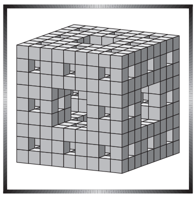


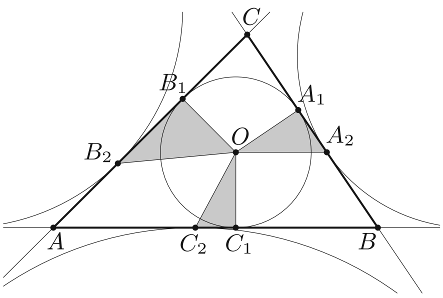
A B pontversenyben kitűzött feladatok (4998–5005.)

B. 4998. Az általános iskolai Logikai Készlet 48 műanyag lapocskából áll. A lapokat négy jellemző tulajdonság írja le: egy-egy elem mérete lehet kicsi vagy nagy; lehet sima vagy lyukas; a színe piros, sárga, kék vagy zöld; alakja kör, négyzet vagy háromszög. A tulajdonságok minden lehetséges kombinációja (pl. kicsi kék lyukas kör) pontosan egy lapocskára igaz. Hány olyan x eleme van a készletnek, amelyhez található a készletnek olyan y eleme, amelyre az alábbi két feltétel mindegyike teljesül?

1. Ha x sima vagy piros, akkor y kicsi sárga négyzet.

2. Ha y kicsi vagy kék, akkor x zöld háromszög, vagy pedig valamilyen sima alakzat.

(*4 pont*) ELTE TTK elsőéves analízis zárthelyi dolgozat alapján



B. 4999. Az ABC háromszög beírt körének középpontja O, érintési pontjai A_1, B_1, C_1, hozzáírt köreinek érintési pontjai A_2, B_2, C_2 az *ábra* szerint. Mutassuk meg, hogy az OA_1A_2, OB_1B_2 és OC_1C_2 háromszögek közül valamelyiknek a területe egyenlő a másik két háromszög területének összegével.

(*3 pont*) Javasolta: *Kocsis Szilveszter* (Budapest)

B. 5000. Adott 4999 különböző egész szám, az egyik a 42. Igazoljuk, hogy kiválasztható közülük néhány, amelyek összege osztható 5000-rel.

(*4 pont*)

B. 5001. Egy egyenlő szárú háromszög alapja a, szárszöge $120°$-nál kisebb, az alaphoz tartozó magassága m. A háromszög mindegyik csúcsát tükrözzük a szemközti oldalegyenesre. A három kapott pont egy másik egyenlő szárú háromszöget alkot, amelynek alapja a', alaphoz tartozó magassága pedig m'. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{a'}{a} + \frac{m'}{m} = 4.$$

(*3 pont*) Javasolta: *Bártfai Pál* (Budapest)

B. 5002. Az $x^3 + ax^2 + bx + c$ harmadfokú polinom grafikonja a különböző P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 pontokban metszi az origó középpontú, 10 egység sugarú kört. Fejezzük ki a P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 pontrendszer súlypontjának koordinátáit az a, b, c együtthatókkal.

(*5 pont*)

B. 5003. Igaz-e, hogy ha egy tetraéder hat élfelezőpontja közül öt illeszkedik egy gömbre, akkor a hatodik élfelezőpont is illeszkedik ugyanerre a gömbre?

(*5 pont*)

B. 5004. $2n$ egymást követő egész szám között legfeljebb hány olyan lehet, amely osztható az $n+1$, $n+2$, $\dots$, $2n$ számok közül legalább az egyikkel?

(*6 pont*) Javasolta: *Róka Sándor* (Nyíregyháza)

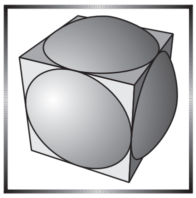
B. 5005. Az ABC hegyesszögű háromszög magasságvonalainak talppontja a BC, CA, AB oldalakon rendre D, E, F, az ABC háromszög magasságpontja M. Jelölje az AB, mint átmérő fölé rajzolt kört k_1, a DEM háromszög körülírt körét k_2. Vegyük föl a k_2 körnek a D pontot nem tartalmazó EM ívén az E, M pontoktól különböző P pontot. Messe a DP egyenes a k_1 kört másodszor a Q pontban, és legyen a PQ szakasz felezőpontja R. Mutassuk meg, hogy az AQ, MP, FR egyenesek egy pontban metszik egymást.

(*6 pont*) Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

Beküldési határidő: 2019. február 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (738., 740–742.)



A decemberi számunkban kitűzött **A. 738.** feladat hibás volt; helyette új feladatot tűzünk ki, amely a januári feladatokkal együtt küldhető be. A hibáért elnézést kérünk.

A. 738. Tekintsük a következő számsorozatot: $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=3$, illetve

$$a_{n+3}=\frac{a_{n+1}^2+a_{n+2}^2-2}{a_n}$$

minden $n\geqslant 1$ egészre. Bizonyítsuk be, hogy a sorozat minden tagja pozitív egész szám.

A. 740. Egy $k\times k$-as számtáblázatban az $1,2,\dots,m$ számok pontosan egyszer szerepelnek, míg a maradék helyen 0 áll. Tegyük fel, hogy az összes sorösszeg és oszlopösszeg azonos. Legalább mekkora m értéke, ha $k=3^n$ $(n\in\mathbb{N}^+)$?

Javasolta: *Sztranyák Attila* és *Erben Péter,*
a 2017. évi Kalmár-verseny feladata alapján