső (H). Mi a valószínűsége, hogy a többi is az? (*13 pont*)

4. Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán:

a) $2^{4x-1} \cdot 4^{2x+3} = 8^x$;

b) $\sqrt{x - \sqrt{x+2}} \leqslant 2$. (*14 pont*)

II. rész

5. A Schiller Gimnázium diákjainak mindegyike első idegen nyelvként angolt tanul, és legalább egy, legfeljebb két nyelvet választhatnak a francia, spanyol és latin közül. A 10. évfolyam 72 diákjából 40-en két nyelvet is választottak. 48-an tanulnak franciául, 40-en spanyolul és valahányan latinul. 24-en tanulnak franciául és spanyolul is, és 12-en franciául és latinul.

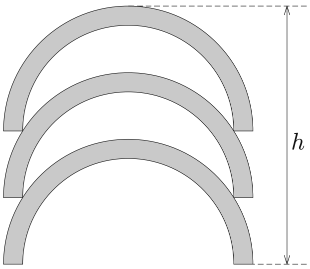
a) Hányan tanulnak összesen latinul; és ebből hányan spanyolul is?

Az évfolyamról egy tanulót véletlenszerűen kiválasztva mi annak a valószínűsége, hogy

b) franciául és spanyolul,

c) franciául vagy spanyolul,

d) vagy franciául, vagy latinul (de nem mindkét nyelven) tanul? (*16 pont*)



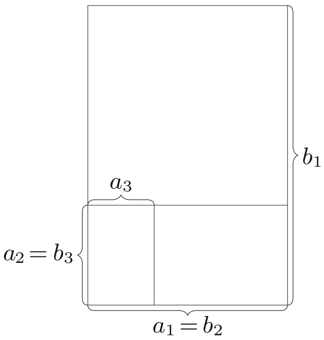
6. Egy parkban néhány, betonból készült, félgömb formájú virágtartót használnak. A félgömbök belső sugara 44 cm, falvastagsága 8 cm, a beton sűrűsége 2,2 g/cm^3.

a) Hány m^3 virágföld fér egy ilyen tartóba?

b) Milyen nehéz egy tartó?

c) A tél beállta előtt mindegyik tartót kiürítik, majd hármat-hármat egymásra helyeznek. Milyen magas egy ilyen rakás?

d) Tavasszal újra kihelyezik a tartókat. Előtte fehérre meszelik a tartók külső részét (a peremet is). Egy-egy virágtartónak mekkora területű része lesz így frissen meszelve (cm^2-ben)? (*16 pont*)



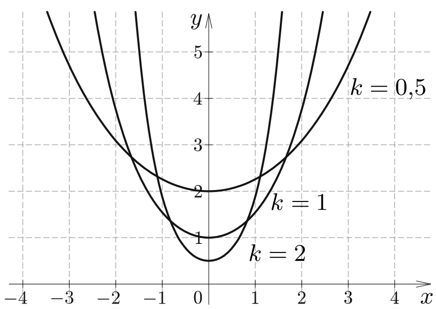
7. Egy téglalap oldalai $a_1 = 2$ m és $b_1 = 3$ m. Felosztjuk két téglalapra az *ábrán* látható módon úgy, hogy az egyik hasonló az elsőhöz, oldalai a_2 és $b_2 = a_1$. Ezt a második téglalapot is felosztjuk úgy, hogy a kapott két téglalap közül az egyik hasonló hozzá, és ennek a harmadik téglalapnak az oldalai a_3 és $b_3 = a_2$. Ezt az eljárást folytatjuk.

a) Milyen hosszúak az n-edik téglalap oldalai?

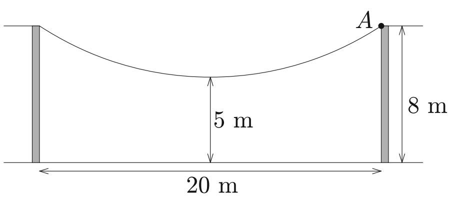
b) Milyen n esetén lesz az n-edik és az $(n+1)$-edik téglalap területének különbsége 1 cm^2-nél kisebb?

c) Mekkora az első n téglalap kerületének összege? (*16 pont*)

8. Egy kalandpark pályáján két fa között egy függőhíd található. Tudjuk, hogy egy ilyen felfüggeszett híd alakja ún. láncgörbe, melynek általános képlete $f(x) = a \cdot \frac{e^{kx}+e^{-kx}}{2k}$, ahol a és k valós paraméterek. Az *1. ábrán* a $k = 0,5$; $k = 1$ és $k = 2$ értékekhez tartozó láncgörbék láthatók.



1. ábra



2. ábra

a) A *2. ábrán* a híd vázlatos oldalnézetét látjuk. Határozzuk meg a híd görbéjéhez tartozó két paraméter értékét 3 tizedesjegyre kerekítve (a talajszintet tekintsük az x-tengelynek.)

b) Határozzuk meg, hogy az A pontban a híd milyen szöget zár be a vízszintessel.

c) Reklámfelülelet szeretnének felszerelni a híd egyik oldalára úgy, hogy a felülelet a talajszint, a híd és a két fa zárja közre. Mekkora felület keletkezik így? (*16 pont*)

9. *a*) Hány osztója van a $2018 \cdot 2019$, illetve a 2018^{2019} számnak?

b) Mennyi az egyik, illetve a másik szám osztóinak az összege?

c) Bizonyítsuk be, hogy 2018^{2019} legalább $3 \cdot 2019$ számjegyből áll.

d) Melyik nagyobb: 2018^{2019} vagy 2019^{2018}? (*16 pont*)

Ratkó Éva
Budapest
(zömmel német érettségi feladatokból válogatva)

Megoldásvázlatok a 2019/1. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

A Magister Universitas érettségi felkészítő az 2000-es évek eleje óta működik. Jelenleg három városban lehetséges felkészítő tanfolyamainkra jelentkezni: Budapesten, Szegeden és Debrecenben. Matematika, fizika, kémia, biológia, történelem, magyar és angol tantárgyból készítünk fel diákokat az érettségire emelt- és középszinten is. Diákjainknak saját tanáraink által kifejlesztett és gondosan szerkesztett tananyagainkkal könnyítjük meg az érettségire való felkészülést. Jelentkezni a `https://erettsegi-felkeszito.hu/` oldalon tudtok. Még idén is érdemes becsatlakozni intenzív tanfolyamainkra. Aki jövőre vagy később érettségizik a fenti tárgyak akármelyikéből, szívesen látjuk érettségi felkészítőinken. Ne maradjatok le!

I. rész

1. *Kilencjegyű pozitív egész számokat képezünk úgy, hogy a képzett számban szereplő számjegy annyiszor fordul elő, amekkora a számjegy. Hány ilyen kilencjegyű szám képezhető?* (*11 pont*)

Megoldás. A szám számjegyei között nem szerepelhet a 0. A lehetséges eseteket aszerint soroljuk fel, hogy mi a legnagyobb számjegy, ami a felírt kilencjegyű számban szerepelni fog.

1. eset: 9 darab 9-es jegy. Ebből 1 darab kilencjegyű szám van.

2. eset: 8 darab 8-as, 1 darab 1-es jegy. Ezekből 9 szám képezhető.

3. eset: 7 darab 7-es, 2 darab 2-es jegy. Ezekből a számjegyekből $\binom{9}{2} = 36$ szám képezhető.

4. eset: 6 darab 6-os, 3 darab 3-as jegy. Ezekből $\binom{9}{3} = 84$ szám képezhető.

5. eset: 6 darab 6-os, 2 darab 2-es, 1 darab 1-es jegy. Ezekből $\frac{9!}{6!\cdot 2!} = 252$ szám van.

6. eset: 5 darab 5-ös, 4 darab 4-es jegy. Ezekből $\binom{9}{4} = 126$ szám képezhető.

7. eset: 5 darab 5-ös, 3 darab 3-as, 1 darab 1-es jegy. Ezekből $\frac{9!}{5!\cdot 3!} = 504$ szám van.

8. eset: 4 darab 4-es, 3 darab 3-as, 2 darab 2-es jegy. Ezekből $\frac{9!}{4!\cdot 3!\cdot 2!} = 1260$ szám van.

Tehát összesen 2272 darab kilencjegyű szám képezhető, amely a feladat feltételeit kielégíti.

2. *Tekintsük a következő állításokat:*

A : *Ha egy függvény periodikus, akkor van legkisebb periódusa (alapperiódusa).*

B : *Létezik olyan* 10 *csúccsal rendelkező gráf, melynek fokszámai egy növekvő számtani sorozat egymást követő tagjait alkotják.*

C : *Ha a_n és b_n korlátos sorozatok, akkor a_nb_n is korlátos.*

a) Döntsük el, hogy igazak vagy hamisak az állítások. Válaszainkat indokoljuk. (*8 pont*)

b) Fogalmazzuk meg a C állítás megfordítását. Döntsük el, hogy igaz vagy hamis az állítás megfordítása. Válaszunkat indokoljuk. (*4 pont*)

Megoldás. *a*) Az A állítás hamis, mert pl. az $f(x) = 5$ függvény periodikus, de nincs legkisebb periódusa.

A B állítás igaz, pl. a tízpontú gráf csúcsai rendelkezzenek rendre $1; 2; \ldots; 10$ hurokéllel. Ekkor a csúcsok fokszámai rendre $2; 4; \ldots; 20$, ami növekvő számtani sorozat.

A C állítás igaz, mert ha a_n és b_n korlátos sorozatok, akkor megadhatók olyan $k; K > 0$ számok, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $|a_n| < k$ és $|b_n| < K$. Innen adódik, hogy $|a_nb_n| < k \cdot K$, tehát a_nb_n korlátos.

Megjegyzések. Az A állításhoz jó ellenpélda még pl. az ún. Dirichlet függvény, $f : \mathbb{R} \to \{0; 1\}$, $f(x) = 0$, ha $x \in \mathbb{Q}$ és $f(x) = 1$, ha $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Ez a függvény bármely $p \in \mathbb{Q}^+$ szerint periodikus, de nincs alapperiódusa, mert nincs legkisebb pozitív racionális szám.

Ha a B állításnál megköveteljük, hogy a gráf legyen egyszerű, akkor már nem tudunk a feltételeknek megfelelő gráfot megadni. Ennek oka az, hogy egy adott csúcs fokszáma a $0; 1; 2; \ldots; 9$ értékek közül kerül ki, de a 0 és 9 együtt nem szerepelhet a fokszámok között, tehát a skatulya-elv miatt lesz két azonos fokszáma a gráfnak. Ha lesz két azonos fokszám, akkor a fokszámok nem alkothatnak növekvő számtani sorozatot.

b) A C állítás megfordítása: Ha az a_nb_n sorozat korlátos, akkor az a_n és b_n is korlátos sorozatok. Ez hamis állítás, ugyanis legyen $a_n = n$ és $b_n = \frac{1}{n}$. Ekkor $a_nb_n = 1$, ami nyilván korlátos, de a_n nem korlátos.

3. *Tekintsük az ABC háromszöget, ahol $A(0;1)$, $B(3;4)$ és $C(4;-3)$.*

a) Határozzuk meg a háromszög szögeinek nagyságát. (*4 pont*)

b) Írjuk fel a háromszög köré írt kör egyenletét. (*3 pont*)

c) Határozzuk meg a háromszögbe írható kör sugarának pontos értékét. (*3 pont*)

d) Számítsuk ki annak a pontnak a koordinátáit, amelyben a B-ből induló belső szögfelező metszi a szemközti oldalt. (*4 pont*)

Megoldás. *a*) Először kiszámoljuk a háromszög oldalainak hosszát: $AB = 3\sqrt{2}$; $AC = 4\sqrt{2}$; $BC = 5\sqrt{2}$. Mivel $AB^2 + AC^2 = BC^2$, ezért Püthagorasz tételének megfordítása miatt $\alpha = 90°$.

A hegyesszögeket szögfüggvénnyel számoljuk ki, $\operatorname{tg}\beta = \frac{AC}{AB} = \frac{4}{3}$, innen $\beta \approx 53{,}13°$ és $\gamma = 90° - \beta \approx 36{,}87°$.

b) Mivel a háromszög derékszögű, ezért köré írt körének középpontja az átfogó felezőpontjával egyezik meg és a sugara az átfogó fele. Az átfogó felezőpontja $F\left(\frac{7}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Az átfogó hossza $5\sqrt{2}$, így a köré írt kör sugara $\frac{5\sqrt{2}}{2}$. Tehát a köré írt kör egyenlete $\left(x-\frac{7}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{50}{4}$ vagy más alakban $x^2+y^2-7x-y=0$.

Megjegyzés. A köré írt kör középpontját meghatározhattuk volna az oldalfelező merőlegesek metszeteként is, viszont ez jelenleg nem praktikus, mert a háromszög derékszögű.

c) Használjuk az $r = \frac{T}{s}$ képletet. A terület $T = \frac{3\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{2}}{2} = 12$, a kerület fele pedig $6\sqrt{2}$. Innen $r = \sqrt{2}$ adódik.

Megjegyzés. Derékszögű háromszög lévén az ismert $r = \frac{AB+AC-BC}{2} = \sqrt{2}$ alapján is megkaphatjuk a beírt kör sugarát.

d) Jelöljük L-lel azt a pontot, ahol a B-ből induló belső szögfelező metszi az AC oldalt. A szögfelezőtétel szerint $\frac{AL}{LC} = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{5}$, azaz az L pont az AC szakaszt $3:5$ arányban osztja ketté. Így L koordinátáti: $L\left(\frac{3\cdot 4+5\cdot 0}{8};\frac{3\cdot(-3)+5\cdot 1}{8}\right) = \left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

4. *a*) *Adjuk meg a következő kifejezés értelmezési tartományát:*

$$\log_{x+2-6x^2}\left(\frac{3-5x}{2x+4}\right). \qquad (10\ pont)$$

b) Határozzuk meg az A; B; C kijelentések logikai értékét, ha tudjuk, hogy az alábbi állítás logikai értéke hamis.

$$(A \leftrightarrow B) \to (B \vee C). \qquad (4\ pont)$$

Megoldás. *a*) A $\log_a b$ kifejezés akkor van értelmezve, ha $a>0$; $a\neq 1$; $b>0$. Tehát $x+2-6x^2>0$, továbbá $x+2-6x^2\neq 1$ és $\frac{3-5x}{2x+4}>0$. A másodfokú egyenlőtlenség megoldása $x\in \left]-\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right[$, mivel az egyenlőtlenségből képzett $x+2-6x^2=0$ egyenlet gyökei $x_1=-\frac{1}{2}$ és $x_2=\frac{2}{3}$ és a parabola lefelé nyíló. Mivel $x+2-6x^2\neq 1$, ezért $x\neq -\frac{1}{3}$ és $x\neq \frac{1}{2}$.

A törtes egyenlőtlenség megoldása $x\in \left]-2;\frac{3}{5}\right[$, ugyanis

$$\frac{3-5x}{2x+4}>0 \leftrightarrow \big((3-5x>0)\wedge(2x+4>0)\big)\vee\big((3-5x<0)\wedge(2x+4<0)\big).$$

Mindezeket egybevetve kapjuk, hogy a kifejezés értelmezési tartománya

$$\left]-\frac{1}{2};\frac{3}{5}\right]\setminus\left\{-\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right\}.$$

b) Az $(A\leftrightarrow B)\to(B\vee C)$ kijelentés pontosan akkor hamis, ha előtagja igaz és utótagja hamis, tehát $A\leftrightarrow B=i$ és $B\vee C=h$. Mivel a $B\vee C$ kijelentés logikai értéke hamis, ezért B és C is hamisak. Tudjuk, hogy $A\leftrightarrow B=i$, így A és B logikai értékének meg kell egyeznie. Mivel B hamis volt, ezért A is hamis. Tehát a fenti kijelentés akkor hamis, ha A; B; C is hamisak.

Megjegyzés. A feladatot megoldhattuk volna igazságtáblázat felírásával is.

II. rész

5. *a*) *Egy négypontú üres gráfba berajzolunk három élt úgy, hogy a gráf egyszerű legyen. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az így kapott gráf összefüggő lesz?* (*5 pont*)

b) *Hány négy hosszú kört tartalmaz egy tízpontú teljes gráf?* (*4 pont*)

Egy angolos nyelvi csoportban, ahol öt fiú és öt lány tanul, minden óra elején szódolgozatot írat a tanárnő. A szódolgozatot mindig öt tanuló írja meg úgy, hogy tanáruk egymástól függetlenül, egyenlő valószínűséggel választja ki a tanulókat.

c) *Mennyi annak a valószínűsége, hogy a dolgozatot író tanulók között a fiúk és a lányok számának eltérése legfeljebb* 2? (*3 pont*)

d) *Mennyi annak a valószínűsége, hogy öt egymást követő szódolgozatnál az ötödik lesz az első olyan, ahol teljesül, hogy a dolgozatot író diákok számának eltérése legfeljebb* 2?

Eredményeinket tízezredekre kerekítve adjuk meg. (*4 pont*)

Megoldás. *a*) A kérdezett esemény komplementerének valószínűségét határozzuk meg. Egy négypontú teljes gráfnak $\binom{4}{2}=6$ éle van. Ebből jelölünk ki hármat, ezt $\binom{6}{3}=20$ különböző módon tehetjük meg. Ez az összes esetek száma. A komplementer esemény az, hogy ha kijelölünk három élt, akkor azok nem alkotnak összefüggő gráfot. Gondoljuk meg, hogy három él (melyek megfelelnek a feladat feltételeinek) mikor nem alkot összefüggő gráfot. Pontosan akkor, ha egy három hosszúságú kört határoznak meg. Ezt $\binom{4}{3}=4$ különböző módon tehetik meg. Tehát a komplementer esemény valószínűsége $\frac{4}{20}$, azaz a kérdezett esemény valószínűsége $\frac{16}{20}=0{,}8$.

Megjegyzés. A kedvező esetek száma pontosan azt adja meg, hogy hány négypontú számozott fa van. Ezek számát az ún. Cayley-tétel megadja, ami kimondja, hogy az n pontú számozott fák száma n^{n-2}, tehát jelenleg $4^2=16$.

b) Először azt gondoljuk meg, hogy ha adott egy négypontú teljes gráf, akkor abban hány négy hosszúságú kör van. Legyenek a pontok pl. A; B; C; D. Az ezek által meghatározott teljes gráfban az alábbi négy hosszú körök vannak: $ABCDA$; $ABDCA$; $ACBDA$. A tízpontú teljes gráf $\binom{10}{4}=210$ ilyen négypontú teljes részgráfot tartalmaz, melyek mindegyike 3 darab négy hosszú kört határoz meg, ezért a válasz a kérdésre $210\cdot 3=630$.

c) A fiúk és a lányok számának eltérése úgy lehet legfeljebb 2, ha 3 fiú és 2 lány vagy 2 fiú és 3 lány ír szódolgozatot.

$$P(3\text{ fiú, }2\text{ lány})=P(2\text{ fiú, }3\text{ lány})=\frac{\binom{5}{3}\cdot\binom{5}{2}}{\binom{10}{5}}=\frac{25}{63},$$

így a keresett valószínűség $\frac{50}{63}$, ami tízezredekre kerekítve 0,7937.

d) Az előző részben $\frac{50}{63}$ adódott annak az eseménynek a valószínűségére, hogy a dolgozatot író fiúk és lányok számának eltérése legfeljebb 2. Ennek az eseménynek a komplementerének a valószínűsége $\frac{13}{63}$. Az első négy napon a komplementer esemény és az ötödik napon a kívánt esemény következik be. Az egyes napok függetleneknek tekinthetők egymástól, ezért a keresett valószínűség $\left(\frac{13}{63}\right)^4\cdot\frac{50}{63}$, ami tízezredekre kerekítve 0,0014.

6. *a*) *Az $ABCDEF$ szabályos hatszög körülírt körén felvettünk egy olyan P pontot, amely nem csúcsa a hatszögnek. Mutassuk meg, hogy a P pontnak a hatszög csúcsaitól mért távolságainak négyzetösszege a P pont helyzetétől függetlenül mindig ugyanakkora.* (*4 pont*)

Az iskolai darts szakkör táblája háromszög alakú, melynek oldalai 13, 14 és 15 egység hosszúak. Egy dobássorozat hét dobásból áll. Robi még kezdő játékos, ezért szorgalmasan gyakorol. Feltételezzük, hogy a táblát biztosan eltalálja, és a tábla minden pontját egyenlő valószínűséggel találja el.

b) *Mekkora annak a valószínűsége, hogy a hét dobásból legfeljebb háromszor talál bele a háromszög beírt körébe? Válaszunkat normálalakban adjuk meg.* (*6 pont*)

A tábla különböző részeinek eltalálása más-más pontot ér.

Robi utolsó hét dobásáról tudjuk, hogy az átlaguk 120 pont. Pontosan annyi, mint az adatok mediánja. Az adathalmaz egyetlen módusza 100 pont. Két dobás során éppen az átlagnak megfelelő összeget dobott, míg a legjobb találata 160 pontra sikerült.

c) *Számítsuk ki az elért pontszámok szórását.* (*6 pont*)

Megoldás. *a*) Ha lerajzoljuk az ábrát, akkor könnyen látszik, hogy AD; BE; CF átmérői a körnek. Thalész tétele miatt $APD\sphericalangle=BPE\sphericalangle=CPF\sphericalangle=90°$.

A létrejövő derékszögű háromszögekben felírhatjuk Püthagorasz tételét: $PA^2 + PD^2 = AD^2 = 4r^2$; $PB^2 + PE^2 = BE^2 = 4r^2$; $PC^2 + PF^2 = CF^2 = 4r^2$, ahol r jelöli a körülírt kör sugarát. Ezeket összeadva kapjuk, hogy $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 + PE^2 + PF^2 = 12r^2$, ami nyilván állandó.

b) Először meghatározzuk, mennyi annak a valószínűsége, hogy Robi beletalál a beírt körbe. A háromszög területét Héron-képlettel határozzuk meg: $s = 21$, így $T = \sqrt{21 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} = 84$. A beírt kör sugara $r = \frac{T}{s} = 4$.

$$P(\text{egy lövés beletalál a beírt körbe}) = \frac{4^2 \cdot \pi}{84} \approx 0{,}5984.$$

Annak a valószínűsége, hogy 7 dobásból k-szor $\big(k \in \{0; 1; \ldots; 7\}\big)$ talál bele a beírt körbe, binomiális eloszlással modellezhető:

$$P(k\text{-szor talál bele a beírt körbe 7 dobásból}) = \binom{7}{k} \cdot 0{,}5984^k \cdot 0{,}4016^{7-k}.$$

Nekünk a $\sum\limits_{k=0}^{3} \binom{7}{k} \cdot 0{,}5984^k \cdot 0{,}4016^{7-k}$ összeget kell meghatározni, melynek értéke kb. 0,2929, ami normálalakban megadva $2{,}929 \cdot 10^{-1}$.

c) Az elért pontszámokat növekvő sorrendbe rendezve kapjuk, hogy a negyedik pontszám a 120, mivel ennyi az átlag és az átlag megegyezik a mediánnal. Mivel Robi kétszer is dobott 120 pontot és az adatok egyetlen módusza 100, ezért legalább háromszor kellett 100 pontot dobnia. Többször nem tudott 100-at dobni, mert a negyedik legnagyobb dobott szám biztosan az adatok mediánja, azaz 120. Tehát azt tudjuk, hogy háromszor dobott 100-at, kétszer 120-at és egyszer 160-at. Az adatok átlaga 120, ezért a kimaradt dobás csak 140 lehet. A dobások növekvő sorrendben: 100; 100; 100; 120; 120; 140; 160. Ezek szórása az ismert képlet alapján

$$\sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{7} (120 - x_i)^2}{7}} \approx 21{,}38.$$

7. *a*) *Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a valós számok halmazán.*

$$(1) \qquad 4 \cdot \sqrt{a+1} + \sqrt{b+1} = \sqrt{ab + a + b + 1}\,,$$

$$(2) \qquad 2 \cdot \sqrt{a+1} + 5 \cdot \sqrt{b+1} = 2 \cdot \sqrt{ab + a + b + 1}\,.$$

(*8 pont*)

b) *Kedvenc együttesem legújabb albumán négy dal különösen jóra sikerült, ezért már egy ideje csak ezt a négy dalt hallgatom a telefonomon. A telefon a dalokat egymás után véletlenszerűen, egymástól függetlenül, mindegyiket* $\frac{1}{4}$ *valószínűséggel játssza le. Addig hallgatom a zenéket, amíg nem következik be az első ismétlődés.*

Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy ehhez 1, 2, 3, 4, 5, *illetve* 6 *dalt kell meghallgassak, majd számítsuk ki az első ismétlésig meghallgatott dalok számának várható értékét.* (*8 pont*)

Megoldás. *a*) Először átalakítjuk kissé az egyenletrendszert:

$$4\cdot\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}=\sqrt{(a+1)\cdot(b+1)}, \tag{1}$$

$$2\cdot\sqrt{a+1}+5\cdot\sqrt{b+1}=2\cdot\sqrt{(a+1)\cdot(b+1)}. \tag{2}$$

Most vizsgáljuk meg a fellépő kifejezések értelmezési tartományát. Annak kell teljesülnie, hogy $a\geqslant -1$ és $b\geqslant -1$. Ha a vagy b értéke -1, akkor a másik értéke is csak -1 lehet és ez megoldása is az egyenletrendszernek.

Most tegyük fel, hogy $a>-1; b>-1$. Ekkor nyugodtan oszthatjuk mindkét egyenletet $\sqrt{(a+1)\cdot(b+1)}$-gyel:

$$\frac{4}{\sqrt{b+1}}+\frac{1}{\sqrt{a+1}}=1, \tag{1}$$

$$\frac{2}{\sqrt{b+1}}+\frac{5}{\sqrt{a+1}}=2. \tag{2}$$

Bevezetve az $\frac{1}{\sqrt{b+1}}=x$; $\frac{1}{\sqrt{a+1}}=y$ új ismeretleneket a

$$4x+y=1; \tag{3}$$

$$2x+5y=2 \tag{4}$$

egyenletrendszert kapjuk, melynek megoldása: $x=\frac{1}{6}$; $y=\frac{1}{3}$. Innen $a=8$; $b=35$ adódik.

Tehát az egyenletrendszernek két megoldása van: $a_1=b_1=-1$ és $a_2=8$; $b_2=35$.

Mindvégig ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért ezek és csakis ezek a megoldásai az egyenletrendszernek.

b) Jelöljük X-szel azt a valószínűségi változót, amely megadja, hogy hány dalt kell meghallgatni addig, amíg bekövetkezik az első ismétlődés. Nyilván $P(X=1)=$ $=0$ és $P(X=k)=0$, ha $k\geqslant 6$, hiszen az ötödik dal meghallgatásakor biztosan ismétlődés lesz, így $P(X=6)=0$. Kapjuk, hogy $P(X=2)=\frac{4}{4^2}=\frac{1}{4}$; $P(X=3)=$ $=\frac{4\cdot 3\cdot 2}{4^3}=\frac{3}{8}$; $P(X=4)=\frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 3}{4^4}=\frac{9}{32}$; $P(X=5)=\frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 4}{4^5}=\frac{3}{32}$. Ezek valóban eloszlást alkotnak, hiszen összegük 1.

A várható érték:

$$E(X)=\sum_{k=2}^{5}k\cdot P(X=k)=2\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\frac{3}{8}+4\cdot\frac{9}{32}+5\cdot\frac{3}{32}=\frac{103}{32}\approx 3{,}2.$$

8. *Adott az*

$$f(x)=\begin{cases} x^3, & ha\quad x\leqslant 3,\\ \dfrac{12x^2-35x-3}{x-3}+p, & ha\quad x>3.\end{cases}$$

függvény.

a) Határozzuk meg a p paraméter értékét úgy, hogy az $f(x)$ függvény folytonos legyen a valós számok halmazán. (*4 pont*)

Tekintsük a fenti függvényt a $[-1;2]$ intervallumon. Legyen ez a $g(x)$ függvény.

b) Adjuk meg a $g(x)$ függvénynek az inverz függvényét. Adjuk meg az inverz függvény értelmezési tartományát és értékkészletét is. (*4 pont*)

Az $f(x)$ függvény 2 abszcisszájú pontjába érintőt húzunk. (Pont abszcisszája: a pont első koordinátája.)

c) Írjuk fel az érintő egyenletét. (*4 pont*)

d) Határozzuk meg az érintő és az $f(x)$ függvény által határolt korlátos zárt síkidom területét. (*4 pont*)

Megoldás. *a*) A függvény folytonossága egyedül az $x=3$ pontban kérdéses. Nyilván $f(3)=27$ és $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-} x^3=27$. Számoljuk ki a jobboldali határértéket is, felhasználva, hogy

$$12x^2-35x-3=12\cdot(x-3)\cdot\left(x+\frac{1}{12}\right)=(x-3)\cdot(12x+1).$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^+}\left(\frac{12x^2-35x-3}{x-3}+p\right)=\lim_{x\to 3^+}\left(\frac{(x-3)\cdot(12x+1)}{x-3}+p\right)=$$
$$=\lim_{x\to 3^+}(12x+1+p)=37+p.$$

A két féloldali határértéknek egyenlőnek kell lennie, tehát $37+p=27$, innen $p=-10$ adódik. Tehát $p=-10$ és ekkor a függvény az alábbi alakban írható fel:

$$f(x)=\begin{cases} x^3, & \text{ha } x\leqslant 3,\\ 12x-9, & \text{ha } x>3.\end{cases}$$

b) Mivel $[-1;2]\subseteq\,]-\infty;3]$, ezért $g:\,[-1;2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^3$. Először megállapítjuk $g(x)$ értékkészletét. Mivel a függvény szigorúan monoton növekedő, ezért valóban invertálható és értékkészlete $R_g=[-1;8]$. Innen már felírhatjuk az inverz függvényt: $g^{-1}:\,[-1;8]\to[-1;2]$, $g^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$, tehát $D_{g^{-1}}=[-1;8]$ és $R_{g^{-1}}=[-1;2]$.

c) A pont, ahová az érintőt húzzuk: $P(2;8)$. Az érintő meredekségét a derivált adott pontbeli értéke adja meg. Mivel $f'(x)=3x^2$, ha $x\leqslant 3$, ezért az érintő meredeksége $m=f'(2)=12$. Az érintő egyenlete $y-8=12(x-2)$, azaz $y=12x-16$.

d) Először meghatározzuk, hogy hol metszi egymást az érintő és az $f(x)$ függvény. Ha $x>3$, akkor $f(x)=12x-9$ és ez párhuzamos az $y=12x-16$ egyenletű érintővel. Tehát ekkor nem lesz metszéspont. Ha $x\leqslant 3$, akkor $f(x)=x^3$. Meg kell oldanunk az $x^3=12x-16$ egyenletet. Segítségünkre lesz, hogy tudjuk, $x=2$ megoldása. Ez azért igaz, mert ebben az abszcisszájú pontban érinti az érintő a függvényt.

$$x^3-12x+16=x^3-4x-8x+16=x\cdot(x^2-4)-8\cdot(x-2)=(x-2)^2\cdot(x+4),$$

tehát a másik metszéspont $x=-4$. Véve egy próbapontot a $[-4;2]$ intervallumból (pl. $x=0$-t), látható, hogy az $f(x)$ függvény grafikonja mindvégig az érintő felett halad. A kérdéses terület:

$$T=\int_{-4}^{2}(x^3-12x+16)\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x^4}{4}-6x^2+16x\right]_{-4}^{2}=108.$$

9. *Egy mértani sorozat első eleme 9, az első n elem összege $\frac{40}{3}$, ugyanezen elemek reciprokainak összege $\frac{40}{9}$.*

a) Mutassuk meg, hogy a sorozat hányadosa $\frac{1}{3}$. *(7 pont)*

b) Határozzuk meg n értékét. *(2 pont)*

c) A sorozat mely elemei kisebbek $\frac{1}{2019}$-nél? Mennyi az összege ezen elemeknek? *(7 pont)*

Megoldás. *a)* Legyen az eredeti mértani sorozat hányadosa q. Ekkor az eredeti sorozat tagjai 9; $9q$; $9q^2$; $\ldots$, míg ezen tagok reciprokai $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{q}$; $\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{q^2}$; $\ldots$. Látszik, hogy ez is egy mértani sorozat, melynek első eleme $\frac{1}{9}$ és hányadosa $\frac{1}{q}$. Nézzük meg, hogy lehet-e $q=1$. Nem lehet, mert ekkor a sorozat minden tagja 9 lenne és így az első n elem összege nem lehetne $\frac{40}{3}$. Mivel $q\neq 1$, ezért használhatjuk az ismert $s_n=a_1\cdot\frac{q^n-1}{q-1}$ képletet. Kapjuk, hogy

$$9\cdot\frac{q^n-1}{q-1}=\frac{40}{3}\quad\text{és}\quad\frac{1}{9}\cdot\frac{\left(\frac{1}{q}\right)^n-1}{\frac{1}{q}-1}=\frac{40}{9}.$$

Innen adódik, hogy

$$\frac{q^n-1}{q-1}=\frac{40}{27}\quad\text{és}\quad 40=\frac{\frac{1-q^n}{q^n}}{\frac{1-q}{q}}=\frac{q^n-1}{q-1}\cdot\frac{q}{q^n}=\frac{40}{27}\cdot\frac{q}{q^n},$$

azaz $q^n=\frac{q}{27}$. Ezt beírhatjuk a $\frac{q^n-1}{q-1}=\frac{40}{27}$ összefüggésbe. Megoldva a

$$\frac{\frac{q}{27}-1}{q-1}=\frac{40}{27}$$

egyenletet adódik, hogy $q=\frac{1}{3}$.

b) Írjuk be $q=\frac{1}{3}$-t a $q^n=\frac{q}{27}$ összefüggésbe. Kapjuk, hogy $\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{1}{81}$, innen $n=4$ adódik az exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt. Tehát a sorozat első négy tagját adtuk össze.

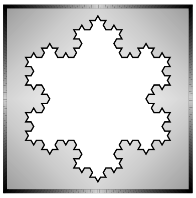
Ellenőrzés a szöveg alapján.

c) Az eredeti sorozat általános tagja: $a_n=9\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=3^{-n+3}$.

Meg kell oldanunk a $3^{-n+3} < \frac{1}{2019}$ egyenlőtlenséget. Mindkét oldal tízes alapú logaritmusát véve adódik, hogy $n > 9{,}93$, tehát $n \geqslant 10$. A sorozat azon tagjai kisebbek $\frac{1}{2019}$-nél, amelyeknek indexe legalább 10. Ezek az elemek egy mértani sorozat tagjai, a belőlük képzett mértani sor konvergens és összege:

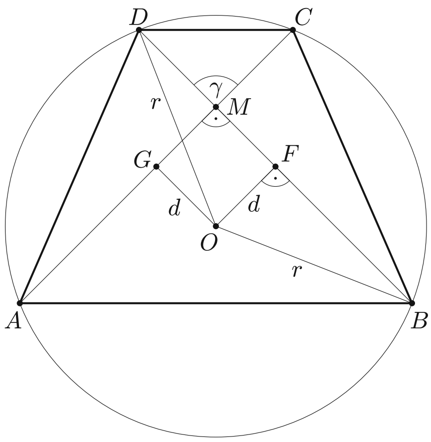
$$\sum_{n=10}^{\infty} 3^{-n+3} = 3^{-7} + 3^{-8} + \ldots = \frac{3^{-7}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{1458}.$$

Fridrik Richárd
Magister Universitas
Matematika Szekció
Szeged



C gyakorlatok megoldása

C. 1452. *Egy* 13 cm *sugarú körbe írható trapézról tudjuk, hogy átlói a kör középpontjától* 5 cm*-re helyezkednek el. Legfeljebb mekkora lehet a trapéz területe?*



1. ábra

I. megoldás. Használjuk az *1. ábra* jelöléseit és legyen a BD átló felezőpontja az F, az AC átlóé a G pont, az átlók metszéspontja M, végül $DMC\sphericalangle = \gamma$. A kör sugara $r = 13$ cm, az átlók távolsága a kör középpontjától $OF = OG = d = 5$ cm.

A trapéz átlói a körben húrok. A húr felező merőlegese átmegy a középponton, így $OFB\sphericalangle = 90°$. A Pitagorasz-tételt felírva az OFB derékszögű háromszögben:

$$BF = \sqrt{r^2 - d^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} =$$

$$= \sqrt{144} = 12 \text{ cm},$$

ebből pedig

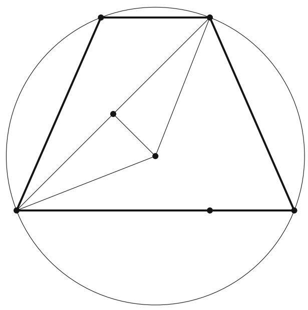
$$AC = BD = 2BF = 24 \text{ cm}.$$

A trapéz területe tehát:

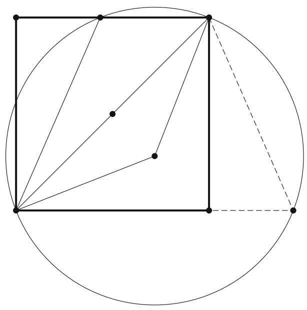
$$T = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD \cdot \sin\gamma = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 24 \cdot \sin\gamma = 288 \cdot \sin\gamma.$$

Mivel $\sin\gamma$ értéke legfeljebb 1, ezért a terület akkor maximális, ha $\sin\gamma = 1$, vagyis $\gamma = 90°$. Ekkor a terület: $T_{\max} = 288 \text{ cm}^2$.

II. megoldás. A kör sugara 13 cm, a kör középpontjától a húrnégyszög átlói 5 cm távol vannak. Rajzoljuk be az egyik átlót, és a végpontjait kössük össze a kör középpontjával (*2. ábra*) Az így keletkezett két vonal egyenlő hosszú, hiszen mindkettő a kör sugara, tehát az átlóval egy egyenlő szárú háromszöget alkotnak. A háromszöget felezzük el az alapjával szemközti csúcsból húzott magassággal. Az így kapott háromszögek derékszögűek, hiszen két oldaluk merőleges egymásra, és egybevágók, mivel oldalaik páronként egyenlő hosszúak. Egy ilyen derékszögű háromszög egyik befogója a kör középpontjának és a húrnégyszög egyik átlójának távolsága, tehát 5 cm hosszú, a befogója a kör sugara, tehát 13 cm hosszú, így a másik befogó, ami az átló fele, a Pitagorasz-tételből számolható: 12 cm hosszú.



2. ábra



3. ábra

Egy húrnégyszög átlói egyenlő hosszúak, tehát a húrnégyszög mindkét átlója 24 cm hosszú. A húrnégyszög átdarabolható egy olyan téglalappá, amelynek egyik átlója megegyezik a húrnégyszög egyik átlójával (*3. ábra*).

Egy téglalap két szomszédos oldalára és egy átlójára szintén felírható a Pitagorasz-tétel, mely szerint a két szomszédos oldal hosszának négyzetösszege egyenlő az átfogó hosszának négyzetével. Ugyanezen két oldal hosszának szorzata egyenlő a téglalap, és így a húrnégyszög területével is. A két oldalt a-val és b-vel jelölve írjuk fel a mértani és a négyzetes közepek közötti egyenlőtlenséget:

$$\sqrt{ab} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = \frac{24}{\sqrt{2}},$$

$$ab \leqslant \frac{24^2}{2}.$$

Az egyenlőtlenség szerint két adott négyzetösszegű szám szorzata akkor a legnagyobb, ha a két szám egyenlő, tehát a maximális területű téglalapban a két szomszédos oldal egyenlő hosszú, vagyis a téglalap négyzet. Egy négyzet területe az átlók szorzatának fele, esetünkben $\frac{24^2}{2} = 288\ \mathrm{cm}^2$.

Tehát a húrnégyszög területének maximális értéke 288 cm^2.

Czett Mátyás (Zalaegerszegi Zrínyi Miklós Gimn., 10. évf.)

102 dolgozat érkezett. 5 pontos 63, 4 pontos 1, 3 pontos 10, 2 pontos 12, 1 pontos 6, 0 pontos 6 dolgozat. Nem versenyszerű: 4 dolgozat.

C. 1462. *Egy számtani sorozat első tagja $a_1 = 3$, differenciája 9. Bizonyítsuk be, hogy a sorozat tagjai között minden természetes k szám esetén szerepel $3 \cdot 4^k$.*

I. megoldás.

$$3 \cdot 4^k = 3(3+1)^k = 3\left(3^k + \binom{k}{1}3^{k-1} + \binom{k}{2}3^{k-2} + \ldots + \binom{k}{k-1}3^1 + 1\right) =$$

$$= 3(3n+1) = 9n + 3$$

(mivel a 3^k, 3^{k-1}, 3^{k-2}, …, 3^1 számok mindegyike osztható 3-mal, ezért az összeg is osztható 3-mal, így felírható $3n$ alakban, ahol n természetes szám).

A számtani sorozat elemei $a_m = 3 + 9(m-1)$ alakúak. A sorozat tartalmaz minden olyan természetes számot, amely 9-cel osztva 3-at ad maradékul, tehát az összes $3 \cdot 4^k$ alakú számot is, hiszen azok is 9-cel osztva 3 maradékot adnak.

Bérczi Péter (Szegedi Deák Ferenc Gimn., 9. évf.)

Megjegyzés. Több megoldó felismerte, hogy (a_m) minden tagja 9-cel osztva 3-at ad maradékul, és ebből következtetett arra, hogy ha $3 \cdot 4^k$ is ilyen alakú minden k-ra, akkor kész az állítás bizonyítása. Ez így viszont nem igaz. A megállapítás akkor helyes, ha a megoldó azt veszi észre, hogy a_m *minden* olyan pozitív egész számot tartalmaz, mely 9-cel osztva 3-at ad maradékul. Ebből már következik, hogy ha $3 \cdot 4^k$ is ilyen alakú, akkor minden k-ra tagja a sorozatnak.

II. megoldás. $a_1 = 3$, $d = 9$: a sorozat tagjai $3 + 9n$ alakúak, ahol n természetes szám. Belátjuk, hogy minden k esetén van megfelelő n.

$$3 \cdot 4^k = 3 + 9n,$$

$$3 \cdot 4^k = 3(3n+1),$$

$$4^k = 3n + 1,$$

$$4^k - 1 = 3n,$$

$$(2^k+1)(2^k-1) = 3n.$$

Ha k páratlan, akkor a (2^k+1) tényezőből, ha pedig páros, akkor a $(2^k-1) = \left(2^{2m}-1\right) = (4^m - 1)$ tényezőből emelhető ki a 3, tehát a két tényező szorzata mindig osztható 3-mal, és így bármely k esetén van megfelelő n természetes szám.

Német Franciska (Békásmegyeri Veres Péter Gimn., 10. évf.)

III. megoldás. A számtani sorozat első tagja $a_1 = 3$, differenciája $d = 9$, általános tagja $a_n = 3 + (n-1) \cdot 9$. A sorozat első hat tagja: 3; 12; 21; 30; 39; 48. Teljes indukcióval bizonyítunk. Ha $k = 0$, akkor $3 \cdot 4^0 = 3$; ha $k = 1$, akkor $3 \cdot 4^1 = 12$, ha $k = 2$, akkor $3 \cdot 4^2 = 48$ – vagyis ezekben az esetekben igaz az állítás.

Most belátjuk, hogy ha $3 \cdot 4^k$ tagja a sorozatnak, akkor $3 \cdot 4^{k+1}$ is tagja.

$$3 \cdot 4^{k+1} - 3 \cdot 4^k = 3 \cdot 4^k(4-1) = 3 \cdot 4^k \cdot 3 = 9 \cdot 4^k.$$

Mivel $3\cdot 4^{k+1}$ és $3\cdot 4^k$ különbsége 9 többszöröse, ezért ha $3\cdot 4^k$ tagja a fenti sorozatnak, akkor $3\cdot 4^{k+1}$ is tagja.

Tehát minden k-ra teljesül, hogy $3\cdot 4^k$ tagja az $a_n=3+(n-1)\cdot 9$ sorozatnak.

Szalontai Kinga Sára (Budapest, Deák Téri Evangélikus Gimn., 10. évf.)

100 dolgozat érkezett. 5 pontos 57, 4 pontos 18, 3 pontos 11, 2 pontos 3, 1 pontos 8, 0 pontos 3 dolgozat.

C. 1482. *Igazoljuk, hogy*

$$\left|2\sin x+\sin(2x)\right|<\frac{3+2\sqrt{2}}{2}.$$

I. megoldás. Belátjuk, hogy a függvény maximuma $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. Ez kisebb, mint $\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$, ugyanis a nevezők elhagyása után a számlálókat négyzetre emelve a bal oldal 27, a jobb oldal $17+12\sqrt{2}$, ami legalább 29, lévén $\sqrt{2}$ nagyobb, mint 1. (A két szám kerekítve 2,60 és 2,91.)

A szinusz-függvény kétszeres szögekre vonatkozó szabálya szerint $\sin(2x)=$ $=2\sin x\cos x$, tehát a bal oldalon az abszolútértéken belüli kifejezés így is felírható:

$$2\sin x+2\sin x\cos x=2\sin x(\cos x+1). \tag{1}$$

Mivel az eredeti egyenlőtlenségben mindkét oldal nemnegatív, a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás:

$$4\sin^2 x(\cos x+1)^2\leqslant\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{27}{4}. \tag{2}$$

Mint ismeretes, minden x valós szám esetén $\sin^2 x+\cos^2 x=1$. Tehát $\sin^2 x=$ $=1-\cos^2 x=(1-\cos x)(1+\cos x)$, amit (2) bal oldalába beírva (4-gyel való osztás után):

$$(1-\cos x)(1+\cos x)(\cos x+1)^2\leqslant\frac{27}{16},$$

$$(1-\cos x)(\cos x+1)^3\leqslant\frac{27}{16}.$$

Mindkét oldalt 3-mal szorozva:

$$(3-3\cos x)(\cos x+1)^3\leqslant\frac{81}{16}. \tag{3}$$

A bal oldali négytényezős szorzatban minden tényező nemnegatív, mert $\cos x$ minimuma -1. Ezért felírható a számtani-mértani közepek közötti egyenlőtlenség négytényezős alakja:

$$\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}\leqslant\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4},$$

amit negyedik hatványra emelve így is írhatunk:

$$a_1a_2a_3a_4 \leqslant \left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}\right)^4.$$

Ha a négy tényezőnek a (3) bal oldalán szereplő dolgokat vesszük, akkor azok összege éppen 6, ugyanis a $-3\cos x$ és a 3 darab $\cos x$ kiejti egymást. A jobb oldalon ekkor ennek negyede, azaz $\frac{3}{2}$ szerepel a zárójelben, aminek a negyedik hatványa valóban $\frac{81}{16}$. Ezzel az állítást beláttuk, tehát egy erősebb felső korlátot adtunk a kifejezésnek.

Egyenlőség lehet (3)-ban, mégpedig akkor, ha $3-3\cos x=\cos x+1$, azaz $\cos x=\frac{1}{2}$. Ekkor visszaírva, az (1)-beli kifejezés értéke valóban

$$2\cdot\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{\pm3\sqrt{3}}{2}$$

szerepel (attól függően, hogy a $\sin x$ a $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ közül melyik értéket veszi fel, de az abszolútérték miatt ez ugyanezt a szélsőértéket adja).

Nyitrai Boglárka (Brüsszel, European School, 11. évf.)

II. megoldás. Legyen $f(x)=2\sin x+\sin(2x)$. Ennek ott lehet szélsőértéke, ahol a deriváltja 0:

$$\begin{aligned}
f'(x)=2\cos x+\cos(2x)\cdot 2&=0,\\
\cos x+\cos(2x)&=0,\\
\cos(2x)&=-\cos x,\\
\cos(2x)&=\cos(\pi-x).
\end{aligned}$$

Vagyis $2x=\pi-x+k\cdot2\pi$ (ahol $k\in\mathbb{Z}$), vagy pedig $2x=x-\pi+l\cdot2\pi$ (ahol $l\in\mathbb{Z}$). Az első esetben $x=\frac{\pi}{3}+k\cdot\frac{2\pi}{3}$, a másodikban pedig $x=-\pi+l\cdot2\pi$. Ez utóbbi megoldáshalmazt tartalmazza az előbbi, így külön vizsgálni szükségtelen.

Mivel a koszinusz függvény értékeit periodikusan veszi föl, periódusa pedig $\omega=2\pi$, így elég a $[0;2\pi)$ intervallumon táblázatot készíteni.

$x\in$	$\left[0;\frac{\pi}{3}\right)$	$\left\{\frac{\pi}{3}\right\}$	$\left(\frac{\pi}{3};\pi\right)$	$\{\pi\}$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0
$f'(x)$	$\nearrow$	lokális maximum	$\searrow$	inflexiós pont

$x\in$	$\left(\pi;\frac{5\pi}{3}\right)$	$\frac{5\pi}{3}$	$\left(\frac{5\pi}{3};2\pi\right)$
$f(x)$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$\searrow$	lokális minimum	$\nearrow$

Tehát $f(x)$ maximális csak $\left(\frac{\pi}{3}+m\cdot 2\pi\right)$-nél, minimális csak $\left(\frac{5\pi}{3}+n\cdot 2\pi\right)$-nél lehet (ahol $m,n\in\mathbb{Z}$).

$$f\left(\frac{\pi}{3}+m\cdot 2\pi\right)=f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\frac{\pi}{3}+\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2},$$

$$f\left(\frac{5\pi}{3}+n\cdot 2\pi\right)=f\left(\frac{5\pi}{3}\right)=2\sin\frac{5\pi}{3}+\sin\left(2\cdot\frac{5\pi}{3}\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Mivel $\frac{3\sqrt{3}}{2}\approx 2{,}598$ és $\frac{3+2\sqrt{2}}{2}\approx 2{,}914$, így $\left|f(x)\right|\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}<\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$, vagyis

$$\left|2\sin x+\sin(2x)\right|<\frac{3+2\sqrt{2}}{2},$$

és pontosan ezt szerettük volna belátni.

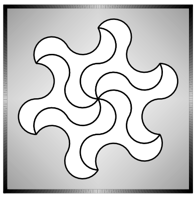
Spányik Teodor (Budapest, Képző- és Iparművészeti Szakgimn. és Koll., 12. évf.)

Megjegyzések. 1. A leggyakoribb hiba az volt, hogy a megoldó feltette, hogy a bal oldali két tagú összeg akkor maximális, ha valamelyik tag maximális (azaz azt a két esetet vizsgálta meg, amikor $2\sin x$ maximális vagy $\sin(2x)$ maximális).

2. Sok helyen hiányzott a kiszámolt szélsőértékek és a jobb oldali szám értéke közötti egyenlőtlenség igazolása.

32 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 12 versenyző: Agócs Katinka, Ajtai Boglárka, Almási Adél Csilla, Bukor Benedek, Debreczeni Tibor, Jankovits András, Molnár István, Németh Csilla Márta, Nyitrai Boglárka, Spányik Teodor, Surján Anett, Szécsi Adél Lilla. 4 pontos 7, 3 pontos 1, 1 pontos 11, 0 pontos 1 dolgozat.

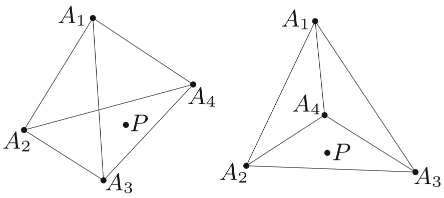
Matematika feladatok megoldása



B. 4915. *Adottak az A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 és P általános helyzetű pontok a síkon. Jelölje k_i azt a számot, ahányféleképpen az A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 pontok közül kiválasztható i darab úgy, hogy a kiválasztott pontok konvex burka tartalmazza P-t. Mutassuk meg, hogy $k_3=k_4$.*

(*5 pont*)

Megoldás. Jelölje h^{A_i} $(i=1,2,3,4,5)$ azon háromszögek számát, amelyeknek minden csúcsa az $\{A_1,A_2,A_3,A_4,A_5\}\setminus\{A_i\}$ pontok valamelyike, és tartalmazzák P-t. Így minden P-t tartalmazó háromszöget pontosan kettő h^{A_i}-ben számolunk meg, pl. ha $P\in A_1A_2A_3\triangle$, akkor az $A_1A_2A_3\triangle$-et megszámoltunk h^{A_4} és h^{A_5} kiszámítása közben. Következésképpen $k_3=\left(h^{A_1}+\ldots+h^{A_5}\right)/2$.



Most tegyük fel, hogy P benne van az A_1, A_2, A_3, A_4 pontok konvex burkában. A négy általános helyzetű pont konvex burka lehet négyszög vagy háromszög. Mindkét esetben könnyen láthatjuk, hogy a P pont pontosan két olyan háromszögben van benne, amelyeknek csúcsai A_1, A_2, A_3, A_4 közül valók. Az *ábrán* látható első esetben pontosan az $A_1A_3A_4\triangle$ és az $A_2A_3A_4\triangle$ tartalmazza P-t, a második esetben pedig pontosan az $A_1A_2A_3\triangle$ és az $A_2A_3A_4\triangle$. Világos, hogy P-t a lérejövő tartományok másikába helyezve is mindig pontosan két háromszög fogja tartalmazni. Kaptuk, hogy $h^{A_5}=2$, ha P benne van az A_1, A_2, A_3, A_4 pontok konvex burkában; és nyilvánvalóan $h^{A_5}=0$, ha P nincs benne az A_1, A_2, A_3, A_4 pontok konvex burkában.

Az érvelésben A_5 szerepe lényegtelen, azaz általában is igaz, hogy h^{A_j} értéke 2, ha P az A_j elhagyása után megmaradt négy pont konvex burkába esik, egyébként pedig 0. Eszerint a $h^{A_1}+\ldots+h^{A_5}$ összeg pontosan a kétszerese azon pontnégyesek számának, amelyek konvex burka tartalmazza P-t, azaz $h^{A_1}+\ldots+h^{A_5}=2k_4$. Így $k_3=\left(h^{A_1}+\ldots+h^{A_5}\right)/2=k_4$, amivel az állítást beláttuk.

91 dolgozat érkezett. 5 pontos 69, 4 pontos 13, 3 pontos 3, 2 pontos 5, 1 pontos 1 dolgozat.

B. 4942. *A nemzetközi kombinatorikai konferenciára érkező száz matematikust egy szállodában helyezik el, ahol a szobák egytől százig vannak megszámozva. A recepciós azt tervezi, hogy a matematikusokat érkezésük sorrendjében az adott sorszámú szobába küldi. Az elsőnek érkező vendégnek viszont elfelejti a megfelelő utasítást megadni, így ő a szobák közül véletlenszerűen választ egyet. Végül a recepciós a többieknek azt az utasítást adja, hogy az érkezési sorszámuknak megfelelő szobát egyesével foglalják el; illetve ha az már foglalt, akkor válasszanak a szabad szobák közül egyet tetszés szerint. Hányféleképpen költözhettek be a szobákba a vendégek?*

(*4 pont*) Javasolta: *Faragó András* és *Káspári Tamás* (Paks)

I. megoldás. Azt állítjuk, hogy k matematikus 2^{k-1}-féleképpen tud beköltözni a szobákba. Ezt teljes indukcióval bizonyítjuk.

$k=1$: Egy ember egy szobába csak $1=2^0=2^{1-1}$-féleképpen költözhet be.

$k=2$: Az első ember beköltözik valamelyik szobába a kettő közül, a másodiknak már nincs választása, tehát $2=2^1=2^{2-1}$-féleképpen tudnak beköltözni.

Most tegyük fel, hogy valamely k-ig ($k\geqslant 2$) minden pozitív egészre igaz az állításunk. Megmutatjuk, hogy ekkor $(k+1)$-re is igaz, vagyis $k+1$ matematikus 2^k-féleképpen tud beköltözni a szobákba.

Ha az első ember a saját szobájába (az első számúba) megy, akkor utána mindenki a neki kijelölt szobába fog menni, tehát ez egyféle beköltözés.

Ha az első ember az n-edik szobába megy ($2\leqslant n\leqslant k+1$), akkor egészen az $(n-1)$-edik emberig mindenki más el tudja foglalni a saját szobáját. Foglalkozzunk a többi matematikussal, akiknek száma $(k+1)-(n-1)=k-n+2$. Az n-edikként érkezőnek az első foglalta el a szobáját, a többieké viszont még szabad. Vegyük észre, hogy éppen olyan helyzetben van ez a $k-n+2$ matematikus, mintha csak ők lennének a szállodában, és előttük senki sem érkezett volna. Mindenkinek megvan az előre kijelölt szobája: értelmezhető úgy, mintha az n-edik emberé lenne az 1. szoba, ő érkezne elsőnek, és neki felejtette volna el a recepciós megadni az utasítást. Vagyis ha az első ember az n-edik szobába megy ($2\leqslant n\leqslant k+1$), akkor a többiek $2^{(k-n+2)-1}$-féleképpen foglalhatják el a szobákat (az indukciós feltevés miatt).

Mivel n értéke 2 és $k+1$ között bármi lehet, így ezeket összegezve kapjuk meg, hogy $k+1$ matematikus hányféleképpen választhat szobát:

$$1+\sum_{n=2}^{k+1}2^{(k-n+2)-1}=1+\sum_{n=2}^{k+1}2^{k-n+1}=$$

$$=1+(2^{k-1}+2^{k-2}+\ldots+2^1+2^0)=1+(2^k-1)=2^k.$$

Tehát 2^{99}-féleképpen költözhetnek be a szobákba a vendégek.

Weisz Máté (Szegedi Radnóti Miklós Kís. Gimn., 10. évf.)

II. megoldás. Megvizsgálom a lehetőségek számát úgy csoportosítva, hogy hány ember nem került arra a helyre, ahova szánták:

– Ha minden ember oda került, akkor az első ember az első szobába ment, ez 1 lehetőség.

– Pontosan 1 ember nem kerülhetett rossz helyre.

– 2 ember került rossz helyre, ha az első vendég az n. szobát foglalta el ($2\leqslant n\leqslant 100$), majd az n. vendég az első szobát választotta. Ez $99=\binom{99}{1}$ lehetőség.

– 3 ember nem került jó helyre, ha az első ember elfoglalta az n. szobát ($2\leqslant n\leqslant 99$), az n. ember elfoglal egy m. szobát ($n<m\leqslant 100$), az m. ember pedig az elsőt. Ez annyi lehetőség, ahányféleképpen 2-től 100-ig 2 szobát ki tudunk választani, ahol a kisebb szám n-nek, a nagyobb m-nek felel meg, vagyis $\binom{99}{2}$ lehetőség.

– Hasonlóan gondolkodva: ha x ember került rossz helyre ($2\leqslant x\leqslant 100$), akkor a szobák közül 2-től 100-ig $x-1$ ember nincs jó helyen, hiszen $x>1$ esetén az első szobában nem az első vendég foglal helyet. A 99 szoba közül $(x-1)$-et $\binom{99}{x-1}$-féleképpen lehet kiválasztani. Minden ilyen lehetőség egyféleképpen valósulhat meg, hiszen ha sorban vesszük a „rossz" szobákat, akkor a bent lakó vendégek érkezésének sorszáma is növekvő sorrendbe kerül, mivel minden vendég csak a saját, vagy nála nagyobb sorszámú szobába mehetett, mert a többit addigra feltöltötték.

Az összes lehetőség száma tehát: $1+\binom{99}{1}+\binom{99}{2}+\binom{99}{3}+\ldots+\binom{99}{99}$.

Mivel $1=\binom{99}{0}$, így a lehetőségek száma $\binom{99}{0}+\binom{99}{1}+\binom{99}{2}+\binom{99}{3}+\ldots+$ $+\binom{99}{99}$, ami a Pascal-háromszög 100. sorában lévő számok összege. Az első sorban az összeg 1; és utána minden egyes szám az alatta lévő sorba két számhoz adódik hozzá, tehát a számok összege lefelé mindig megkétszereződik, a 100. sorban 2^{99}.

Tehát 2^{99}-féleképpen költözhettek be.

Vida Tamás (Győr, Kazinczy F. Gimn., 10. évf.)

III. megoldás. Legyen a lehetséges beköltözések száma n darab matematikus esetén C_n. Nyilvánvaló, hogy $C_1 = 1$. n matematikus esetén, ha az első matematikus az első szobába költözik be, akkor mindenki egyértelműen beköltözik az érkezésének megfelelő szobába. Ha az első matematikus beköltözik a k-adik szobába $(2 \leqslant k \leqslant n)$, akkor az első utáni $k-2$ matematikus egyértelműen be tud költözni az érkezésének megfelelő szobába. A maradék $n-k+1$ matematikusnak adott az 1., $(k+1)$-edik, $(k+2)$-edik, $\ldots$, n-edik szoba a beköltözésre. Ekkor tekintsük a szobaszámokat 1, 2, 3, $\ldots$, $(n-k+1)$-nek. Ekkor az első matematikus tetszőleges szobába költözik be, a többi pedig a feladat szövegének megfelelően, tehát ekkor C_{n+k-1}-féleképpen tudnak beköltözni a matematikusok. Így

$$C_n = 1 + C_{n-2+1} + C_{n-3+1} + \ldots + C_{n-n+1} =$$

$$= 1 + C_{n-1} + C_{n-2} + \ldots + C_1 = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} C_i.$$

Ebből

$$C_{n-1} = 1 + \sum_{i=1}^{n-2} C_i,$$

és így

$$C_n = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} C_i = 1 + \sum_{i=1}^{n-2} C_i + C_{n-1} = 2 \cdot C_{n-1}.$$

Tudjuk, hogy $C_1 = 1$, így $C_n = 2^{n-1}$.

Ebből pedig következik, hogy 100 matematikus esetén a lehetséges beköltözések száma 2^{99}.

Győrffi Ádám György (Miskolc, Földes Ferenc Gimn., 9. évf.)

IV. megoldás. Vegyünk egy tetszőleges 100 jegyű kettes számrendszerbeli számot. Minden számjegy azt jelöli, hogy az adott ember jó szobában van-e: a 0 azt, hogy jó ember van a szobában, az 1 pedig azt, hogy nem.

Ha az első számjegy 0 (balról nézve), akkor minden számjegy 0, mert ha az első ember jó helyre ment, akkor már mindenki más is.

Ha első számjegy 1 (balról nézve), akkor ez azt jelenti, hogy az első ember nem jó szobába ment. Ha az x-edik szobába ment, akkor x és az 1 számjegy között csupa 0 van.

Ugyanígy, ha az n-edik ember az i. szobát választja (ahol $i \neq 1$ és $n > 1$), akkor $i > n$ és az n és i sorszámú számjegyek között minden szám 0 lesz. Ha az n-edik ember az 1-es szobát választja, akkor minden n feletti számjegy 0 lesz.

Olyan nem fordulhat elő, hogy az első számjegy 1 és a többi 0, mert az első ember elfoglalja valakinek a szobáját.

Ilyen módon minden ilyen kettes számrendszerbeli számból egyértelműen kiszámolható, hogy ki melyik szobába ment és fordítva: abból, hogy ki melyik szobába ment, leírható pontosan egy kettes számrendszerbeli szám.

(Pl. 100100100110100…0010: Az 1. ember a 4. szobába ment, a 4. ember a 7. szobába, a 7. ember a 10. szobába, a 10. ember a 11. szobába, a 11. ember a 13. szobába, …, a 99. ember az 1. szobába. Mindenki más a saját szobájába ment.)

Összesen tehát $2^{99}-1+1=2^{99}$ eset van.

Fraknói Ádám (Budapest, Jedlik Ányos Gimn., 11. évf.)

V. megoldás. Tekintsük a feladatot általánosan: n egy adott pozitív egész, és n matematikus érkezik a szállodába, 1-től n-ig számozott szobákba a feladatban leírt módon. Teljes indukcióval belátjuk, hogy ekkor a vendégek 2^{n-1}-féle sorrendben költözhettek be a szobákba. Ez $n=1$ esetén nyilvánvalóan igaz, hiszen 1 ember csak egyféleképp költözhet be az egyetlen szobába.

Tegyük fel, hogy egy adott n pozitív egészre beláttuk, hogy n vendég 2^{n-1}-féleképpen költözhet be a leírt módon. Ezt felhasználva számláljuk össze, hányféleképpen költözhet be $n+1$ matematikus.

Megfigyelhető, hogy az $n+1$. matematikus vagy az egyes számú, vagy az $(n+1)$-es számú szobába költözhetett be, hiszen ha az i. számú szoba $2\leqslant i\leqslant n$-re még szabad az i. matematikus érkezésekor, akkor ő ide költözik, és elfoglalja azt, tehát az $(n+1)$-edik vendég már nem költözhet ide.

Az olyan beköltözési sorrendek száma, melyekben az $n+1$. matematikus az $(n+1)$-es szobába kerül, éppen 2^{n-1}, hiszen ekkor az első n vendég beérkezési sorrendjére igaz, hogy az első vendég egy tetszőleges, 1-től n-ig számozott szobába költözött, a többi vendég pedig, ha tud, a saját sorszámával megegyező szobába, egyébként pedig egy tetszőleges, 1-től n-ig számozott szobába kerül, ami éppen az indukciós feltevésünk által megszámolt (azaz az n vendégre vonatkozó) sorrendek száma.

Most tekintsünk olyan sorrendeket, melyekben az $n+1$. matematikus az 1-es szobába kerül. Vegyünk egy ilyen sorrendet, és tegyük fel, hogy benne az i. vendég költözött az $(n+1)$-es sorszámú szobába (ahol $1\leqslant i\leqslant n$ a feltevés szerint). Tekintsük azt a sorrendet, melyben minden vendég ugyanabba a szobába kerül, kivéve az i. és az utolsó vendéget, mert ezek szobáit felcseréljük (tehát az i. vendég az 1-es szobába, az $n+1$. vendég pedig az $(n+1)$-es szobába kerül). Az így kapott sorrend továbbra is a feltételeknek megfelelő, hiszen $i\neq 1$ esetén az i. vendég az eredeti sorrendben sem az i. sorszámú szobába kerül, azaz tetszőlegesen választhat szobát, akár az elsőt is, $i=1$ esetén pedig az első vendég egyébként is tetszőlegesen választhat. Az i. vendég előtt érkezők továbbra is szabályosan költöznek be, és az utána következők is, hiszen $i<j<(n+1)$-re a j-edik vendég nem költözhet az $(n+1)$-es számú szobába, mert ekkor az $n+1$. vendégnek nem lenne helye (az 1-es és az $(n+1)$-es szoba is foglalt lenne már, ami nem lehet). Így tehát minden sorrendhez, melyben az $n+1$. matematikus az 1-es szobába kerül, rendelhető egy olyan, melyben az $(n+1)$-edikbe kerül. Ugyanez a hozzárendelés visszafelé is elvégezhető: ha az $(n+1)$-edik matematikus az $(n+1)$-edik szobába költözik, és az i-edik vendég az egyes szobába, akkor az ő szobáikat kicserélve ismét megfelelő sorrendhez jutunk. Könnyen látható, hogy ezek a hozzárendelések egymás inverzei, így azon sorrendek száma, melyekben az $n+1$. matematikus az egyes sorszámú szobába költözik, ugyanannyi, mint melyekben az $(n+1)$-es számúba, azaz 2^{n-1}. A kettőt összevetve kapjuk, hogy $n+1$ matematikus éppen $2\cdot 2^{n-1}=2^n$-féleképp költözhet be. Ezzel az indukciós lépést beláttuk.

Az eredményt $n=100$ esetén alkalmazva kapjuk, hogy 100 matematikus 2^{99}-féleképp költözhet be.

Schrettner Jakab (Szegedi Radnóti Miklós Kís. Gimn., 11. évf.)

97 dolgozat érkezett. 4 pontos 52, 3 pontos 30, 2 pontos 10, 1 pontos 5 dolgozat.

B. 4980. *Legyen $n>3$ pozitív egész, $a_1,a_2,\ldots,a_n$ pedig pozitív valós számok. Igazoljuk, hogy*

$$1<\frac{a_1}{a_n+a_1+a_2}+\frac{a_2}{a_1+a_2+a_3}+\ldots+\frac{a_n}{a_{n-1}+a_n+a_1}<\left[\frac{n}{2}\right]$$

és az egyenlőtlenség bal oldala nem cserélhető nagyobb, a jobb oldala pedig kisebb számra (ahol $[x]$ az x szám egész részét jelenti).

(*6 pont*)

Megoldás. Könnyen látható, hogy $a_i=\frac{1}{n^i}$ és $n\to\infty$ esetén, ha $i\neq 1$, akkor $\frac{a_i}{a_{i-1}+a_i+a_{i+1}}$ határértéke 0 lesz, $\frac{a_1}{a_n+a_1+a_2}$ határértéke pedig 1, ezért a teljes összeg 1-hez konvergál. Az is látszik, hogy ha minden $a_{2k+1}=0$, és minden $a_{2k}=1$ lenne, akkor az összeg éppen $\frac{n}{2}$ egész része lenne; azonban az a_i számok előírt pozitivitása miatt $a_{2k+1}=0$ helyett az $a_{2k+1}\to 0$ esetet vizsgáljuk: ilyenkor az összeg tetszőlegesen közelíti az $\frac{n}{2}$ egész részét. Ezzel a feladat második részének két követelményét igazoltuk.

Rátérünk a két egyenlőtlenség bizonyítására.

Az 1 szigorú alsó korlát: $n=3$ esetén a három tag összege $\frac{a_1+a_2+a_3}{a_1+a_2+a_3}=1$. Beláthatjuk, hogy ha minden $a_1,\ldots,a_n$ pozitív szám n-esre az összeg 1-nél nagyobb, akkor ez minden pozitív $a_1,\ldots,a_{n+1}$ szám $n+1$-esre is teljesül. Legyen a_i az $a_1,\ldots,a_{n+1}$ számok közül a(z egyik) legkisebb; ekkor speciálisan $a_i\leqslant a_{i-1}$ és $a_i\leqslant a_{i+1}$. Tekintsük azt a szám n-est, amelyet az $a_1,\ldots,a_{n+1}$ számokból az a_i elhagyásával kapunk. Az ehhez a szám n-eshez tartozó összeget az $a_1,\ldots,a_{n+1}$-hez tartozó összegből kivonva a különbség:

$$\frac{a_{i-1}}{a_{i-2}+a_{i-1}+a_i}+\frac{a_i}{a_{i-1}+a_i+a_{i+1}}+\frac{a_{i+1}}{a_i+a_{i+1}+a_{i+2}}-$$

$$-\frac{a_{i-1}}{a_{i-2}+a_{i-1}+a_{i+1}}-\frac{a_{i+1}}{a_{i-1}+a_{i+1}+a_{i+2}}=$$

$$=\left(\frac{a_{i-1}}{a_{i-2}+a_{i-1}+a_i}-\frac{a_{i-1}}{a_{i-2}+a_{i-1}+a_{i+1}}\right)+$$

$$+\left(\frac{a_{i+1}}{a_i+a_{i+1}+a_{i+2}}-\frac{a_{i+1}}{a_{i-1}+a_{i+1}+a_{i+2}}\right)+\frac{a_i}{a_{i-1}+a_i+a_{i+1}}.$$

Itt az első különbség $a_i \leqslant a_{i+1}$, a második pedig $a_i \leqslant a_{i-1}$ miatt nemnegatív, az utolsó tag pedig az a_k számok pozitív voltából adódóan pozitív, tehát az $n+1$ számhoz tartozó összeg nagyobb, mint az a_i elhagyásával kapott n számhoz tartozó összeg; ezzel az első egyenlőtlenséget az n szerinti indukcióval beláttuk.

Az $\left[\frac{n}{2}\right]$ szigorú felső korlát: Bármely két szomszédos tag összege legfeljebb 1, hiszen

$$\frac{a_i}{a_{i-1}+a_i+a_{i+1}}+\frac{a_{i+1}}{a_i+a_{i+1}+a_{i+2}}<\frac{a_i+a_{i+1}}{a_i+a_{i+1}}=1.$$

Tehát páros n-re kettesével összepárosítva a tagokat, éppen a kívánt állítást kapjuk.

Páratlan n-re indukcióval bizonyítunk; $n=3$ esetén a három tag összege, mint korábban láttuk, $1=\left[\frac{3}{2}\right]$.

Tegyük föl ezután, hogy az egyenlőtlenség bármely $n-2=2k+1$ szám esetén fennáll, és tekintsünk $n=2k+3$ pozitív számot. Ha létezik köztük a_i, a_{i-1} úgy, hogy $a_{i-1} \geqslant a_{i+1}$ és $a_i \geqslant a_{i-2}$, akkor őket elhagyva, a kapott $n-2$ tagú sorozathoz tartozó összeget jelölje $S(n-2)$, az n számból álló sorozathoz tartozó összeget pedig $S(n)$. Ekkor

$$\begin{aligned}
S(n)=S(n-2)&-\left(\frac{a_{i-2}}{a_{i-3}+a_{i-2}+a_{i+1}}-\frac{a_{i-2}}{a_{i-3}+a_{i-2}+a_{i-1}}\right)-\\
&-\left(\frac{a_{i+1}}{a_{i-2}+a_{i+1}+a_{i+2}}-\frac{a_{i+1}}{a_i+a_{i+1}+a_{i+2}}\right)+\\
&+\frac{a_{i-1}}{a_{i-2}+a_{i-1}+a_i}+\frac{a_i}{a_{i-1}+a_i+a_{i+1}}\leqslant\\
\leqslant S(n-2)&+\frac{a_{i-1}}{a_{i-2}+a_{i-1}+a_i}+\frac{a_i}{a_{i-1}+a_i+a_{i+1}}\leqslant\\
\leqslant S(n-2)&+\frac{a_{i-1}}{a_{i-1}+a_i}+\frac{a_i}{a_{i-1}+a_i}=S(n-2)+1,
\end{aligned}$$

ami az indukciós feltevés szerint kisebb, mint $\left[\frac{n-2}{2}\right]+1 \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]$. Így az állítás minden pozitív szám n-esre is igaz.

Végül, a megfelelő, $a_{i-1} \geqslant a_{i+1}$ és $a_i \geqslant a_{i-2}$ feltételeket kielégítő a_i, a_{i-1} pár megtalálásához válasszuk a_i-nek a számok legnagyobbikát; ekkor speciálisan $a_i \geqslant a_{i-2}$. Ha ezen kívül $a_{i-1} \geqslant a_{i+1}$ is teljesül, akkor az a_i, a_{i-1} pár megfelelő. Ellenkező esetben $a_{i+1} > a_{i-1}$, akkor viszont az a_{i+1}, a_i pár felel meg.

Szabó Kornél (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.)

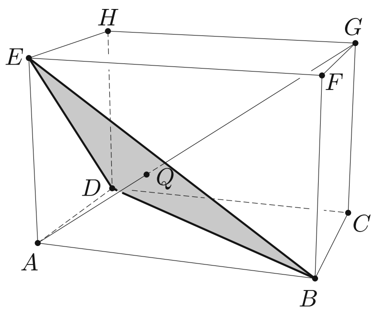
39 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott 13 versenyző: Argay Zsolt, Biczó Benedek, Dékány Barnabás, Dobák Dániel, Füredi Erik Benjámin, Győrffi Ádám György, Győrffy Ágoston, Hegedűs Dániel, Kerekes Anna, Nagy Nándor, Szabó Kornél, Telek Zsigmond, Weisz Máté. 5 pontos 7, 4 pontos 3, 3 pontos 7, 2 pontos 3, 0 pontos 3 dolgozat. Nem versenyszerű: 3 dolgozat.

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (614–618.)

K. 614. Keressük meg a 225. olyan számot a pozitív egész számok 1-től kezdődő növekvő sorozatában, amelyik nem írható fel két egymást követő egész szám szorzataként.

K. 615. Egy négyzet belsejében helyezzünk el hat pontot úgy, hogy a négyzet csúcsai és a hat pont közül semelyik három ne essen egy egyenesre. Kössük össze ezt a tíz pontot (a négyzet csúcsait és a belső hat pontot) egymást nem metsző szakaszokkal. Ezt az összekötést addig folytassuk, amíg van két olyan pont a tíz közül, amit a fenti módon össze lehet kötni. Legfeljebb hány szakaszt lehet berajzolni így?

K. 616. Sok egész számot fel lehet írni három egész szám négyzetének összegeként. Például: $1=1^2+0^2+0^2$, $14=3^2+2^2+1^2$, $20=4^2+2^2+0^2$. Mutassuk meg, hogy az 1991 nem írható fel három egész szám négyzetének összegeként.



K. 617. Egy $ABCDEFGH$ téglatest AG testátlója a BDE háromszöget a Q pontban metszi. Igazoljuk, hogy Q a BDE háromszög súlypontja.

K. 618. Egy pozitív egész számot nevezzünk „erős” számnak, ha több osztója van, mint minden nála kisebb pozitív egész számnak. (Például a 2 erős szám, mert 2 osztója van, míg az 1-nek csak 1, de a 3 nem erős szám, mert 2 osztója van, ugyanúgy, mint a nála kisebb 2-nek.)

a) Adjuk meg a 2-nél nagyobb, de 30-nál kisebb erős számokat.

b) Erős szám-e a $2^3\cdot 3^4\cdot 5$?

Beküldési határidő: 2019. március 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (1525–1531.)

Feladatok 10. évfolyamig

C. 1525. Egy labdarúgó-bajnokságban 15 forduló után az egyik csapatnak 33 pontja volt. Addigi mérkőzései során előfordult döntetlen eredmény és vereség is. Hányszor győzött a csapat? (Győzelemért 3, vereségért 0, döntetlen esetén pedig mindkét csapatnak 1-1 pont jár.)

C. 1526. Egy négyzet körülírt körének az oldalakra vett tükörképeit a négyzet belsejében érintő kör területét jelölje T. Egy tükörképet és a körülírt kört is belülről érintő kör területét jelölje t. Határozzuk meg $\frac{T}{t}$ lehetséges legkisebb értékét.

Feladatok mindenkinek

C. 1527. Az $1, 2, \ldots, n$ számokból kettőt kitörölve a megmaradt számok összege 2019. Adjuk meg az összes lehetséges számpárt, amit kitörölhettünk.

C. 1528. Milyen pozitív egész számot jelölhet n, ha tudjuk, hogy az n^3 szám utolsó három számjegyét letörölve az n számot kapjuk vissza?

Javasolta: *Róka Sándor* (Nyíregyháza)

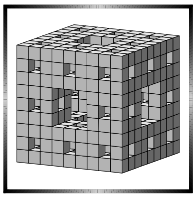
C. 1529. Bizonyítsuk be, hogy bármely derékszögű háromszög felbontható $3k+2$ darab egyenlőszárú háromszögre tetszőleges k pozitív egész szám esetén.

Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1530. Be lehet-e osztani 1-től 51-ig az egész számokat hármas csoportokba úgy, hogy minden csoportban a számok összege prím legyen?

C. 1531. Egy szabályos háromoldalú egyenes hasáb térfogata 2 dm^3. Legalább mekkora a hasáb felszíne?

Beküldési határidő: 2019. március 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518



A B pontversenyben kitűzött feladatok (5006–5013.)

B. 5006. Az $ABCD$ trapéz alapjai AB és CD, az átlók metszéspontja M. Az AC átló felezi a BAD szöget, $AM=BC$ és $BM=CD$. Határozzuk meg a trapéz szögeit.

(*4 pont*) OKTV feladat alapján

B. 5007. Van $3n+1$ darab érménk. Ezek közül n érmének az egyik oldalán 0, a másik oldalán 11 áll. További n érmének az egyik oldalán 0, a másik oldalán 44, a többi $n+1$ érmének pedig az egyik oldalán 0, a másik oldalán 99 szerepel. Az összes érmét egyszerre feldobva mi annak a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 7-tel osztható? (Az érmék mindkét oldalukra azonos eséllyel esnek.)

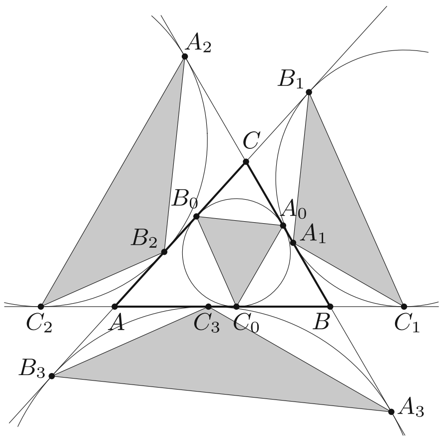
(*4 pont*)

B. 5008. Adottak az A középpontú k_A és a B középpontú k_B körök. Az l_1 egyenes A_1-ben érinti k_A-t és B_1-ben k_B-t; az l_2 egyenes pedig A_2-ben érinti k_A-t és B_2-ben k_B-t. Bizonyítsuk be, hogy az A_1A_2 és a B_1B_2 szakaszok AB egyenesre vett merőleges vetülete egyenlő hosszúságú.

(*3 pont*)

B. 5009. Az x, y, z pozitív számokra $x^2+y^2+z^2=3$ teljesül. Bizonyítsuk be, hogy $2^{\frac{1}{x}}+2^{\frac{1}{y}}+2^{\frac{1}{z}}\geqslant 6$.

(*3 pont*) Javasolta: *Nguyen Van Nho* (Vietnam)



B. 5010. Egy hegyesszögű ABC háromszög beírt köre az oldalakat az A_0, B_0 és C_0 pontokban érinti. A háromszög három hozzáírt körének érintési pontjai az oldalegyeneseken rendre A_1, B_1 és C_1; A_2, B_2 és C_2; illetve A_3, B_3 és C_3. Az $A_iB_iC_i$ háromszög területét jelölje T_i ($i=0,1,2,3$). Mutassuk meg, hogy

$$\frac{1}{T_0}=\frac{1}{T_1}+\frac{1}{T_2}+\frac{1}{T_3}.$$

(*5 pont*)

B. 5011. Adott a síkon 6 általános helyzetű pont úgy, hogy bármely két pont távolsága különböző. Mutassuk meg, hogy megadható két olyan háromszög, amelyeknek minden csúcsa ezen pontok közül való, és a két háromszögnek van egy közös oldala, amely az egyik háromszögben a legrövidebb, a másikban a leghosszabb oldal.

(*5 pont*) Javasolta: *Róka Sándor* (Nyíregyháza)

B. 5012. Legyen $f(x)$ egész együtthatós polinom. Jelölje $f^{(n)}$ az f függvény n-szeri alkalmazását:

$$f^{(n)}(x)=\underbrace{f\Big(f\big(\ldots f}_{n}(x)\ldots\big)\Big).$$

Jelölje $k(f)$ a legkisebb olyan k pozitív egészt, melyre $f^{(k)}(x)\equiv x \pmod{13}$ teljesül minden x egész számra, ha létezik ilyen k, és legyen $k(f)=0$ egyébként. Mutassuk meg, hogy a $k(f)$ értékek között létezik legnagyobb, és határozzuk meg a maximumot.

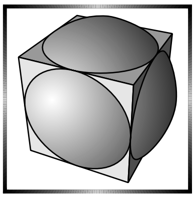
(*6 pont*)

B. 5013. Az ABC háromszög A-val szemközti hozzáírt köre az AC egyenest a B_1 pontban érinti, a BB_1 szakasz a hozzáírt kört B_2-ben metszi, és a hozzáírt körhöz B_2-ben húzott érintő a BC oldalt B_3-ban metszi. Hasonlóan, a háromszög beírt köre az AB oldalt a C_1 pontban érinti, a CC_1 szakasz a beírt kört C_2-ben metszi, és a beírt körhöz C_2-ben húzott érintő a BC oldalt a C_3 pontban metszi. Mutassuk meg, hogy $B_2B_3=C_2C_3$.

(*6 pont*)

Beküldési határidő: 2019. március 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (743–745.)



A. 743. Az $ABCD$ konvex érintőnégyszög beírt köre a BD átlót a P és Q pontokban metszi ($BP<BQ$). A beírt kör AC-re merőleges átmérője UV ($BU<BV$). Mutassuk meg, hogy az AC, PV és QU egyenesek egy ponton mennek át.

IOM 2018 (Moszkva) 2. feladata alapján

A. 744. Mutassuk meg, hogy bármely páratlan $N > 5$ egész számhoz léteznek olyan $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ vektorok a (három dimenziós) térben, amelyek páronként merőlegesek egymásra, nem párhuzamosak egyik koordináta-tengellyel sem, a koordinátáik egész számok, és $|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}| = |\mathbf{w}| = N$.

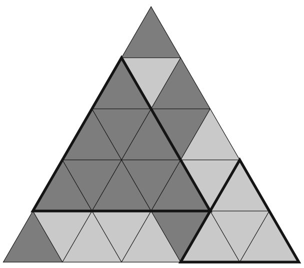
A *2018. évi Kürschák-verseny* 2. feladata alapján

A. 745. Egy konvex poliéder minden lapja egy óramutatót hordoz; a mutatók mindig valamelyik élben szomszédos lap felé mutatnak. Minden perc végén valamelyik lap mutatója – az órajárás szerinti irányban – elfordul a következő lap felé úgy, hogy szomszédos lapok mutatói soha nem mutatnak egymás felé. Mutassuk meg, hogy van olyan mutató, amely csak véges sokszor fordul el.

Beküldési határidő: 2019. március 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

Informatikából kitűzött feladatok

I. 475. Egy N oldalhosszúságú szabályos háromszög két fajta színű, egységnyi oldalú szabályos háromszögekből áll. Vizsgáljuk az N oldalhosszúságú háromszögben kirajzolódó egyszínű, szabályos háromszögeket. Készítsünk programot `i475` néven, amely megadja mindkét színhez a lehető legnagyobb területű szabályos háromszög oldalának hosszát.



A program olvassa be a standard bemenet első sorából az N oldalhosszúságot ($1 \leqslant N \leqslant 100$), majd a következő N sorból a háromszög adott szintjén lévő egységnyi háromszögek színének kezdőbetűjét (`k` = kék, `s` = sárga).

A program a standard kimenetre írja ki a kék, majd a következő sorba a sárga háromszögekből álló legnagyobb egyszínű, szabályos háromszög oldalhosszúságát.

Példa:

Standard bemenet (a / jel sortörést helyettesít)	**Standard kimenet**
`5`	`3`
`k / ksk / kkkks / kkkkkss / ksssskssss`	`2`

Beküldendő egy tömörített `i475.zip` állományban a program forráskódja és rövid dokumentációja, amely megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztő környezetben fordítható.

I. 476 (É). A főváros tömegközlekedési forgalomirányítási rendszerében a járművek fedélzeti számítógépekkel rendelkeznek. Egy adott időpontban az összes jármű néhány adatát lekérdezték, amelyek rendelkezésünkre állnak a `jarmu.txt`, `statusz.txt`, `tarolas.txt` és a `telep.txt` állományokban. Az állományok tabulátorral tagolt, UTF-8 kódolású szövegfájlok, az első sorok a mezőneveket tartalmazzák.

Készítsünk új adatbázist `i476` néven. A honlapunkról letölthető adatállományokat importáljuk az adatbázisba a forrásállományokkal azonos néven. Beolvasáskor állítsuk be a megfelelő adattípusokat és kulcsokat. A táblákba ne vegyünk fel új mezőt.

Táblák:

jarmu (rendszam, tipus, fajta)

rendszam	a jármű rendszáma, villamos, trolibusz pályaszáma, hajó neve (szöveg), ez a kulcs;
tipus	a jármű típusának jelölése (szöveg);
fajta	a jármű fajtája, pl.: autóbusz, troli, fogaskerekű, … (szöveg).

statusz (az, rendszam, bedatum, beido, tarolas az)

az	a bejelentkezés azonosítója (szám), ez a kulcs;
rendszam	a jármű azonosítója (szöveg);
bedatum	az utolsó bejelentkezés dátuma (dátum);
beido	az utolsó bejelentkezés ideje (idő);
tarolas az	az utolsó telephely azonosítója, amelyen tartózkodott (szám).

tarolas (az, telep_az, uzemag)

az	a jármű tárolásának azonosítója (szám), ez a kulcs;
telep_az	a járműtelep azonosítója (szám);
uzemag	a járműtelep üzemágának rövidítésé (szöveg).

telep (az, nev, kerulet, cim)

az	a járműtelep azonosítója (szám), ez a kulcs;
nev	a telep nevének rövidítése (szöveg);
kerulet	a telep kerülete (szöveg);
cim	a telep címe (szöveg).

Készítsük el a következő feladatok megoldásait. Az egyes lekérdezéseknél ügyeljünk arra, hogy mindig csak a kért értékek jelenjenek meg és más adatok viszont ne. Megoldásainkat a zárójelben lévő néven mentsük el.

1. Soroljuk fel lekérdezés segítségével a villamosok és autóbuszok kivételével azon járművek rendszámát, típusát és fajtáját, amelyek utolsó bejelentkezése 2018. augusztus előtti. (1regi)
2. Melyik kerületben vannak a villamos járműtelepek? A listában minden kerület egyszer jelenjen meg. (2kocsiszin)
3. Lekérdezéssel határozzuk meg azoknak a járműveknek a rendszámát és típusát, amelyekhez nincs járműtelep megadva. (3hiany)

4. Adjuk meg azoknak a busz járműtelephelyeknek a név rövidítését, kerületét és címét, ahol az Ikarus egyik típusa sincs. (4nincsikarus)
5. A járműparkban van néhány olyan típus, amiből csak néhány darab van. Határozzuk meg a legkisebb darabszámú autóbusz típusát és azt, hogy az hány telephelyen van. (5keves)
6. Paraméteres lekérdezés segítségével adjuk meg a paraméterként megadott rendszámú járművel azonos napon és órában bejelentkezőket. A listában a rendszámuk, a típusuk és a fajtájuk jelenjen meg. (6egyszerre)
7. Határozzuk meg lekérdezés segítségével az oszlopok sorrendjétől eltekintve a minta szerint, hogy a fővárosban melyik járműfajtából hány darab jármű van. (7osszesites)

Autóbusz (db)	Villamos (db)	Trolibusz (db)	Fogaskerekű (db)	Hajó (db)
1662	566	134	12	7

Beküldendő egy tömörített `i476.zip` állományban az adatbázis, valamint egy rövid dokumentáció, amely megadja az alkalmazott adatbázis-kezelő nevét és verziószámát.

I. 477. A bal oldali képen látható egyszemélyes játék egyszerűbb változatát mutatja a jobb oldali kép.

Az egyszerűsített forma négy egymásba fonódó körből áll, amelyek mentén egymástól egyenlő távolságra egy-egy kör került elhelyezésre a minta szerint. Mindegyik kör – egymástól függetlenül – 60°-kal elforgatható, természetesen egyszerre csak egy. A forgatás az éppen rajta lévő kis köröket „magával viszi”, így néhány forgatás után a kezdetben rendezett színösszeállítás (a kisebb körök mentén 6, azonos színű kör van) már igen nagy összevisszaságot mutathat.

A feladatunk a síkbeli változat grafikus megvalósítása. A használó választhasson: a rendezett állapotból indulva szabadon használja a játékot, vagy kérhet egy véletlenszerű (de megoldható) állapotot, amelyből indulva előállíthatja a rendezett állapotot. (Rendezett állapotnak azt tekintjük, ha a kis körök mentén egyező színek vannak, függetlenül azok elhelyezkedésétől.)

A feladat megoldását a versenykiírásban szereplő eszközökön túl a webböngészőben, vagy mobil eszközökön futó applikációval is meg lehet adni. A feltétel, hogy a megoldás tesztelhető legyen Windows, Linux vagy Android alapú operációs rendszer alatt ingyenes eszközökkel, kiegészítők telepítése nélkül.

Beküldendő egy `i477.zip` tömörített állományban a program forráskódja és a működéséhez szükséges egyéb fájlok, továbbá a hozzá kapcsolódó felhasználói dokumentáció, valamint a leírás, amely tartalmazza, hogy a forrásállomány melyik fejlesztő környezetben fordítható. Szükség esetén a tesztkörnyezetet is pontosan meg kell adni.

Az értékelésben 7 pont jár a feladat leírásának megfelelő megoldásokért, 3 pont pedig a megoldás kifinomultsága, ötletessége, használhatósága alapján történő differenciálásra szolgál.

I/S. 33. Egy adatsokaságban N féle adat van. Tudjuk minden adatról, hogy hányszor szerepel az adatsokaságban, és tudjuk azt is, hogy egy adott típusú adat törlése vagy beszúrása mennyibe kerül. Adjuk meg minden adattípusra, hogy minimum milyen költséggel érhető el adatok törlésével és beszúrásával, hogy ez az adattípus (is) az adatsokaság módusza legyen.

Bemenet: az első sorban az adattípusok N száma szerepel. A második sorban N darab szám: az i. szám azt mondja meg, hogy az i. adattípus hányszor szerepel az adatsokaságban. A harmadik sorban N darab szám van: az i. szám azt mondja meg, hogy az i. adattípusú adat beszúrása vagy törlése mennyibe kerül.

Kimenet: egy sorba írjunk ki N darab számot: az i. szám annak a minimális költsége, ami szükséges ahhoz, hogy az i. adattípus módusz legyen.

Példa:

Standard bemenet (a / jel sortörést helyettesít)	**Standard kimenet**

`11`
`8 4 5 8 1 1 2 2 4 8 1`
`1 6 1 2 17 24 4 5 4 1 2`
	`0 17 3 0 64 71 24 27 16 0 14`

Korlátok: $2 \leqslant N \leqslant 10^5$, $0 \leqslant$ a 2. és 3. bemeneti sorban levő számok $\leqslant 10^9$. *Időlimit:* 0,5 mp.

Értékelés: a pontok 20%-a kapható, hogyha $N \leqslant 100$, a 2. és 3. bemeneti sorban levő számok $\leqslant 100$; további 10% kapható, ha a 2. sor számai egyenlők; további 20% kapható, ha $N \leqslant 1000$; további 10% kapható, ha a 2. és 3. bemeneti sorban levő számok $\leqslant 10^6$; további 40% kapható az eredeti korlátokra.

Beküldendő egy `is33.zip` tömörített állományban a megfelelően dokumentált és kommentezett forrásprogram, amely tartalmazza a megoldás lépéseit, valamint megadja, hogy a program melyik fejlesztő környezetben futtatható.

S. 132. Egy ország N városa között az elektromos energiát vezetékeken szállítják. Minden vezeték két várost köt össze, elektromos energiát előállító erőmű csak a 0 indexű városban van. Két várost több vezeték is összeköthet. Egy város akkor kap áramot, ha a vezetékekkel közvetlenül vagy közvetetten összeköttetésben van az erőművel. Egy vezeték nélkülözhetetlen, ha meghibásodásakor lesz olyan város, ami nem kap áramot.

Az országnak túl költséges karbantartani az összes vezetéket, ezért úgy döntenek, hogy Q darab vezetéket eltávolítanak a hálózatból. Kíváncsiak vagyunk, hogy kezdetben hány nélkülözhetetlen vezeték van, és hogy az egyes vezetékek eltávolításával mennyivel nő a nélkülözhetetlen vezetékek száma. A vezetékek eltávolítása során sosem lesz olyan város, ami nem kap áramot.

Bemenet: az első sorban a városok N száma, a vezetékek M száma és az eltávolítandó vezetékek Q száma található. A városokat és vezetékeket is 0-tól indexeljük. A következő M sor mindegyike két város indexét tartalmazza, amiket összeköt az adott vezeték. Az utolsó Q sor mindegyike egy vezeték indexét tartalmazza, amit eltávolítanak.

Kimenet: Az első sorba írjuk ki, hogy kezdetben hány nélkülözhetetlen vezeték van. A következő Q sorba pedig azt, hogy az egyes vezetékek eltávolításával mennyi lesz a nélkülözhetetlen vezetékek száma.

Példa:

Standard bemenet (a / jel sortörést helyettesít)	**Standard kimenet**
`17 28 4`	`0`
`0 10 / 4 1 / 13 14 / 8 12 / 0 1 / 0 2`	`1`
`0 5 / 1 3 / 7 1 / 4 1 / 2 8 / 5 2 / 3 6`	`1`
`3 7 / 3 11 / 8 5 / 9 5 / 10 6 / 6 10 / 7 11`	`1`
`9 12 / 15 9 / 10 13 / 13 10 / 11 14 / 11 16`	`1`
`15 12 / 14 16`	
`0 / 2 / 1 / 3`	

Korlátok: $3 \leqslant N \leqslant 10^5$, $N-1 \leqslant M \leqslant 10^6$, $0 \leqslant Q \leqslant 10^5$. *Időlimit:* 0,5 mp.

Értékelés: a pontok 20% kapható, ha $Q=0$-ra ad jó megoldást; további 20%, ha $Q \cdot M \leqslant 10^6$; további 10%, ha az eltávolítások során végig maximum 2 nélkülözhetetlen vezeték van; további 50% az eredeti bemenetre.

Beküldendő egy `s132.zip` tömörített állományban a megfelelően dokumentált és kommentezett forrásprogram, amely tartalmazza a megoldás lépéseit, valamint megadja, hogy a program melyik fejlesztő környezetben futtatható.

A feladatok megoldásai regisztráció után a következő címen tölthetők fel:
`https://www.komal.hu/munkafuzet`
Beküldési határidő: 2019. március 10.

ERICSSON-DÍJ 2019

Felhívás díjazandó tanárok ajánlására

Beérkezési határidő: 2019. március 21. (éjfél)

Az Ericsson Magyarország 2019-ben ismét 8 kiváló pedagógust díjaz a korábbinál nagyobb összeggel, összesen 3 200 000 forinttal, így ebben az esztendőben minden díjjal 400 000 forint jutalom jár. Az elmúlt 20 év során 218 tanító, matematika- vagy fizikatanár kapta meg az Ericsson-díjat.

Az Ericsson Magyarország Kutatás-Fejlesztési Igazgatósága által 1999-ben alapított díjat általános-, vagy középiskolákban fizikát vagy matematikát oktató pedagógusok nyerhetik el. Az elismerés azért jött létre, hogy támogassa, méltassa és erősítse a magyarországi, világviszonylatban is kiemelkedő matematikai és természettudományos alapképzést. Az Ericsson Magyarország elkötelezte magát a hazai oktatás fejlesztése mellett; vállalásának fontos része ez a díj. A közel kétezer fős hazai vállalat nemcsak a telekommunikációs ipar egyik legnagyobb munkáltatója, hanem 1300 fős Kutatás-Fejlesztési Központjával a legjelentősebb telekommunikációs és informatikai kutatással, szoftverfejlesztéssel foglalkozó szellemi centrum Magyarországon. A díjra esélyes pedagógusok szakmai munkája és emberi hozzáállása teszi lehetővé, hogy a hazai műszaki és természettudományi diplomával rendelkezők tudása megfelelő szellemi értéket képviseljen, és vonzóvá tegye a beruházást infokommunikációs csúcstechnológiák kutatás-fejlesztésébe Magyarországon.

Az ERICSSON-DÍJAKAT 2019-ben is két kategóriában ítélik oda:

1. „Ericsson a matematika és fizika népszerűsítéséért” díj

Két matematikát és két fizikát tanító pedagógus (általános vagy középiskolai) részére egyenként **400 000** forinttal járó díj.

Azok kaphatják, akik iskolájukban és azon túl is évek óta a legtöbbet teszik a tantárgyuk iránti érdeklődés felkeltéséért és megszerettetéséért. Élen járnak az innovatív módszerek kidolgozásában és népszerűsítésében. A bírálók figyelembe veszik, ha az ajánlott pedagógus tanítványaival aktívan bekapcsolódott a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok vagy az ABACUS folyóiratának pontversenyeibe, egyéb országos matematika és fizika versenyekbe, lendületes, kezdeményező egyéniségével vagy új technológiák bevezetésével vonzóvá teszi szaktárgyát.

2. „Ericsson a matematika és fizika tehetségeinek gondozásáért” díj

Két matematikát és két fizikát tanító pedagógus (általános vagy középiskolai) részére egyenként **400 000** forinttal járó díj.

Azok kaphatják, akiknek tanítványai 2010 óta szaktárgyuk legjelentősebb országos vagy nemzetközi versenyein (például: a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok vagy az ABACUS versenyek; a Varga Tamás, Kalmár László, Zrínyi Ilona, Arany Dániel matematikaversenyek; matematika vagy fizika OKTV; Öveges József, Jedlik Ányos, Mikola Sándor, Szilárd Leó fizikaversenyek, Kürschák József matematikai tanulóversenyek vagy Eötvös Loránd fizikaversenyek valamelyikén) elnyerték az első öt díj egyikét, illetve nemzetközi matematikai vagy fizikai diákolimpiákon arany-, ezüst-, vagy bronzérmet, vagy dicséretet szereztek.

A díjakat a MATFUND Középiskolai Matematikai és Fizikai Alapítvány ítéli oda, a Bolyai János Matematikai Társulat és az Eötvös Loránd Fizikai Társulat Ericsson-díj bizottságainak ajánlása alapján. A díjazandókra írásos javaslatot nyújthatnak be szakmai és társadalmi szervezetek, a javasolt tanár tevékenységét ismerő kollégák, tanítványok. Az ajánlásnak ki kell emelnie a javasolt személy szakmai és emberi jellemzését, különös tekintettel azokra a szempontokra, amelyek alapján a díjra érdemesnek tartják. Pályázatot csak a különböző kategóriák elektronikus pályázati adatlapjain nyújthatnak be. Ha a korábbi években már javasolt tanár nem kapott díjat, a felterjesztést (aktualizálva) kérjük, ismételjék meg! A Rátz Tanár Úr Életműdíj három Alapítója, a Graphisoft SE, a Richter Gedeon Nyrt. és az Ericsson Magyarország megállapodása szerint egy személynek három éven belül az Alapítók által meghirdetett díjak közül csak egy adható, továbbá, aki megkapta a Rátz Tanár Úr Életműdíjat, az Alapítók egyéb díjaira már nem jelölhető. Ericsson-díjas tanár 8 év elteltével terjeszthető fel újra az Ericsson-díjra.

A pályázati adatlapok **2019. március 21-én éjfélig (23:59)** lesznek elérhetőek a `https://eth.org.hu/ericsson-dij-2019` weboldalon. A pályázatokat kizárólag online lehet benyújtani. Kérdés esetén a következő e-mail címre írhatnak: `matfund@komal.hu`. A szakmai bizottságok a benyújtott írásos javaslatok alapján részletes indoklást mellékelve javaslatot tesznek a jelöltek sorrendjére, amelynek alapján a MATFUND kuratóriuma 2019. április 18-ig dönt a díjazandók személyéről.

A díjkiosztó ünnepségre 2019. május végén kerül sor az Ericsson Magyarország székházában.

„Egy álom megvalósul”
Tájékoztató az Ericsson meghívásos pályázatáról

A 2019. évi Ericsson-díjazott tanárok iskolái az eredmény kihirdetését követően kísérleti, informatikai eszközök beszerzésére meghívásos pályázatot adhatnak be. A pályázóknak be kell mutatniuk, hogy milyen programot terveznek a következő tanévben az általuk szükségesnek tartott eszközökkel, és hogy ez a tevékenység hogyan járul hozzá az iskolában a matematika, a természettudományok, vagy az informatika népszerűsítéséhez, oktatásához vagy tehetségeinek gondozásához.

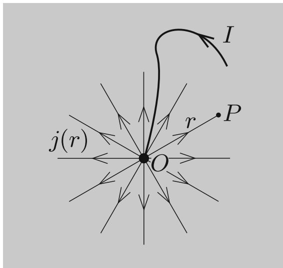
A 2019-es Ericsson-díjazottak iskoláinak igazgatói megkapják a részletes pályázati felhívást. A pályázói körbe tartozó iskolák közül egy nyertes kaphat legfeljebb 1 millió forintot. A pályázatokat az Ericsson Magyarország Kutatás-Fejlesztési Igazgatósága bírálja el a pályázati útmutatóban leírt szempontok alapján. Az Ericsson fenntartja a jogot, hogy nem megfelelő minőségű pályázatok esetén ne ítélje oda ezt az összeget.

Síkbeli elektromos vezetési problémák II. rész (fizikai alkalmazások)

A cikk I. (a múlt havi számunkban megjelent) részében általánosságban tárgyaltuk, hogy miként használhatók fel a sík arány- és szögtartó transzformációi különböző síkbeli áramlási (elektromos vezetési, hővezetési és folyadékáramlási) problémák összekapcsolására, és konkrétan megadtunk néhány ilyen transzformációt (ún. konform leképezést). Most alkalmazzuk ezeket fizikai problémák megoldására. A tárgyalást kiegészítjük még két – bizonyos esetekben nagyon hasznos – eljárás ismertetésével: a szimmetriák figyelembe vételének lehetőségével, illetve a tükrözési módszer alkalmazásával.

Végtelen síklap

Vezessünk be egy nagy kiterjedésű, vékony (δ vastagságú és ϱ fajlagos ellenállású), homogén és izotrop síklapba egy O pontban I erősségű áramot. Határozzuk meg két, a síklap felületén lévő pont közötti feszültséget! A *forgási szimmetria* miatt az O pont körül *sugaras* áramlási tér alakul ki (*5. ábra*), azaz ettől a ponttól r távolságra a felületi áramsűrűség



5. ábra

(1) $$j(r)=\frac{I}{2r\pi\delta},$$

hiszen a bevezetett I erősségű áram a $2r\pi\delta$ felületen keresztül, szimmetrikusan áramlik szét a lapban.

Ahhoz, hogy két tetszőleges pont között meghatározzuk a feszültséget, szükségünk van az (ugyancsak forgásszimmetrikus, emiatt sugaras irányítottságú) elektromos térerősség $E(r)$ nagyságára. A differenciális Ohm-törvény szerint $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})/\varrho$, így tehát

$$E(r)=\frac{\varrho I}{2r\pi\delta}.$$

A lemez tetszőleges P pontjának potenciálját a térerősség segítségével adhatjuk meg:

(2) $$\Phi(r)=-\int_{r_0}^{r}E(r)\mathrm{d}r=-\frac{\varrho I}{2\pi\delta}\int_{r_0}^{r}\frac{\mathrm{d}r}{r}=\frac{\varrho I}{2\pi\delta}\ln\frac{r_0}{r},$$

ahol r_0 egy önkényesen választott Q pont O-tól mért távolsága, r pedig a P pont távolsága az áram bevezetési pontjától. A potenciált a Q pontban nullának választjuk. Ezzel, ha a két pont r_1, illetve r_2 távolságra van O-tól, a közöttük lévő feszültség:

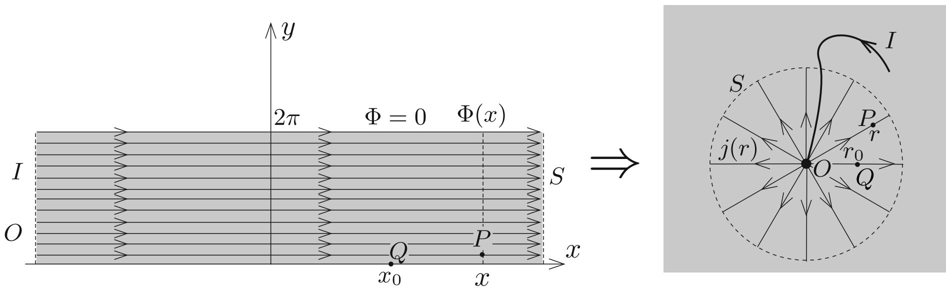
$$U_{1,2} = \Phi(r_2) - \Phi(r_1) = \frac{\varrho I}{2\pi\delta} \ln \frac{r_1}{r_2}. \tag{3}$$

Ugyanezt az eredményt a cikk I. részében leírt „szalag-leképezés” segítségével is megkaphatjuk. Ha egy 2π széles, δ vastagságú, vezető szalagban összesen I áram folyik[1], akkor a szalag széleivel párhuzamos irányú áramsűrűség nagysága mindenhol $j_0 = I/(2\pi\delta)$, az elektromos térerősség tehát

$$\boldsymbol{E} = (E_x, 0); \qquad E_x = \varrho j_0 = \frac{I\varrho}{2\pi\delta}.$$

Ennek megfelelően az elektromos potenciál a szalag x koordinátával rendelkező P pontjában (ha az x_0 helyen a potenciált nullának vesszük):

$$\Phi(x) = (x_0 - x) \cdot E_x = (x_0 - x)\frac{I\varrho}{2\pi\delta}.$$



6. ábra

Alkalmazzunk most egy olyan leképezést, ami a szalagot a végtelen síklapba viszi át (*6. ábra*). Az $r = \mathrm{e}^x$ összefüggésnek megfelelően (az „új koordináták” jelölésénél az egyszerűség kedvéért a vesszőket nem írjuk ki) az áram O bevezetési pontjai ($x = -\infty$) a síklap origójába ($r = 0$), az S kivezetési pontok ($x = +\infty$) pedig egy „végtelen távoli” körbe mennek át. A potenciál az origótól $r = \mathrm{e}^x$ távol lévő P pontjában

$$\Phi(r) = (x_0 - x)\frac{\varrho I}{2\pi\delta} = \frac{\varrho I}{2\pi\delta} \ln \frac{r_0}{r}$$

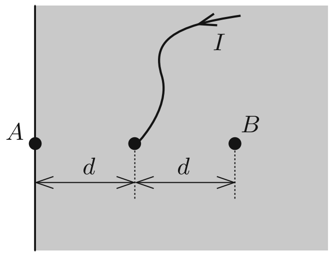
(ahol $r_0 = \mathrm{e}^{x_0}$), két tetszőleges pont közötti feszültség pedig

$$U_{1,2} = \Phi(r_2) - \Phi(r_1) = \frac{\varrho I}{2\pi\delta} \ln \frac{r_1}{r_2},$$

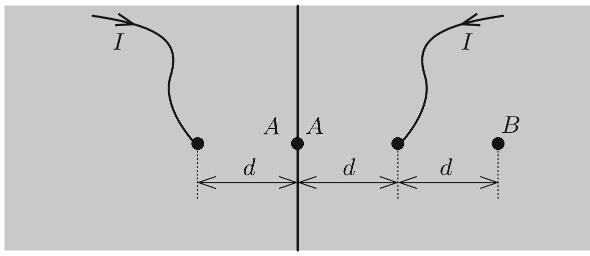
[1] Ilyen árameloszlás úgy hozható létre, hogy a nagyon („végtelenül”) hosszú szalag elegendően távoli végeinél sok, kicsi, jól vezető, a szalag hosszanti oldaléleire merőleges egyenes mentén elhelyezkedő elektródákra akkora feszültséget kapcsolunk, ami éppen I erősségű áramot eredményez.

ahogy ezt már – más módszerrel – korábban megkaptuk.

Tekintsük a *7. ábrán* látható, félvégtelen síklapot (végtelen félsíkot), amelybe a szélétől d távol lévő pontnál I erősségű áramot vezetünk, és számítsuk ki az A és B pontok közötti feszültséget. Ebben az esetben az áramsűrűség meghatározásánál figyelembe kell vennünk, hogy a lemez szélén az áramsűrűség-vektornak nem lehet határfelületre merőleges komponense. Ha viszont a félvégtelen síklapot az áramot bevezető elektródával együtt *tükrözzük* a lap szélére (határvonalára) a *8. ábrán* látható módon, a félvégtelen síklap végtelen síklapba vihető át úgy, hogy az áramsűrűség-eloszlás az eredeti lemezben változatlan marad, miközben a határfeltétel is teljesül.



7. ábra



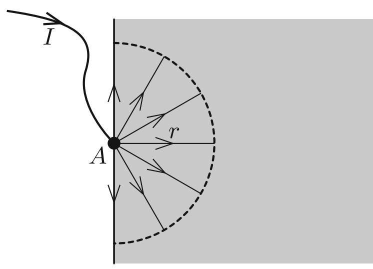
8. ábra

A tükrözés után kapott „teljes sík” elrendezésben mindkét elektróda hatását figyelembe kell vennünk. Ezt úgy tehetjük meg, hogy először csak az egyik, majd csak a másik elektróda jelenlétét tekintjük, és minden pontban a két eset potenciál- és árameloszlásának összegét, *szuperpozícióját* vesszük.[2] Mivel mindkét elektródán az áram a lemezbe befelé folyik, ezért a potenciálok előjelei azonosak. Tehát a végtelen síklapnál levezetett képlet alapján a feszültség nagysága (abszolút értéke)

$$U_{AB} = \left| \frac{\varrho I}{2\pi\delta} \ln \frac{d}{d} + \frac{\varrho I}{2\pi\delta} \ln \frac{d}{3d} \right| = \frac{\varrho I}{2\pi\delta} \ln 3.$$

Érdemes megemlíteni, hogy abban az esetben, ha az áramot a lemez szélén lévő A pontban vezetjük be, akkor nemcsak a feszültséget, hanem az áramsűrűséget is könnyen megadhatjuk. Ilyenkor ugyanis a határvonalra történő tükrözés után egy végtelen síklemezt kapunk, amelybe most $2I$ áramot vezetünk be az A pontban. Ennél ismerjük, hogy az áramsűrűség sugaras szerkezetű, és mivel a tükrözés során a félvégtelen lemezben az áramsűrűség eloszlása nem változik, ott a *9. ábrán* látható árameloszlás alakul ki:

$$j(r) = \frac{2I}{2r\pi\delta} = \frac{I}{r\pi\delta}. \tag{4}$$



9. ábra

[2] A szuperponálhatóság azért „működik”, mert az elektromos vezetést leíró Ohm-törvény lineáris.

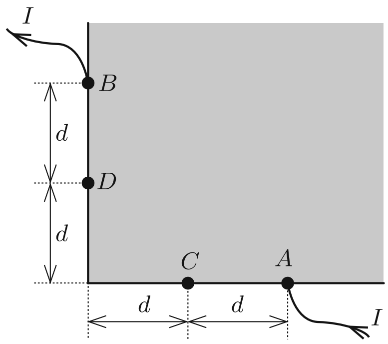
A végtelen síklemez esetéhez hasonlóan a félvégtelen lemez egy tetszőleges pontjának potenciálja

$$\Phi(r) = \frac{\varrho I}{\pi\delta} \ln \frac{r_0}{r}, \tag{5}$$

és ennek megfelelően két pont közötti potenciálkülönbség

$$U_{1,2} = \frac{\varrho I}{\pi\delta} \ln \frac{r_1}{r_2}. \tag{6}$$

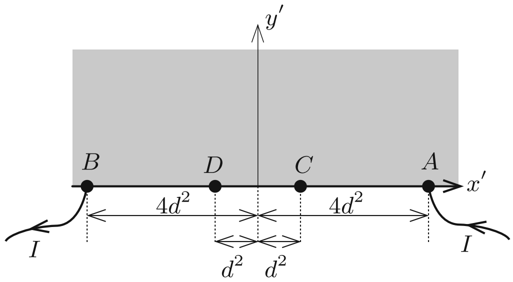
Derékszögű sarok



10. ábra

Határozzuk meg *10. ábrán* látható, nagy kiterjedésű fémlemez derékszögű sarkánál lévő C és D pontok közötti feszültséget, ha az A pontba bevezett áramot a B pontban vezetjük el. A feladat tükörelektródákkal történő megoldása megtalálható [1]-ben. Most azonban a transzformációs módszert fogjuk alkalmazni.

A vizsgálandó elrendezés egy legyezőleképezéssel ($n = 2$-szeresére kinyitott legyezővel) átvihető egy végtelen félsíkba (*11. ábra*), ami tükrözéssel végtelen síklappá transzformálható. A derékszögű hajlat egyik széle,



11. ábra

ami az x tengely mentén fekszik, a vele párhuzamos x' tengelybe transzformálódik, de a rajta fekvő C és A pontok az origótól nem d és $2d$ távolságra, hanem rendre d^2 és $4d^2$ távolságra kerülnek. A másik, y tengely mentén lévő oldal a leképezés után a $-x'$ tengelyre kerül, és a rajta elhelyezkedő D és B pontok az origótól rendre d^2 és $4d^2$ távolságra lesznek. Mivel eredetileg az áram be- és kimeneti pontjai a lemez szélein vannak, ezért a (6) egyenletet kell használnunk. Először csak a bemenő áram hatását vizsgáljuk, majd a kimenő áramét ellentétes előjellel, és a két eset szuperpozíciójával kapjuk meg a végeredményt. A feszültség nagysága:

$$U_{CD} = \left| \frac{\varrho I}{\pi\delta} \ln \frac{3d^2}{5d^2} - \frac{\varrho I}{\pi\delta} \ln \frac{5d^2}{3d^2} \right| = \frac{2\varrho I}{\pi\delta} \ln \frac{5}{3}.$$

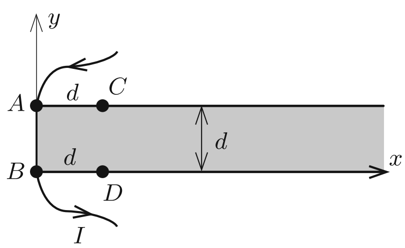
Az eredmény megegyezik az [1]-ben meghatározottal.

A $\varphi \to n\varphi$ és $r \to r^n$ $(n \neq 0)$ általánosított legyező-leképezést felhasználhatjuk π/n szögű sarokkal rendelkező, nagy méretű lemezbe vezetett áramok esetén. Ilyenkor a csúcsos szöglet félvégtelen síkba megy át. Akkor is jól használható a legyező-leképezés, ha egy nagy méretű, de vékony lemezből kialakított kúp palástjába vezetünk áramot, hiszen az áram bevezetési pontjával szemközti alkotó mentén felvágva a kúp palástját és kiterítve azt, egy sík lemezsarkot kapunk. A felvágott palást újonnan keletkezett két határvonalán nem folyhat át áram, éppen úgy, mint – a szimmetria miatt – a felvágatlan kúppalást megfelelő alkotóján sem folyt át áram eredetileg.

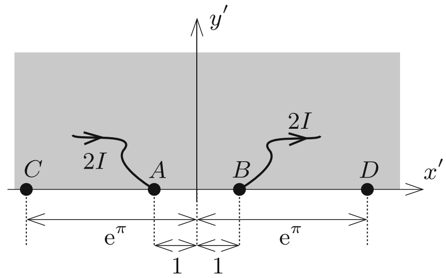
Félvégtelen szalag

A *12. ábrán* látható, $x - y$ síkban elhelyezkedő, d szélességű, félvégtelen szalag A csúcsába I erősségű áramot vezetünk be, a B csúcsából pedig elvezetjük azt. Határozzuk meg, mekkora lesz a feszültség a csúcsoktól d távolságban lévő C és D pontok között!

Tükrözzük először a szalagot az y-tengelyre, hogy félvégtelen helyett a $-\infty < < x < +\infty$ abszcisszákkal jellemzett, mindkét irányban végtelen szalagot kapjunk. Ez együtt jár azzal, hogy az A pontban $2I$ erősségű áramot vezetünk be, és a B pontból pedig $2I$-t vezetünk ki. Ezzel az áramvonal-eloszlás az eredeti szalagban nem változik meg. Célunk az, hogy a szalag pontjai a leképezés után az $x' - y'$ koordinátarendszer $y' \geqslant 0$ félsíkjában helyezkedjenek el, azaz az egyes pontok koordinátái $x' = r' \cos\varphi'$, $y' = r' \sin\varphi'$ legyenek, ahol $r' \in [0;\infty[$ az origótól mért távolság, $\varphi' \in [0;\pi]$ a helyvektor és a pozitív x' tengely által bezárt szög. A tükrözött szalag egyes pontjainak koordinátái a leképezés előtt: $x \in\ ]-\infty;\infty[$ és $y \in [0;d]$.



12. ábra



13. ábra

A megfelelő leképezés két lépésben valósítható meg. Alkalmazzunk először egy $\lambda = \pi/d$ léptékű nyújtást, ekkor a szalag szélessége π-re változik, majd alkalmazzuk a szalag-leképezést!

Az áram be- és kivezetési, illetve a feszültségmérés pontjainak transzformációja:

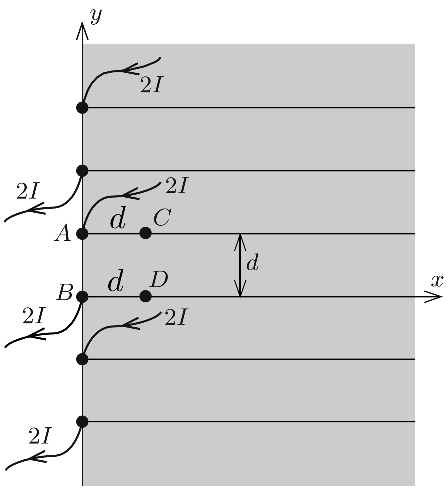
$$A: \quad (x=0,\ y=d) \quad \Rightarrow \quad (x=0,\ y=\pi) \quad \Rightarrow \quad (r=1,\ \varphi=\pi),$$
$$B: \quad (x=0,\ y=0) \quad \Rightarrow \quad (x=0,\ y=0) \quad \Rightarrow \quad (r=1,\ \varphi=0),$$

$$C: \quad (x=d,\ y=d) \quad\Rightarrow\quad (x=\pi,\ y=\pi) \quad\Rightarrow\quad (r=\mathrm{e}^{\pi},\ \varphi=\pi),$$
$$D: \quad (x=d,\ y=0) \quad\Rightarrow\quad (x=d,\ y=0) \quad\Rightarrow\quad (r=\mathrm{e}^{\pi},\ \varphi=0).$$

A leképezés utáni helyzetet a *13. ábra* mutatja.

A C és D pontok közötti feszültséget a derékszögű hajlatnál látottak szerint számíthatjuk ki:

$$U_{CD}=\left|\frac{2\varrho I}{\pi\delta}\ln\frac{\mathrm{e}^{\pi}-1}{\mathrm{e}^{\pi}+1}-\frac{2\varrho I}{\pi\delta}\ln\frac{\mathrm{e}^{\pi}+1}{\mathrm{e}^{\pi}-1}\right|=\frac{4\varrho I}{\pi\delta}\ln\frac{\mathrm{e}^{\pi}+1}{\mathrm{e}^{\pi}-1}\approx 0{,}0865\cdot\frac{4\varrho I}{\pi\delta}.$$



14. ábra

A feladat megoldható tükrözéssel is. Ha a szalagot az x tengellyel párhuzamos oldalaira tükrözzük addig, ameddig az első és a negyedik síknegyedet teljesen le nem fedjük, akkor eljutunk a félvégtelen lemez problémájához (lásd a *14. ábrát*). Mivel az elektródákat is tükrözzük, ezért a megfelelő helyeken (végtelen sok különböző pontban) $2I$ áram folyik be és $2I$ folyik ki. Ezek alapján (6) felhasználásával megkaphatjuk, hogy a C és D pontok közötti feszültség nagysága

$$U_{CD}=\left|\frac{2\varrho I}{\pi\delta}\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{\left(1+(2n)^2\right)\left(1+4(n-1)^2\right)}{\left(1+(2n-1)^2\right)^2}\right|.$$

A fenti összeg kiszámítása meglehetősen nehéz feladat. A `WolframAlpha` segítségével közelítőleg 0,173 adódik, amivel a feszültségre az előző (leképezéses) módszerrel kapott eredménnyel egyező kifejezést kapjuk.

Egy Eötvös-verseny feladat

A 2016-os Eötvös-verseny 3. feladata egy síkbeli vezetési jelenséggel foglalkozik:

Egy R sugarú, d vastagságú ($\delta \ll R$), fajlagos ellenállású fémkorong A pontjába I erősségű áramot vezetünk, B pontjából pedig elvezetjük azt. Mekkora feszültség mérhető a 15. ábrán *látható C és D pontok között?*[3]

[3] A feladat eredeti szövegét, jelöléseit kicsit megváltoztattuk, hogy a probléma a cikkben leírtakkal könnyebben összehasonlítható legyen.

A fémkorong határának egyenlete síkbeli polárkoordinátákkal kifejezve: $r(\varphi) = 2R\cos\varphi$. Alkalmazzunk a korongra egy általánosított legyező-transzformációt $n = -1$ szögnyújtási faktorral, vagyis legyen

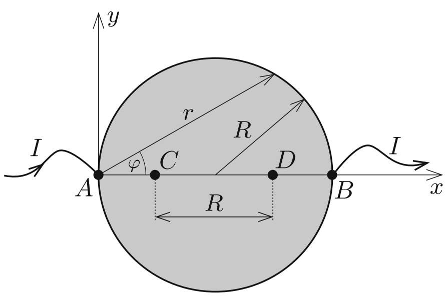
$$\varphi' = -\varphi, \qquad r' = \frac{1}{r}.$$

A derékszögű koordináták közötti kapcsolat:

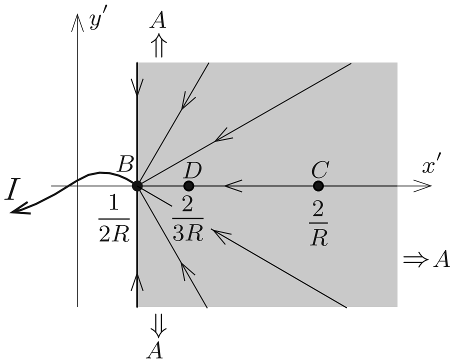
$$x' = \frac{x}{x^2+y^2}, \qquad y' = -\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Ennek megfelelően a lemezt határoló körvonal képe a leképezés után:

$$x' = r'\cos\varphi' = \frac{1}{r(\varphi)}\cos\varphi \equiv \frac{1}{2R}, \qquad y' = r'\sin\varphi' = -\frac{1}{r(\varphi)}\sin\varphi \equiv -\frac{1}{2R}\,\mathrm{tg}\,\varphi.$$



15. ábra



16. ábra

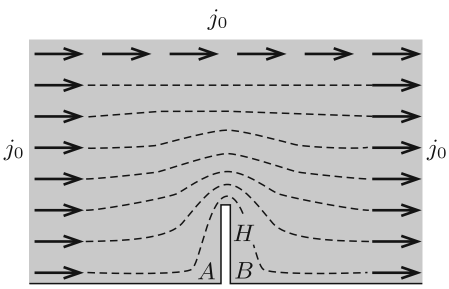
Látható, hogy a megadott leképezés a fémkorongot az $x' \geqslant \frac{1}{2R}$ félvégtelen síklapba transzformálja (*16. ábra*), és a transzformációs összefüggésekből a kérdéses pontok koordinátáit is könnyen leolvashatjuk. A versenyfeladat megoldása tehát

$$U_{CD} = \frac{\varrho I}{\pi\delta}\ln\frac{BC}{BD} = \frac{\varrho I}{\pi\delta}\ln\frac{\frac{2}{R}-\frac{1}{2R}}{\frac{2}{3R}-\frac{1}{2R}} = \frac{\varrho I}{\pi\delta}\ln 9 = \frac{2\varrho I}{\pi\delta}\ln 3,$$

egyezésben a [2]-ben meghatározott eredménnyel.

Egy gyakorlófeladat

Befejezésül egy olyan feladatot ismertetünk (megoldás nélkül), amelyen ellenőrizhetik az Olvasók, hogy mennyire értették meg a leírtakat, és önállóan tudják-e alkalmazni a bemutatott leképezési módszereket.



17. ábra

Egy végtelen félsík a határvonalára merőlegesen H magasságú „bemetszést” tartalmaz. (A bemetszés szélessége és a lemez δ vastagsága sokkal kisebb H-nál.) A bemetszéstől nagyon távol a vezető lemezben az egyenes határvonallal párhuzamosan j_0 áramsűrűségű áram folyik (17. ábra). *Mekkora a lemez anyagának fajlagos ellenállása, ha az A és B pontok között U_0 feszültséget mérhetünk?*

Útmutatás: Próbáljuk az elektromos áramlási képet legyező-leképezés(ek) és eltolás egymás utáni alkalmazásával olyan árameloszlásba transzformálni, amelynek $\Phi(\boldsymbol{r})$ potenciálját jól ismerjük!

Köszönetnyilvánítás és hivatkozások

Az egyik szerző (E. P.) szeretne köszönetet mondani tanárának, *Tófalusi Péternek,* valamint *Vigh Máténak* a cikk megírásában nyújtott segítségükért.

Hivatkozások:

[1] Gnädig P., Honyek Gy., Vigh M.: *333+ furfangos feladat fizikából,* 315. feladat, Typotex (2017).

[2] Tichy G., Vankó P., Vigh M.: *Beszámoló a 2016. évi Eötvös-versenyről,* KöMaL (2017/2), 105–112.

Elek Péter
Debreceni Ref. Koll.
Dóczy Gimn. 12. évf.

Szász Krisztián
BME Fizikai Intézet,
Budapest

Megoldásvázlatok a 2019/1. szám emelt szintű fizika gyakorló feladatsorához

Tesztfeladatok

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
C	C	D	D	C	C	D	D	A	C	C	B	B	D	D

Számolásos feladatok

1. *a*) Először foglalkozzunk a gyorsulás–idő grafikonnal (*1. ábra*)! A gyorsulás definíciója:

$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

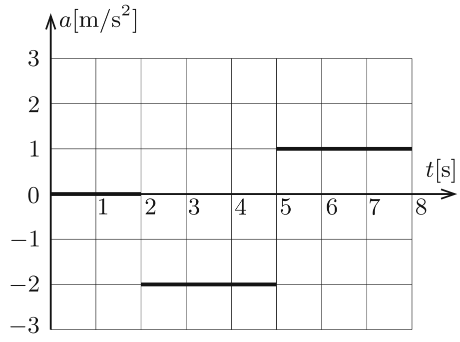
A sebesség–idő grafikonon látható, hogy a függvény lineáris szakaszokból áll, ezeken a szakaszokon tehát a gyorsulás állandó:

$$a_1=\frac{\Delta v_1}{\Delta t}=\frac{\left(3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)-\left(3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)}{(2\ \mathrm{s})-0}=0,$$

$$a_2=\frac{\Delta v_2}{\Delta t}=\frac{\left(-3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)-\left(3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)}{(5\ \mathrm{s})-(2\ \mathrm{s})}=$$

$$=-2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2},$$

$$a_3=\frac{\Delta v_3}{\Delta t}=\frac{0-\left(-3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)}{(8\ \mathrm{s})-(5\ \mathrm{s})}=1\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$



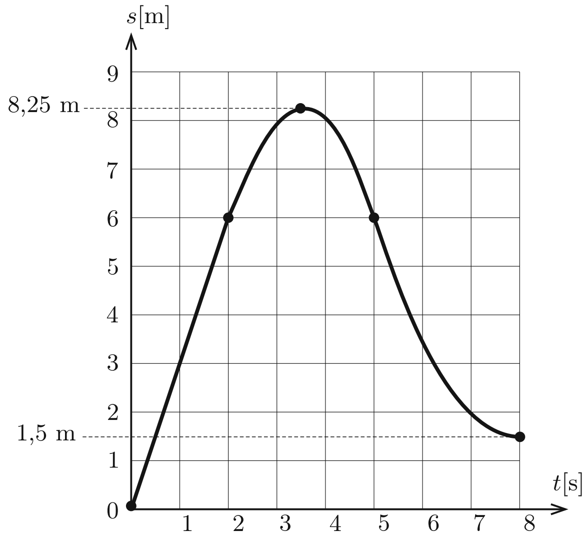
1. ábra

Az elmozdulás–idő grafikon (*2. ábra*) elkészítését a következő megállapítások segítik:

1. A test 3,5 s ideig előre halad, majd ezután irányt változtat, és visszafelé mozog.

2. A mozgás első szakasza egyenletes mozgás, a többi része egyenletesen változó, ezért az első rész grafikonja egyenes szakasszal, a többi része pedig parabolával szemléltethető.

3. A megtett utak legegyszerűbben a sebesség–idő függvény grafikonjának „görbe alatti területéből” számíthatók.



2. ábra

Célszerű a mozgást 4 részre bontani:

0-tól 2 s-ig: az elmozdulás 6 m. A grafikon ezen szakasza egy pozitív meredekségű egyenes,

2 s-tól 3,5 s-ig: az elmozdulás 2,25 m, és az intervallum végén a sebesség nulla.

3,5 s-tól 5 s-ig: az elmozdulás $-2{,}25$ m, hiszen a test már visszafele mozog. Az állandó negatív gyorsulás miatt a $2\text{ s} < t < 5$ s-os intervallumban az elmozdulás–idő függvény lefelé nyíló parabolával szemléltethető.

5 s-tól 8 s-ig: az elmozdulás $-4{,}5$ m. A test sebessége negatív, tehát a test továbbra is visszafelé mozog. A gyorsulás viszont pozitív, a grafikon felfelé nyíló parabola. A végsebesség nulla, a grafikon érintője $t = 8$ s pillanatban vízszintes.

b) Az átlagos sebességnagyság definíció szerint a megtett út és a megtételéhez szükséges idő hányadosa:

$$v_{\text{átlag}} = \frac{\sum |\Delta s|}{\sum \Delta t} = \frac{6\text{ m} + 2{,}25\text{ m} + 2{,}25\text{ m} + 4{,}5\text{ m}}{8\text{ s}} \approx 1{,}88\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Megjegyzés. A fenti módon számított „átlagsebességet” mutatják az GPS-es navigációs eszközök és az útvonaltervező okostelefonok, ezt tartják számon a zárt hurok alakú pályán haladó autóversenyzők és a kerékpárosok is. Nem tévesztendő össze ez a mennyiség az elmozdulásvektor és a mozgás összidejének hányadosával, ami vektoriális mennyiség. Egy olyan futóversenynél, ahol a rajt és a cél ugyanott van, a vektoriális átlagsebesség nyilván nulla, míg a sebesség nagyságának átlaga attól eltérő érték.

2. *a*) Az áramforrás effektív teljesítménye (a szokásos jelöléseket használva) a következőképpen adható meg:

$$P_{\text{eff}} = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos\varphi = I_{\text{eff}} Z \cdot I_{\text{eff}} \cdot \frac{R}{Z} = I_{\text{eff}}^2 R.$$

Innen

$$I_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{P_{\text{eff}}}{R}} = \sqrt{\frac{15\text{ W}}{60\ \Omega}} = 0{,}5\text{ A} \qquad \text{és} \qquad Z = \frac{U_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} = \frac{230\text{ V}}{0{,}5\text{ A}} = 460\ \Omega.$$

Az impedancia ismeretében meghatározható a tekercs induktív ellenállása:

$$X_L = \sqrt{Z^2 - R^2} = \sqrt{(460\ \Omega)^2 - (60\ \Omega)^2} = 456\ \Omega,$$

és az áramforrás frekvenciája:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{X_L}{2\pi L} = \frac{1}{2\pi}\,\frac{456\ \Omega}{0{,}25\text{ H}} = 290\text{ Hz}.$$

b) A feszültség és az áramerősség közötti fáziseltolódás szöge:

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z} = \frac{60\ \Omega}{460\ \Omega} = 0{,}13 \qquad \Rightarrow \qquad \varphi = 82{,}5^\circ.$$

A soros $R - L$ körben a szinuszosan váltakozó áramerősség fázisa tehát $82{,}5^\circ$-kal *késik* a kapocsfeszültséghez képest.

3. *a*) Az állapotegyenlet szerint $pV = nRT$, ahonnan a hidrogéngáz mólszáma (a kezdeti állapot adatait felhasználva):

$$n = \frac{pV}{RT} = \frac{(4\cdot 10^5\ \text{Pa})(2{,}5\cdot 10^{-3}\ \text{m}^3)}{8{,}31\ \frac{\text{J}}{\text{mol K}}\cdot 400\ \text{K}} = 0{,}30\ \text{mol}.$$

Ennyi gázban

$$N = n\cdot N_{\text{A}} = 0{,}30\cdot(6\cdot 10^{23}) = 1{,}8\cdot 10^{23}$$

hidrogénmolekula található.

b) A 2-es állapot hőmérsékletét az egyesített gáztörvény segítségével határozhatjuk meg:

$$T_2 = \frac{p_2V_2}{p_1V_1}T_1 = 384\ \text{K},$$

a belső energiák aránya pedig

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{384\ \text{K}}{400\ \text{K}} = 0{,}96.$$

4. *a*) A test egyensúlyban van, ha a rá ható erők kiegyenlítik egymást. A szimmetria miatt a rugóerők vízszintes összetevőire az egyensúly feltétele biztosan teljesül. A függőleges irányú összetevőkre

$$2F_{\text{rugó}}\cdot\sin\alpha = mg,\quad \text{ahol}\quad F_{\text{rugó}} = D\,\Delta x = D(x-x_0)$$

és α a rugó vízszintessel bezárt szögét jelenti. A rugó megnyúlt hossza Pitagorasz tétele szerint

$$x = \sqrt{x_0^2+h^2} = \sqrt{(60\ \text{cm})^2+(20\ \text{cm})^2} = 63{,}2\ \text{cm}.$$

Innen a rugóerő

$$F_{\text{rugó}} = 200\ \frac{\text{N}}{\text{m}}\cdot(0{,}632\ \text{m}-0{,}6\ \text{m}) = 6{,}4\ \text{N}.$$

A test tömege:

$$m = \frac{2F_{\text{rugó}}\cdot\sin\alpha}{g} = \frac{2\cdot 6{,}4\ \text{N}\ \frac{20\ \text{cm}}{63{,}2\ \text{cm}}}{9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 0{,}41\ \text{kg}.$$

b) A test sebessége akkor lesz a legnagyobb, amikor a gyorsulása éppen nulla. Ez az erőegyensúlynak megfelelő, a kiindulási helyzethez képest h mélységű helyzetben következik be. Itt a test gravitációs helyzeti energiája a kezdeti értékhez viszonyítva

$$E_{\text{helyzeti}} = -mgh = -0{,}81\ \text{J},$$

a rugók rugalmas energiája pedig

$$E_{\text{rugó}} = 2\cdot\frac{1}{2}D(x-x_0)^2 = 200\ \frac{\text{N}}{\text{m}}\cdot(0{,}632\ \text{m}-0{,}6\ \text{m})^2 = 0{,}20\ \text{J}.$$

A mechanikai energia megmaradási tétele szerint

$$E_{\text{helyzeti}} + E_{\text{rugó}} + \frac{1}{2}mv^2 = 0,$$

ahonnan a test maximális sebessége

$$v = \sqrt{\frac{2}{0{,}41\ \text{kg}}(0{,}81\ \text{J} - 0{,}20\ \text{J})} \approx 1{,}7\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

c) Ha a test eljutna $H = 40$ cm mélységbe, a helyzeti energiája

$$E_{\text{helyzeti}} = -mgH = -1{,}62\ \text{J}$$

lenne, a rugók rugalmas energiája pedig

$$E_{\text{rugó}} = 2 \cdot \frac{1}{2}D\left(\sqrt{x_0^2 + H^2} - x_0\right)^2 = 2{,}93\ \text{J}.$$

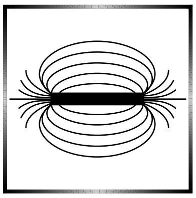
Ezek szerint a test mozgási energiája ezen a helyen

$$\frac{1}{2}mv^2 = 1{,}62\ \text{J} - 2{,}93\ \text{J} = -1{,}31\ \text{J} < 0$$

lenne, ami nem lehetséges. A test tehát *nem ér el* 40 cm mélységbe.

Megjegyzés. Első pillanatra talán meglepő az eredmény, mert a 40 cm-es mélység éppen az egyensúlyi helyzet 20 cm-es mélységének kétszerese. Ugyanakkor vegyük figyelembe, hogy a test mozgása *nem* harmonikus rezgőmozgás, mert a két rugó által kifejtett eredő erő nem egyenesen arányos a test elmozdulásával. Numerikus vagy grafikus közelítő módszerekkel belátható, hogy a test legfeljebb $h_{\max} \approx 32$ cm mélységig süllyed le a rugók vízszintes helyzetének megfelelő helyzete alá.

Markovits Tibor
Budapest



Fizika feladatok megoldása

P. 5044. *András és Béla ikertestvérek. A* 20. *születésnapjukon sorsuk megváltozik: András a Földön marad, Béla viszont egy hosszabb űrexpedícióra indul. Az űrhajó állandó sebességgel távolodik a Földtől. Egy év múlva András készít egy fényképet a születésnapi tortájáról, és rádiójelekkel elküldi azt Bélának, aki azt épp a* 22. *születésnapján kapja meg az űrhajóban.*

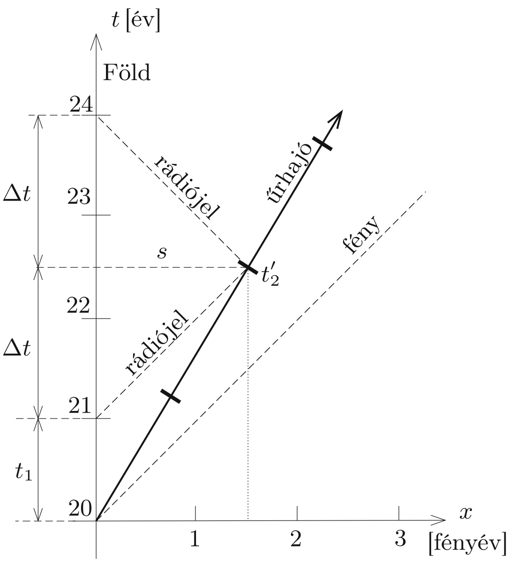
a) *Mekkora sebességgel távolodik az űrhajó a Földtől?*

b) Milyen távol van az űrhajó a Földtől András szerint a fénykép megérkezésekor?

c) Béla is készít egy felvételt a 22. születésnapjáról, és azonnal elküldi azt testvérének. Hány éves korában kapja meg András ezt a fényképet?

(*6 pont*) Közli: *Simon Péter,* Pécs

Megoldás. Jelöljük az űrhajó indulásától a születésnapi fénykép elkészítéséig a Földön eltelt időt (András „öregedését") t_1-gyel ($t_1 = 1$ év). Az űrhajón az indulástól a rádiójelek megérkezéséig $t_2' = 2$ év idő telik el. A „vessző" arra utal, hogy ez az időtartam a Földtől v sebességgel távolodó űrhajóban, Béla vonatkoztatási rendszerében mérhető. Ennyi idő alatt Béla 2 évet öregszik. A Föld, az űrhajó és a fényjelek (rádióüzenetek) „mozgását" a Földhöz rögzített koordináta-rendszerben az *ábrán* látható módon szemléltethetjük.



a) Legyen a fénykép elkészítése és az űrhajóhoz érkezése között eltelt idő András szerint Δt, a vákuumbeli fénysebességet (a rádióhullámok terjedési sebességét) pedig jelölje c. Az András által elküldött jelnek meg kell tennie az űrhajó által az indulásától a rádiójelek megérkezéséig megtett utat:

$$\Delta t \cdot c = (t_1 + \Delta t) \cdot v. \tag{1}$$

Tudjuk továbbá, hogy a relativisztikus *idődilatáció* jelensége miatt az űrhajón tartózkodó Béla által mért időtartam a Földön maradt András szerint a következő kapcsolatban áll az űrhajó indulása és a rádiójelek megérkezése között eltelt idővel:

$$t_2' = (\Delta t + t_1)\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{2}$$

Az (1) egyenletből kifejezhetjük Δt-t, és azt (2)-be helyettesíthetjük:

$$\Delta t = t_1 \frac{v}{c-v}, \tag{3}$$

$$t_2' = t_1 \left(1 + \frac{v}{c-v}\right)\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = t_1 \sqrt{\frac{c+v}{c-v}},$$

ahonnan az űrhajó sebességére

$$v = \frac{t_2'^2 - t_1^2}{t_2'^2 + t_1^2}\,c = \frac{4-1}{4+1}\,c = \frac{3}{5}\,c = 1{,}8 \cdot 10^8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

adódik.

b) A v sebességet (3)-ba helyettesítve

$$\Delta t = \frac{3}{2}\,ct_1 = 1{,}5\ \text{év},$$

a keresett távolságra pedig az $s = c\Delta t = 1{,}5$ fényév $\approx 1{,}42 \cdot 10^{16}$ m eredményt kapjuk.

c) Mivel a Béla által visszafelé küldött rádióhullámok a speciális relativitáselmélet alapján c sebességgel teszik meg az András által mért s távolságot, így András szerint 1,5 év telik el a fénykép megérkezéséig. Tehát András életkora 20 év + 1,0 év + 1,5 év + 1,5 év = 24 év lesz, amikor a Földön megkapja Béla fényképét.

Pszota Máté (Révkomárom, Selye János Gimn., 12. évf.)
dolgozata alapján

22 dolgozat érkezett. Helyes 15 megoldás. Kicsit hiányos (5 pont) 1, hiányos (1–2 pont) 4, hibás 2 dolgozat.

P. 5068. *Egy kicsiny, pontszerűnek tekinthető, m tömegű üstökös közeledik egy M tömegű, R sugarú, gömb alakú bolygó felé ($m \ll M$). Az üstökös sebessége a bolygótól nagyon messze v_0, és ha nem hatna rá a bolygó gravitációs tere, akkor d távolságra haladna el a bolygó középpontjától ($d > R$). Mekkora v_0 minimális értéke, amelynél az üstökös még nem ütközik a bolygóba? (A bolygón és az üstökösön kívül minden más égitest gravitációs hatását elhanyagolhatjuk.)*

(*5 pont*) Közli: *Kovács József,* Szombathely

Megoldás. Számoljuk ki azt a v_0 sebességet, amivel egy „nagyon távoli” pontban rendelkező üstökös pályája éppen érinti az M tömegű, R sugarú bolygót. Centrális erőtérben alkalmazhatjuk az impulzusnyomaték (perdület) megmaradásának tételét, majd a munkatételt. Az üstökös legnagyobb sebességét ($v_{\max}$-ot) a bolygó középpontjához legközelebbi helyen éri el, és itt a sebessége merőleges a bolygó ottani sugarára. A perdület a végtelenben mv_0d, a bolygóhoz legközelebb pedig $mv_{\max}R$, ezek egyenlőségéből

$$v_{\max} = \frac{d}{R}v_0.$$

A munkatétel szerint:

$$\frac{1}{2}mv_{\max}^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = 0 - \left(-\gamma Mm\frac{1}{R}\right).$$

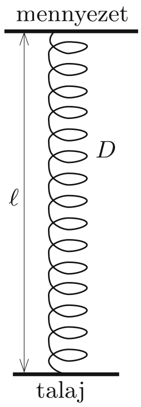
Ezekből az egyenletekből a keresett sebesség alsó határa:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2\gamma MR}{d^2 - R^2}}.$$

Mácsai Dániel (Keszthelyi Vajda J. Gimn., 10. évf.)

39 dolgozat érkezett. Helyes 29 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 1, hiányos (1–3 pont) 4, hibás 5 dolgozat.

P. 5070. *Egy ℓ magasságú barlangban D rugóállandójú, feszítetlen állapotában $d < \ell$ hosszúságú, elhanyagolható tömegű rugó helyezkedik el függőleges helyzetben. A rugó egyik végét a barlang mennyezetéhez, a másik végét pedig a talajhoz rögzítették az* ábrán *látható módon.*



A rugó közepére rárepül és a rugóba kapaszkodik egy m tömegű, kis méretű denevér, és a rugó vezérelte bonyolult rezgésbe kezd. (A denevér mozgása során a rugó semelyik darabja nem lazul meg.)

a) Hol fog megállni a denevér a rezgés lecsillapodása után? (A rugó még nagy megnyújtásnál is követi a Hooke-törvényt.)

b) Innen a denevér igen óvatosan visszamászik újra a talajtól mért $\ell/2$ magasságra. Legalább mekkora munkát végez eközben?

(*5 pont*) Közli: *Balogh Péter,* Gödöllő

Megoldás. *a*) A barlang mennyezetéhez és a talajhoz rögzített rugó megnyúlása terheletlen (denevérmentes) állapotban $\ell - d$. Amikor a rugó közepére rárepül és a rugóba kapaszkodik egy m tömegű, kis méretű denevér, akkor tekinthetjük az elrendezést úgy, mintha a rugót még a nyújtatlan állapotában félbevágtuk volna két, egyenként $d/2$ hosszúságú részre. Ha az egyik részt felül, a másikat alul rögzítjük, majd középen összekötjük őket, akkor mindkét rugódarab megnyúlása $(\ell - d)/2$ lesz.

A félbevágott rugó egy-egy részének a rugóállandója $2D$, hiszen ugyanakkora erő hatására csak fele akkorát változik meg a hossza, mint az eredeti rugó tette volna. Ha a denevér súlya hatására (a kialakuló új egyensúlyi állapotban) a felső rugó megnyúlása x értékkel nő, az alsó rugóé ugyanennyivel csökken, akkor a denevérre ható erők egyensúlyi egyenlete:

$$2D\left(\frac{\ell - d}{2} + x\right) = 2D\left(\frac{\ell - d}{2} - x\right) + mg.$$

Eszerint a denevér (a rezgések lecsillapodása után)

$$x = \frac{mg}{4D}$$

távolsággal kerül mélyebbre a barlang közepénél, a talajtól $\frac{\ell}{2} - \frac{mg}{4D}$ távolságban lesz egyensúlyban.

b) Innen a denevér lassan, óvatosan (elkerülve, hogy a rugó rezgésbe vagy lengésbe jöjjön) felmászik a rugónak egy olyan pontjáig, amelynél kapaszkodva a kialakuló egyensúlyi helyzete éppen a barlang közepénél lesz. Legyen ebben a helyzetben a denevér felett az egész rugó p-ed része (vagyis nyújtatlan állapotban d/p hosszúságú darabja), a denevér alatt pedig nyújtatlanul $d-(d/p)$ hosszúságú rugódarab. p itt egy 1-nél nagyobb, később meghatározandó szám.

A nyújtatlanul d/p hosszúságú rugó rugóállandója

$$D^{(\text{felső})} = pD,$$

a másik darabé pedig

$$D^{(\text{alsó})} = \frac{1}{1-\frac{1}{p}}D = \frac{p}{p-1}D$$

lesz, hiszen a megrövidített rugók erőssége a hosszukkal fordított arányban növekszik. A denevér egyensúlyi állapotában a rugóerők és a nehézségi erő egyensúlyba kerülnek:

$$pD\left(\frac{\ell}{2} - \frac{d}{p}\right) = \frac{p}{p-1}D\left(\frac{\ell}{2} - \frac{p-1}{p}d\right) + mg,$$

vagyis (algebrai átalakítások után):

$$\frac{p-2}{p-1}p = 2\frac{mg}{D\ell}.$$

Ennek a p-re nézve másodfokú egyenletnek a számunkra megfelelő (1-nél nagyobb) megoldása:

$$p = 1 + \frac{mg}{D\ell} + \sqrt{1 + \left(\frac{mg}{D\ell}\right)^2}.$$

Érdekes, hogy a fenti képlet nem tartalmazza a feszítetlen rugó hosszát (d-t).

A denevérnek legalább annyi munkát kell végeznie, amennyivel összességében növekszik a saját helyzeti energiája és a két rugó rugalmas energiája a mászás során. A helyzeti energia változása:

$$E^{(\text{helyzeti})} = mgx = \frac{m^2g^2}{4D}.$$

A felső rugó rugalmas energiája kezdetben:

$$E_1^{(\text{felső})} = \frac{1}{2}\cdot 2D\left(\frac{\ell-d}{2} + x\right)^2,$$

az alsó rugó rugalmas energiája kezdetben:

$$E_1^{(\text{alsó})} = \frac{1}{2}\cdot 2D\left(\frac{\ell-d}{2} - x\right)^2,$$

a felső rugó rugalmas energiája a végállapotban:

$$E_2^{(\text{felső})} = \frac{1}{2} \cdot (pD) \left(\frac{\ell}{2} - \frac{d}{p} \right)^2,$$

és végül az alsó rugó rugalmas energiája a végállapotban:

$$E_2^{(\text{alsó})} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{p}{p-1} D \right) \left(\frac{\ell}{2} - d\frac{p-1}{p} \right)^2.$$

A szükséges munka:

$$W \geqslant E^{(\text{helyzeti})} + \left(E_2^{(\text{felső})} - E_1^{(\text{felső})} \right) + \left(E_2^{(\text{alsó})} - E_1^{(\text{alsó})} \right),$$

amit algebrai átalakítások és p korábban kiszámított értékének behelyettesítése után így is fel lehet írni:

$$W \geqslant \frac{m^2 g^2}{8D} + \frac{mg\ell}{4} \frac{p-2}{p} = \frac{(mg)^2}{8D} + \frac{D\ell^2}{4} \left(\sqrt{1 + \frac{m^2 g^2}{D^2 \ell^2}} - 1 \right).$$

(Érdekes, hogy ez a képlet sem tartalmazza d-t, a rugó nyújtatlan hosszát.)

Markó Gábor (Győr, Révai Miklós Gimn., 11. évf.)

22 dolgozat érkezett. Helyes Markó Gábor és Marozsák Tádé megoldása. Kicsit hiányos (4 pont) 5, hiányos (1–3 pont) 13, hibás 2 dolgozat.

P. 5071. *Rugalmas fonálon lógó terhet* 0*-ról lassan növekvő erővel húzunk lefelé. A fonál* F_1 *erőnél szakad el. Milyen minimális erő alkalmazásánál szakad el a fonál, ha az erő azonnal felveszi értékét, és utána nem változik?*

(*5 pont*) *A Kvant nyomán*

Megoldás. Feltételezzük, hogy a fonálban ható erő követi a Hooke-törvényt, vagyis a megnyúlással arányosan növekszik. A fonál egy meghatározott feszítőerőnél, azaz egy meghatározott megnyúlásnál szakad el. Legyen ez a megnyúlás a kezdeti megnyúlásnál Δx-szel nagyobb.

A kezdeti helyzettől az elszakadás pillanatáig a fonál rugalmas energiája is és a teher helyzeti energiája is ugyanannyit változik mindkét esetben. Ezek szerint a húzóerő W munkájának is ugyanannyinak kell lennie a kétféle nyújtás esetében. A második esetben az állandó F_2 erő munkája $F_2 \Delta x$. Az első esetben az erő lassan növekszik nullától F_1-ig, átlagos értéke $\frac{1}{2}F_1$, így a munkája $\frac{1}{2}F_1 \Delta x$. A két munka egyenlőségéből következik, hogy $F_2 = F_1/2$.

Bokor Endre (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.)

10 dolgozat érkezett. Helyes Bokor Endre, Máth Benedek, Osztényi József, Pácsonyi Péter és Varga Vázsony megoldása. Hiányos (1–3 pont) 3, hibás 2 dolgozat.

Fizikából kitűzött feladatok

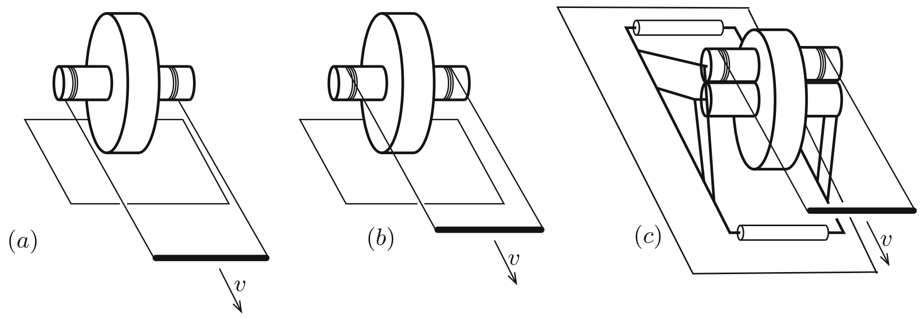
M. 384. Határozzuk meg egy ismert teljesítményű elektromos vízforraló kancsó hatásfokát a benne lévő víz tömegének függvényében!

(*6 pont*) Közli: *Nagy Piroska Mária,* Budapest

G. 661. Egyenes mérőhengerbe három, egymással nem keveredő folyadékot öntünk: 1000 kg/m^3 sűrűségű 100 g vizet, 0,8 g/cm^3 sűrűségű 200 g olajat, és annyi higanyt, hogy tele legyen a 400 cm^3 térfogatú, 40 cm magas mérőhenger. Hány gramm higanyt öntöttünk a mérőhengerbe? Milyen magasságban helyezkednek el a folyadékokat egymástól elválasztó határrétegek a henger aljától számítva? (A higany sűrűsége 13 600 kg/m^3.)

(*3 pont*)

G. 662. Az (a) és a (b) *ábrán* látható összeállítás egy nagyobb korongból és egy-egy, hozzá koncentrikusan rögzített, kisebb hengerből áll. A kis hengerekre fonalakat csévéltünk, amelyeknek végét egy rúd segítségével vízszintesen, v sebességgel mozgatjuk.

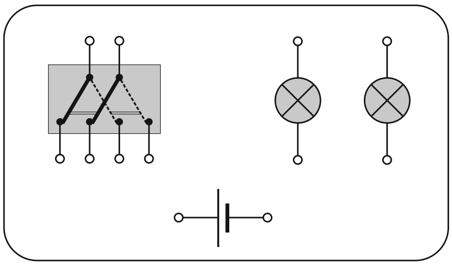


A (c) esetben a kis hengerhez felülről egy vele azonos átmérőjű, szabadon forgó másik kis henger is csatlakozik. A felső henger nekiszorul az alsónak, és a lebillenését egy-egy görgőhöz csatlakozó rúdszerkezet akadályozza meg. A felső hengerre is fonalat csévéltünk, és a fonál végét v sebességgel húzzuk. A korongok a talajon, illetve a kis hengerek egymáson nem csúsznak meg.

Melyik irányban, és v-nél nagyobb vagy kisebb sebességgel fog mozogni a korong középpontja az egyes esetekben?

(*3 pont*)

G. 663. Az *ábrán* két izzólámpa, egy zsebtelep és egy olyan kettős kapcsoló látható, amely egyszerre vált át két érintkezőt. Tervezzünk a megadott eszközökből olyan áramkört (vagyis rajzoljuk meg a vezetékeket), hogy a kapcsoló egyik állásában a két lámpa sorosan, a másik állásában párhuzamosan legyen bekötve!



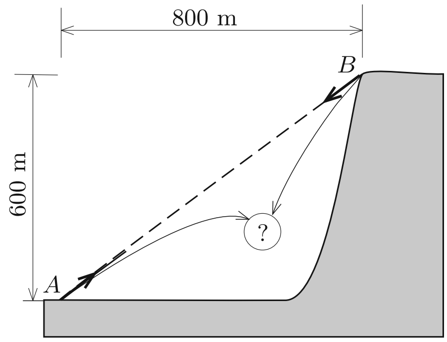
(*3 pont*)

G. 664. Az év azonos napjára eső újholdkor vagy teliholdkor vagyunk közelebb a Naphoz? Becsüljük meg, hogy mekkora a kétféle távolságunk különbsége!

(*4 pont*)

P. 5100. Két ágyúval pontosan ugyanabban a pillanatban tüzelnek egymás felé az *ábrán* látható A és B pontból. Az A ágyú lövedékének torkolati sebessége 40 m/s, míg a B ágyúé 60 m/s. Eltalálják-e a lövedékek egymást? Ha igen, akkor hol és mikor? Ha nem, akkor hol csapódnak be a talajba?

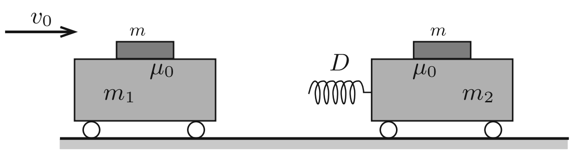
(*4 pont*) *Amerikai feladat*



P. 5101. Egy űrhajó körpályán kering a Föld körül, keringési ideje 100 perc. A Föld felszínének mekkora részét láthatja az űrhajós egy adott pillanatban? (A légköri fénytörést elhanyagolhatjuk.)

(*4 pont*) *Némedi István* (1932–1998) feladata nyomán

P. 5102. Vízszintes talajon m_1 tömegű kiskocsi v_0 sebességgel halad az álló, m_2 tömegű kiskocsi felé. Mindkét kocsin egy-egy m tömegű, lapos hasáb van. A hasábok és a kiskocsik felülete közötti tapadási súrlódási együttható μ_0. Az álló kiskocsin D rugóállandójú nyomórugó van.



Ütközéskor megcsúszik-e valamelyik hasáb?

Adatok: $m_1 = 0{,}2$ kg; $m_2 = m = 0{,}1$ kg; $\mu_0 = 0{,}5$; $D = 12$ N/m; $v_0 = 1$ m/s.

(*4 pont*) Közli: *Németh László,* Fonyód

P. 5103. Egyik végénél felfüggesztett, függőlegesen szabadon lógó, m tömegű SLINKY-rugó a saját súlya alatt L hosszúságúra nyúlik. Ezután a rugó egyik végét H magasságban egy vízszintes asztallap felett tartjuk ($H < L$), így a rugó nem tud teljesen kinyúlni. Mekkora erő hat a rugóra a felfüggesztésnél, illetve az alátámasztásnál? (A rugó feszítetlen hossza H-hoz képest elhanyagolható.)

(*5 pont*) Közli: *Gnädig Péter,* Vácduka

P. 5104. Dugattyúval lezárt edényben nitrogéngáz van. A dugattyút lassan kihúzva kissé csökkentjük a gáz nyomását. Mekkora a gáz moláris hőkapacitása, ha a térfogat 1%-os növekedése esetén a nyomás változása 0,5%?

(*4 pont*) *Tornyai Sándor fizikaverseny,* Hódmezővásárhely

P. 5105. Három, vákuumban lévő, R sugarú fémgömb középpontja egy egyenesre esik. A középső gömb távolsága a másik két gömbtől $d \gg R$. A szélső gömbök hőmérséklete állandó, az egyiké T_1, a másiké T_2. Mekkora a középső gömb állandósult hőmérséklete, ha a gömbök abszolút fekete testeknek tekinthetők?

(*5 pont*) Közli: *Simon Péter,* Pécs

P. 5106. Egyenlő oldalú háromszög keresztmetszetű, $n_1 = 1{,}8$ abszolút törésmutatójú prizmára vékony fénysugarat bocsátunk úgy, hogy a fénysugár pályája a felezősíkra szimmetrikus legyen.

a) Mekkora a belépő fénysugár beesési szöge?

b) Mekkora a belépő sugár és a kilépő sugár közötti szög, az ún. *deviáció*?

c) Ezután az egymáshoz képest rögzített prizma-fényforrás rendszert egy $n_2 = 1{,}5$ törésmutatójú folyadékba merítjük. Mekkora lesz ebben az esetben a deviáció?

(*5 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest

P. 5107. Öt egyforma és egy különböző ellenállásból tetraéder alakú kapcsolást forrasztunk össze. Egyetlen ellenállásmérő műszer áll rendelkezésünkre, és a látszólag egyforma hat ellenállás kapcsolását nem szabad megbontanunk. Legfeljebb hány mérést kell elvégezzünk, hogy megtaláljuk a többitől eltérő értékű ellenállást, és még az ellenállások nagyságát is megtudjuk? Szerencsés esetben hány méréssel juthatunk el a megoldáshoz?

(*5 pont*) *Pakisztáni feladat*

P. 5108. Mekkora az a legkisebb sebesség, amellyel az m tömegű, q töltésű testet vákuumban fellőve már eljut a függőlegesen fölötte ℓ távolságban rögzített, Q töltésű testhez? (Q és q ellentétes előjelű töltések.)

Adatok: $m = 10^{-5}$ kg, $q = 4{,}0 \cdot 10^{-9}$ C, $Q = -1{,}0 \cdot 10^{-7}$ C, $\ell = 0{,}36$ m.

(*5 pont*) Közli: *Kobzos Ferenc,* Dunaújváros

P. 5109. Mekkora az elektron hullámhossza, ha a mozgási energiája

a) $1{,}75\cdot 10^{-16}$ J;

b) 20 GeV?

(*5 pont*) Közli: *Légrádi Imre,* Sopron

P. 5110. A Föld körül keringő két mesterséges hold pályájának fél nagytengelye ugyanakkora. A holdak pálya menti sebességeinek aránya a perigeumban (földközelpontban) $\frac{3}{2}$, és az itt nagyobb sebességű hold pályájának excentricitása 0,5.

Határozzuk meg pálya menti sebességük arányát az apogeumban (földtávolpontban), és számítsuk ki a másik mesterséges hold pályájának excentricitását!

(*6 pont*) *Csillagászati versenyfeladat nyomán*

Beküldési határidő: 2019. március 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS
(Volume 69. No. 2. February 2019)

Problems in Mathematics

New exercises for practice – competition K (see page 94): **K. 614.** In the increasing sequence of positive integers (starting with 1), find the 225th number that cannot be represented as a product of two consecutive integers. **K. 615.** Six points are selected in the interior of a square such that no three points among the 10 points (the vertices of the square and the six points) are collinear. From these 10 points, pairs of points are connected with line segments that do not intersect each other, and the process is continued until it is not possible to add a further line segment. What is the largest possible number of line segments that may be drawn in this way? **K. 616.** There are a lot of integers that can be represented as a sum of three perfect squares. For example, $1=1^2+0^2+0^2$, $14=3^2+2^2+1^2$, $20=4^2+2^2+0^2$. Show that 1991 cannot be represented as a sum of three perfect squares. **K. 617.** The diagonal AG of a rectangular block $ABCDEFGH$ intersects the triangle BDE at point Q. Prove that Q is the centroid of triangle BDE. **K. 618.** A positive integer n is said to be a “strong” number if its number of divisors is greater than the number of divisors of each positive integer less than n. (For example, $n=2$ is a strong number, because it has two divisors, while $n=1$ has only one. But $n=3$ is not a strong number, because it has two divisors similarly to a smaller integer $n=2$.) *a*) Find all strong numbers greater than 2 but less than 30. *b*) Is $2^3\cdot 3^4\cdot 5$ a strong number?

New exercises for practice – competition C (see page 95): **Exercises up to grade 10: C. 1525.** A team in a football championship had 33 points after 15 games they played. The 15 games included all three kinds of outcome: winning, losing, and draw. How many games did they win? (3 points are scored for winning a game, 0 for losing and 1 for each team in the case of a draw.) **C. 1526.** The circumscribed circle of a square is reflected in each side. Let T denote the area of the circle that touches these reflections in the interior of the square. Let t denote the area of the circle that touches one reflection and the circumscribed circle, both from the inside. Determine the smallest possible value of $\frac{T}{t}$. **Exercises for everyone: C. 1527.** If two appropriate numbers in the sequence $1, 2, \ldots, n$ are erased, the sum of the remaining numbers will be 2019. Find all possible pairs of numbers that may be erased. **C. 1528.** What positive integer may n denote if the number obtained by erasing the last three digits of the number n^3 is n itself? (Proposed by *S. Róka,* Nyíregyháza) **C. 1529.** Prove that every right-angled triangle can be divided into $3k+2$ isosceles triangles where k is any positive integer. **Exercises upwards of grade 11: C. 1530.** Is it possible to group all the integers from 1 to 51 into sets of three such that the sum of the numbers in each set should be a prime? **C. 1531.** The base of a right prism is a regular triangle, and its volume is 2 dm^3. What is the minimum possible surface area of the prism?

New exercises – competition B (see page 96): **B. 5006.** The bases of a trapezium $ABCD$ are AB and CD, the intersection of the diagonals is M. Diagonal AC bisects the angle BAD, $AM = BC$ and $BM = CD$. Find the angles of the trapezium. (*4 points*) (Based on a problem of the National Competition) **B. 5007.** We have $3n+1$ coins, n of which have 0 on one side and 11 on the other. Another n coins have 0 on one side and 44 on the other, and the remaining $n+1$ coins have 0 on one side and 99 on the other. All the coins are tossed at the same time. What is the probability that the sum of the resulting numbers is divisible by 7? (The coins are fair coins.) (*4 points*) **B. 5008.** A circle k_A is centred at A, and a circle k_B is centred at B. Line l_1 touches k_A at A_1 and k_B at B_1. Line l_2 touches k_A at A_2 and k_B at B_2. Prove that the orthogonal projections of the line segments A_1A_2 and B_1B_2 onto the line AB are of equal length. (*3 points*) **B. 5009.** Given that $x^2+y^2+z^2=3$, where x, y, z are positive numbers, prove that $2^{\frac{1}{x}}+2^{\frac{1}{y}}+2^{\frac{1}{z}} \geqslant 6$. (*3 points*) (Proposed by *V. N. Nguyen,* Vietnam) **B. 5010.** The inscribed circle of an acute-angled triangle ABC touches the sides at the points A_0, B_0 and C_0. The points of tangency of the excircles on the lines of the sides are A_1, B_1 and C_1; A_2, B_2 and C_2; A_3, B_3 and C_3, respectively. Let T_i denote the area of triangle $A_iB_iC_i$ $(i=0,1,2,3)$. Show that $\frac{1}{T_0}=\frac{1}{T_1}+\frac{1}{T_2}+\frac{1}{T_3}$. (*5 points*) **B. 5011.** We are given 6 points in the plane such that all pairwise distances are different. Show that there exist two triangles with the following property: each vertex is among the 6 given points, and the two triangles share a side in common such that this side is the shortest one in one triangle and the longest one in the other. (*5 points*) (Proposed by *S. Róka,* Nyíregyháza) **B. 5012.** Let $f(x)$ be a polynomial with integer coefficients. Let $f^{(n)}$ denote the n-fold application of f: $f^{(n)}(x)=\underbrace{f\big(f(\ldots f}_{n}(x)\ldots)\big)$. Let $k(f)$ denote the smallest positive integer k for which $f^{(k)}(x)\equiv x \pmod{13}$ holds for all integers x, provided that there exists such a k, and let $k(f)=0$ otherwise. Prove that there is a maximum value of $k(f)$, and determine this maximum value. (*6 points*) **B. 5013.** The excircle of triangle ABC opposite to vertex A touches line AC at point B_1. The line segment BB_1 intersects the excircle at B_2, and the tangent drawn to the excircle at B_2 intersects side BC at B_3. Similarly, the inscribed circle of the triangle touches side AB at point C_1, line segment CC_1 intersects the incircle at C_2, and the tangent drawn to the incircle at C_2 intersects side BC at C_3. Prove that $B_2B_3=C_2C_3$. (*6 points*)

New problems – competition A (see page 97): **A. 743.** The incircle of tangential quadrilateral $ABCD$ intersects diagonal BD at P and Q $(BP<BQ)$. Let UV be the diameter of the incircle perpendicular to AC $(BU<BV)$. Show that the lines AC, PV and QU pass through one point. (Based on problem 2 of *IOM 2018,* Moscow) **A. 744.**

Show that for every odd integer $N > 5$ there exist vectors $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ in (three-dimensional) space which are pairwise perpendicular, not parallel with any of the coordinate axes, have integer coordinates, and satisfy $|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}| = |\mathbf{w}| = N$. (Based on problem 2 of the *2018 Kürschák contest*) **A. 745.** We have attached a clock hand to every face of a convex polyhedron. Each hand always points towards a neighboring face (two faces of the polyhedron are neighbors if they share an edge). At the end of every minute, exactly one of the hands turns clockwise to point at the next face. Suppose that the hands on neighboring faces never point towards one another. Show that one of the hands makes only finitely many turns.

Problems in Physics

(see page 122)

M. 384. Determine the efficiency of an electric kettle of known power rating, as a function of the mass of the water in it.

G. 661. Three types of liquid, which do not mix with each other, are poured into a graduated cylinder: 100 g water of density 1000 kg/m^3, 200 g oil of density 0.8 g/cm^3, and mercury, such that the graduated cylinder of volume 400 cm^3 and of height 40 cm is fully filled. How many grams of mercury was poured into the cylinder? At what height, measured from the bottom of the cylinder, are the boundary layers which separate the different liquids? (The density of mercury is 13 600 kg/m^3.) **G. 662.** A disc with greater radius and two smaller cylinder are attached to each other concentrically; the assembly is shown in *figures* (a) and (b). Two pieces of cords were wrapped around the cylinders, and their ends are moved horizontally at constant speed of v, with the help of a rod. In the (c) case, there is another cylinder, which can rotate freely, above the cylinder on the original device. The cylinders have the same radius, and touch each other tightly. A rod structure is attached to the cylinders in order to prevent them from falling. A piece of cord is wrapped around the top cylinder and the end is again pulled at a constant speed of v. The discs do not slip on the ground and the cylinders do not slip on each other. In what direction will the centre of the disc move in each case? Will the speed of the centre of the disc be greater or smaller than v in each case? **G. 663.** There are two filament lamps, a battery and a double switch in the *figure.* The switch changes two contacts at the same time when it is turned. Plan a circuit (that is, draw the wires) using the given components in which the two lamps are connected in series at one position of the switch, and when the switch is turned, then the lamps are connected in parallel. **G. 664.** In which case are we closer to the Sun on the same day of the year: at new-moon or at full-moon? Estimate the difference between the distances at the two cases?

P. 5100. Two cannons fire a ball at the same time towards each other from points A and B as shown in the *figure.* The nozzle speed of the ball fired from the cannon at A is 40 m/s, whilst the nozzle speed of the ball fired from the cannon at B is 60 m/s. Do the two balls collide? If yes, where and when? If not, where do the balls hit the ground? **P. 5101.** A space ship orbits along a circular path around the Earth, its period is 100 minutes. What is the area of the surface of the Earth which is seen by the astronaut at a certain instant? (Neglect the refraction of light due to the atmosphere.) **P. 5102.** A trolley of mass m_1 is moving at a speed of v_0 along the horizontal floor towards another trolley of mass m_2, which is at rest. On the top of each trolley there is a thin rectangular block of mass m. The coefficient of static friction between the blocks and the surface of the trolleys is μ_0. There is a spring of spring constant D on the stationary trolley. Will any of the blocks slide due to the collision? *Data:* $m_1 = 0.2$ kg; $m_2 = m = 0.1$ kg; $\mu_0 = 0.5$; $D = 12$ N/m; $v_0 = 1$ m/s. **P. 5103.** A slinky of mass m is suspended at one of its ends, due to its own weight it is extended to a length of L. Then one end of the slinky is held at a height of H above a horizontal tabletop ($H < L$), so the slinky is not extended totally. What are the forces which are exerted at the suspension and at the support? (The unstretched length of the slinky is negligible with respect to H.) **P. 5104.** There is a sample of nitrogen gas in a container closed with a piston. The pressure of the gas is decreased by slowly pulling out the piston. What is the molar heat capacity of the gas in this process if 1% increase in the volume results in 0.5% change in the pressure? **P. 5105.** There are three metal spheres of radius R in vacuum. Their centres are collinear. The distance of the middle sphere from the other two spheres is $d \gg R$. The temperature values of the two spheres at the sides are constant: one of them has temperature T_1, and the other has T_2. What is the steady-state temperature of the middle sphere if all the spheres can be considered black bodies? **P. 5106.** A thin light ray enters into a prism of refractive index $n_1 = 1.8$. The cross section of the prism is an equilateral triangle and the path of the light ray in the prism is symmetrical about the bisecting plane. *a*) What is the angle of incidence of the incident light ray? *b*) What is the angle between the incident ray and the light ray which emerges from the prism, the so-called *angle of deviation*? *c*) Then the light source and prism system is fixed and submerged into some liquid of refractive index of $n_2 = 1.5$. What is the angle of deviation of the light ray in this case? **P. 5107.** A tetrahedron-shaped circuit is soldered from six resistors. Five of the resistors are alike and have the same resistance value whilst the sixth one is different. Only one ohm-meter is available, and the circuit, which seemingly contains six alike resistors cannot be taken apart. At most how many measurements are needed to find the resistor which has different resistance value, and also to find the resistance value of each resistor? If we are lucky, how many measurements are needed to find the resistance values? **P. 5108.** At least what speed should a small object of mass m and of charge q be projected upward in vacuum in order that it reaches another object of charge Q, (vertically) above it at a height of ℓ? (Q and q are opposite charges.) *Data:* $m = 10^{-5}$ kg, $q = 4.0 \cdot 10^{-9}$ C, $Q = -1.0 \cdot 10^{-7}$ C, $\ell = 0.36$ m. **P. 5109.** What is the wavelength of an electron if its kinetic energy is *a*) $1.75 \cdot 10^{-16}$ J; *b*) 20 GeV? **P. 5110.** The lengths of the semi-major axis of two satellites orbiting around the Earth are the same. The ratio of the speeds of the two satellites when they are at perigee (the point at which the satellite is the closest to the Earth) is $\frac{3}{2}$, and the eccentricity of the orbit of that satellite which is faster at this point is 0.5. Determine the ratio of the speeds of the satellites when they are at apogee (at the furthest point from the Earth), and the eccentricity of the path of the other satellite.

Problems of the 2018 Kürschák competition

1. The inscribed circle of triangle ABC touches sides BC, CA and AB in points A_1, B_1 and C_1, respectively. The median from vertex A intersects segment B_1C_1 in point M. Prove that segment A_1M is orthogonal to side BC.

2. Let $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ be pairwise different vectors with integral coordinates in the three dimensional coordinate system, each of length p where p is a prime. Assume that for any $1 \leqslant j < k \leqslant n$ there exists an integer $0 < \ell < p$ such that all three coordinates of vector $\mathbf{v}_j - \ell \cdot \mathbf{v}_k$ are divisible by p. Prove that $n \leqslant 6$.

3. Smurf village consists of k streets, and there are $k(n-1)+1$ clubs, each with n smurf members. The same smurf can be a member of more than one club, and two smurfs certainly know one another if they are members of the same club or live in the same street. Prove that it is possible to select n different clubs, together with one member of each such that the selected n smurfs are distinct and any two of them know one another.