II. megoldás. Értelmezzünk, majd tüntessük el a nevezőket: $x \neq \pm 2$.

$$(x^3 - 7x + 6)(x + 2) = (x - 2)(2x + 14),$$
$$x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12 = 2x^2 + 10x - 28,$$
$$x^4 + 2x^3 - 9x^2 - 18x = -40,$$
$$x^3(x + 2) - 9x(x + 2) = -40,$$
$$x(x + 2)(x - 3)(x + 3) = -40.$$

Mivel az egész számok halmazán dolgozunk, ezért a -40 (nemcsak pozitív) osztóit kell megkeresnünk, ezeknek kell a tényezőknek megfelelniük.

A -40 osztói: 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40 és ezek -1-szeresei. Az $x+2$ és az $x+3$ egymást követő egész számok, így csak az 1, 2; -2, -1; 4, 5 és -5, -4 számok jöhetnek szóba. Ezekben az esetekben $x = -1; -3; 2; -6$. A -3 és a -6 nem jók, mert nem osztói a -40-nek, a 2 pedig nincs benne az értelmezési tartományban. Nézzük meg, hogy $x = -1$ megoldás-e:

$$(-1) \cdot 1 \cdot (-4) \cdot 2 \neq -40.$$

Tehát az egyenletnek nincs egész megoldása.

Görcs András (Somorja, Madách Imre Gimn., 9. évf.)

Megjegyzés. Néhányan a 3-mal való oszthatóságot vizsgálták: az egyenletet átírták $(x-1)(x+2)(x+3) = 2(x+7)$ alakra, majd megnézték $x \geqslant 0$, illetve $x < 0$ esetén, hogy ha x rendre 0, 1 vagy 2 maradékot ad 3-mal osztva, akkor mi a maradék a bal és a jobb oldalon. Mivel egyik esetben sem egyezik meg a maradék, ezért nincs megoldás az egész számok körében.

134 dolgozat érkezett. 5 pontos 59, 4 pontos 22, 3 pontos 20, 2 pontos 8, 1 pontos 13, 0 pontos 10 dolgozat. Nem versenyszerű: 2 dolgozat.

Matematika feladatok megoldása

B. 4878. *Legfeljebb mekkora lehet a $PA + PB + PC + PD$ összeg, ha P az $ABCD$ egységnégyzet egy pontja?*

(*4 pont*)

Megoldás. Először igazolunk egy lemmát.

Lemma. *Legyenek* $0 \leqslant a \leqslant 1$ *és* b *valós számok, valamint*

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(1 - x)^2 + y^2}.$$

Ekkor $f(a,b) \leqslant f(0,b)$, *és egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha* $a=0$ *vagy* $a=1$ *vagy* $b=0$.

A honlapunkon* megadtunk egy, a lemmával ekvivalens geometriai állítást, és annak a geometriai bizonyítását. Most megmutatjuk, számolással hogyan érhetünk célt. Az állítás átrendezéssel a következő alakban írható:

$$\sqrt{1+b^2}-\sqrt{(1-a)^2+b^2} \geqslant \sqrt{a^2+b^2}-|b|.$$

Az a-ra tett feltevésünk szerint mindkét oldal nemnegatív, ezért a négyzetreemelés ekvivalens átalakítás. A műveletek elvégzése után kapjuk, hogy

$$1+b^2+1-2a+a^2+b^2-2\sqrt{1+b^2}\sqrt{(1-a)^2+b^2} \geqslant \tag{1}$$

$$\geqslant a^2+b^2+b^2-2|b|\sqrt{a^2+b^2}\,.$$

Az egyszerűsítések után vezessük be a $c=1-a$ jelölést (nyilván $0 \leqslant c \leqslant 1$), így rendezéssel (1) a következő alakra hozható:

$$c+|b|\sqrt{(1-c)^2+b^2} \geqslant \sqrt{1+b^2}\sqrt{c^2+b^2}\,.$$

Ismét mindkét oldal nemnegatív, ezért újra négyzetre emelhetünk:

$$c^2+b^2(1-c)^2+b^4+2|b|c\sqrt{(1-c)^2+b^2} \geqslant c^2+b^2+b^2c^2+b^4.$$

Egyszerűsítések és rendezés után $2|b|c\sqrt{(1-c)^2+b^2} \geqslant 2b^2c$ adódik. Mivel $2|b|c \geqslant 0$, így két eset van: ha $2|b|c=0$, akkor $b=0$ vagy $a=1$ és egyenlőség áll. Egyébként $2|b|c>0$ és oszthatunk vele:

$$\sqrt{(1-c)^2+b^2} \geqslant |b|.$$

Ismét mindkét oldal nemnegatív, és újabb négyzetreemelés után a nyilvánvaló $(1-c)^2 \geqslant 0$ egyenlőtlenséghez jutunk. Itt egyenlőség $a=0$ esetben áll. Mivel csupa ekvivalens átalakítást végeztünk, így az eredeti állítást, és ezzel a lemmát beláttuk.

Válasszuk úgy a koordinátarendszerünket, hogy az egységnégyzet csúcsai legyenek $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(1,1)$ és $D(0,1)$; továbbá legyen $P(x,y)$, ahol $0 \leqslant x,y \leqslant 1$. Ekkor

$$PA+PB+PC+PD=$$

$$=\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(1-x)^2+y^2}+\sqrt{(1-x)^2+(1-y)^2}+\sqrt{x^2+(1-y)^2}=$$

$$=f(x,y)+f(x,1-y).$$

*`https://www.komal.hu/feladat?a=feladat&f=B4878&l=hu`.

A lemmát alkalmazva, majd kihasználva, hogy $0 \leqslant y \leqslant 1$ kapjuk, hogy

$$f(x,y)+f(x,1-y) \leqslant f(0,y)+f(0,1-y)=$$

$$=\sqrt{y^2}+\sqrt{1+y^2}+\sqrt{(1-y)^2}+\sqrt{1+(1-y)^2}=$$

$$=y+1-y+f(y,1)=1+f(y,1).$$

Ismét a lemma szerint $f(y,1) \leqslant f(0,1)=1+\sqrt{2}$, amiből az eddigiek szerint $PA+PB+PC+PD \leqslant 2+\sqrt{2}$. Egyenlőség akkor teljesül, ha minden becslésünkben egyenlőség áll, könnyű meggondolni, hogy ez pontosan akkor teljesül, ha P az egységnégyzet valamely csúcsa.

Borbély Márton (Kaposvár, Táncsics Mihály Gimn., 12. évf.)

Megjegyzés. Vázolunk egy második lehetséges megoldást, amely felhasznál néhány alapismeretet a kétváltozós függvényekről. Vezessük be a $g(P)=PA+PB+PC+PD$ függvényt. Ismert, hogy egy háromszögben a súlyvonal legfeljebb olyan hosszú, mint a súlyvonalat közrefogó oldalak számtani közepe. Ebből az elemi geometriai tényből azonnal következik, hogy ha a PQ szakasz felezőpontja F, akkor $g(F) \leqslant \big(g(P)+g(Q)\big)/2$, és egyenlőség csak $P=Q$ esetben áll. Mivel a g függvény folytonos, így kaptuk, hogy g szigorúan konvex. A konvexitást kihasználva nem túl nehéz megmutatni, hogy a maximum a csúcsokban lesz, elég arra gondolni, hogy $ABCD$ minden többi pontja belső pontja egy olyan szakasznak, amelynek a végpontjai is $ABCD$ valamely pontjai.

58 dolgozat érkezett. 4 pontos 37, 3 pontos 7, 2 pontos 2, 1 pontos 10, 0 pontos 2 dolgozat.

B. 4945. *Határozzuk meg azokat az n pozitív egészeket, amelyekre*

$$1\cdot 2^0+2\cdot 2^1+3\cdot 2^2+\ldots+n\cdot 2^{n-1}$$

négyzetszám.

(*5 pont*) *Németh László* (Fonyód) javaslata alapján

Megoldás. A mértani sorozat összegképletének többszöri alkalmazásával juthatunk az összeg zárt alakjához:

$$\begin{aligned}
&1\cdot 2^0+2\cdot 2^1+3\cdot 2^2+\ldots+n\cdot 2^{n-1}=\\
&=(2^0+2^1+2^2+\ldots+2^{n-1})+(2^1+2^2+\ldots+2^{n-1})+\\
&\quad+(2^2+\ldots+2^{n-1})+\ldots+(2^{n-1})=\\
&=(2^n-1)+(2^n-2)+(2^n-2^2)+\ldots+(2^n-2^{n-1})=\\
&=n\cdot 2^n-(1+2+2^2+\ldots+2^{n-1})=n\cdot 2^n-(2^n-1)=\\
&=(n-1)\cdot 2^n+1.
\end{aligned}$$

Ezzel a feladat követelménye a következő alakot ölti:

$$(n-1)\cdot 2^n+1=k^2, \quad \text{azaz}$$

$$(n-1)\cdot 2^n=k^2-1=(k+1)\cdot(k-1).$$

Itt az azonos paritású $(k+1)$ és $(k-1)$ szorzata páros lévén mindkét szám páros, és mivel a különbségük 2, azért valamelyikük nem osztható 4-gyel. Tehát vagy $k+1=2^{n-1}t$ (ahol t páratlan) és $k-1=2\cdot\frac{n-1}{t}$, vagy $k+1=2s$ (ahol s páratlan) és $k-1=2^{n-1}\cdot\frac{n-1}{s}$. Az első esetben

$$2=(k+1)-(k-1)=2^{n-1}t-2\cdot\frac{n-1}{t},$$

$$2t=2^{n-1}t^2-2(n-1),$$

$$n-1=t(2^{n-2}t-1)\geqslant 2^{n-2}-1.$$

A másik esetben hasonlóan

$$2=(k+1)-(k-1)=2s-2^{n-1}\cdot\frac{n-1}{s},$$

$$2s=2s^2-2^{n-1}(n-1),$$

$$2^{n-2}(n-1)=s^2-s=s(s-1),$$

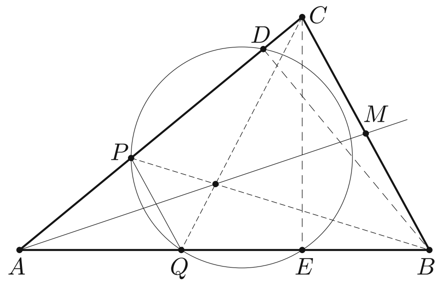
amiből (mivel s páratlan lévén osztója $(n-1)$-nek) $s(s-1)<(n-1)^2$, és így $2^{n-2}<n-1$ következik. Ennek alapján $n\geqslant 2^{n-2}$, ami csak $n\leqslant 4$ esetén teljesül. Az n számára szóbajövő négy értéket kipróbálva csak $n=1$ és $n=4$ felel meg; előbbire $(n-1)\cdot 2^n+1=1^2$, utóbbira pedig $(n-1)\cdot 2^n+1=7^2$.

Schifferer András (Kaposvári Táncsics Mihály Gimn., 12. évf.) és
Kupás Vendel Péter (Gyöngyös, Berze Nagy János Gimn., 12. évf.)
megoldását felhasználva

89 dolgozat érkezett. 5 pontos 34, 4 pontos 18, 3 pontos 10, 2 pontos 18, 1 pontos 6, 0 pontos 3 dolgozat.

B. 4949. *Az ABC hegyesszögű háromszög B-ből, illetve C-ből induló magasságának talppontja D, illetve E. Legyen P az AD, Q pedig az AE szakasz olyan belső pontja, amelyre $EDPQ$ húrnégyszög. Mutassuk meg, hogy a BP és CQ szakaszok az A-ból induló súlyvonalon metszik egymást.*

(*3 pont*)



Megoldás. Mivel $BEC\sphericalangle$ és $BDC\sphericalangle$ derékszög, azért $BCDE$ húrnégyszög. Emiatt a $CBE\sphericalangle$ és az $ADE\sphericalangle$ szög megegyezik. A P pont az AD szakasz pontja, így a $PDE\sphericalangle$ szög is ugyanekkora. Most felhasználjuk, hogy $DPQE$ is húrnégyszög, ezért $PDE\sphericalangle=PQA\sphericalangle$. Ezzel két lépésben beláttuk, hogy a $PQA\sphericalangle$ és $CBA\sphericalangle$ szögek egyenlők. A feladat feltételei alapján a P és Q pontok az eredeti háromszög oldalain vannak, így az előzőek egyállású szögek, így PQ párhuzamos BC-vel.

A BAC szögre és a BC, PQ párhuzamos egyenesekre alkalmazva a párhuzamos szelők tételét

$$\frac{AQ}{AP}=\frac{BQ}{CP} \quad\Rightarrow\quad AQ\cdot CP=BQ\cdot AP. \tag{1}$$

Az M pont a BC oldal felezőpontja, tehát $MB=MC$.

Bővítsük (1)-ben a szorzatokat az egymással megegyező MB-vel és MC-vel:

$$AQ\cdot CP\cdot MB=BQ\cdot AP\cdot CM.$$

Az ABC háromszögben az AM, BP és CQ szakaszokra alkalmazható a fenti egyenlőség alapján a Ceva-tétel megfordítása, azaz AM, BP és CQ egy pontban metszik egymást. Az AM a háromszög A-hoz tartozó súlyvonala, így az állítást igazoltuk.

Janzer Orsolya Lili (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.) dolgozata alapján

Összesen 70 dolgozat érkezett. 3 pontot kapott 67, 2 pontot 2 versenyző. 1 pontos 1 tanuló dolgozata.

B. 4951. *A V halmaz elemei olyan n-dimenziós vektorok (rendezett szám n-esek), amelyek minden koordinátája -1, 0 vagy 1. Semelyik három különböző V-beli vektor összege nem a nullvektor. Mutassuk meg, hogy $|V|\leqslant 2\cdot 3^{n-1}$.*

(4 pont)

I. megoldás. Nevezzük *bandának* (n-dimenziós, -1, 0, 1 számokból álló) vektorok egy olyan háromelemű halmazát, amelyben a három vektor összege 0. Legyen $\oplus$ az a tetszőleges n és m dimenziójú a és b vektorokra értelmezett művelet, amelynek eredménye az az $n+m$ dimenziójú vektor, amelynek első n koordinátája megegyezik a koordinátáival, a további koordinátái pedig b koordinátáival. Az n szerinti indukcióval megmutatjuk, hogy az összes n-dimenziós (0, ±1 elemű) vektorok halmaza 3^{n-1} darab, páronként diszjunkt banda egyesítése. Az $n=1$ esetén ez nyilvánvalóan igaz: egyetlen banda van, a $\{-1,0,1\}$. Tegyük föl, hogy $n=k$-ra igaz az állítás. Az $n=k+1$-re belátandó tekintsünk egy, az $n=k$ esethez tartozó felosztásban szereplő $\{A,B,C\}$ bandát; ebből a következő, $n=k+1$ dimenziós bandákat hozzuk létre:

$$\{A\oplus 0, B\oplus 1, C\oplus -1\},\ \{A\oplus -1, B\oplus 0, C\oplus 1\},\ \{A\oplus 1, B\oplus -1, C\oplus 0\}.$$

Ezzel (az indukciós feltevés alapján) $3\cdot 3^{k-1}=3^k$ darab $k+1$ dimenziós bandát konstruáltunk, amelyek páronként diszjunktak, így összesen $3\cdot 3^k=3^{k+1}$ darab különböző vektort tartalmaznak, tehát az összeset.

A feladat állítása ebből már egyszerűen következik, hiszen a követelmény szerint minden bandából legfeljebb két vektort választhatunk, és a bandák száma 3^{n-1}.

A bizonyított becslés éles: ha az összes olyan vektort tekintjük, aminek az első koordinátája 1 vagy -1, a többi pedig (0, 1 és -1 közül választva) tetszőleges, akkor ezek száma éppen $2 \cdot 3^{n-1}$, és semelyik háromnak az összege nem nulla.

Noszály Áron (Debrecen, Fazekas Mihály Gimn., 10. évf.)

II. megoldás. Az I. megoldásban bandáknak nevezett hármas csoportokba sorolást egyszerűbben is kaphatunk a következő módon. Mindegyik (n dimenziós, a 0, 1, -1 elemekből képzett) vektorhoz adjuk hozzá a csupa 1-esből álló (n dimenziós) $\mathbf{e}$ vektort, a koordináták összeadását modulo 3 végezve. (Vagyis $0+1=1$, $-1+1=0$, $1+1=-1$ szerint.) Ezzel páronként diszjunkt, $\{\mathbf{v}, \mathbf{v}+\mathbf{e}, \mathbf{v}-\mathbf{e}\}$ típusú vektor-hármasokhoz jutunk, amelyek elemei a bennük levő bármelyik vektorból az $\mathbf{e}$ legfeljebb kétszeri hozzáadásával előállíthatók, a három vektor összege pedig $\mathbf{v}+(\mathbf{v}+\mathbf{e})+(\mathbf{v}-\mathbf{e})=3\mathbf{v}=\mathbf{0}$.

Schifferer András (Kaposvár, Táncsics Mihály Gimn., 12. évf.)

68 dolgozat érkezett. 4 pontos 50, 3 pontos 4, 2 pontos 2, 1 pontos 7, 0 pontos 5 dolgozat.

B. 4953. *Bizonyítsuk be, hogy minden $n>1$ egész számra*

$$\ln n+\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{2}{3}}+\ldots+\sqrt{\frac{n-1}{n}}<\sqrt{2}+\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{4}{3}}+\ldots+\sqrt{\frac{n}{n-1}}.$$

(*5 pont*) Javasolta: *Holló Gábor* (Budapest)

I. megoldás. Először a következő segédtételt igazoljuk: minden $x>1$ valós számra

$$\ln x+\sqrt{\frac{1}{x}}<\sqrt{x}.$$

Bizonyítás: Ha $x>0$, akkor az

$$f(x)=\sqrt{x}-\sqrt{\frac{1}{x}}-\ln x$$

függvény deriváltjára

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x^3}}-\frac{1}{x}=\frac{1}{2\sqrt{x^3}}\cdot\left(x+1-2\sqrt{x}\right)=\frac{1}{2\sqrt{x^3}}\cdot\left(\sqrt{x}-1\right)^2\geqslant 0,$$

ahol egyenlőség csak $x=1$ esetén teljesülhet. Ennélfogva $f(x)$ pozitív x-ekre szigorúan monoton nő, így minden $x>1$ esetén

$$f(x)>f(1)=0, \quad \text{azaz} \quad \sqrt{x}-\sqrt{\frac{1}{x}}-\ln x>0,$$

amivel az állításunkat igazoltuk.

Mivel minden $1 \leqslant k$ egész szám esetén $\frac{k+1}{k} > 1$, a most belátott segédtétel alapján

$$\ln\frac{k+1}{k} + \sqrt{\frac{k}{k+1}} < \sqrt{\frac{k+1}{k}},$$

amit minden $1 \leqslant k < n$-re összegezve

$$\sum_{k=1}^{n-1}\ln\frac{k+1}{k} + \sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{\frac{k}{k+1}} < \sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{\frac{k+1}{k}}.$$

Itt a

$$\sum_{k=1}^{n-1}\ln\frac{k+1}{k} = \sum_{k=1}^{n-1}\ln(k+1) - \ln k$$

összeg teleszkopikusan $\ln n$-nel egyenlő, vagyis

$$\ln n + \sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{\frac{k}{k+1}} < \sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{\frac{k+1}{k}}$$

minden $n > 1$ egész esetén, ami éppen a feladat állítása.

Daróczi Sándor (Nyíregyháza, Krúdy Gy. Gimn., 12. évf.)

II. megoldás. Az n szerinti indukcióval bizonyítunk; ha $n = 2$, akkor $\ln 2 + \sqrt{\frac{1}{2}} < \sqrt{2}$ teljesülése közvetlen számolással ellenőrizhető. Az indukciós lépésben megmutatjuk, hogy $n-1$-ről n-re lépve a bizonyítandó egyenlőtlenség bal oldala kevesebbel nő, mint a jobb oldal, vagyis

$$\ln n - \ln(n-1) + \sqrt{\frac{n-1}{n}} < \sqrt{\frac{n}{n-1}}.$$

A fenti egyenlőtlenség azonos átalakításával és az $x = \sqrt{\frac{n}{n-1}}$ jelölést bevezetve:

$$\ln x^2 + \frac{1}{x} < x,$$

$$0 < x - \frac{1}{x} - 2\ln x.$$

Az utóbbi egyenlőtlenség igazolásához elegendő megmutatni, hogy a $g(x) = x - \frac{1}{x} - 2\ln x$ függvény deriváltja pozitív, ha $x > 1$. Valóban: $g(1) = 0$, és minden $x > 1$-re

$$g'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 > 0.$$

Győrffy Ágoston (Budapest, Fazekas M. Gimn., 11. évf.)

47 dolgozat érkezett. 5 pontos 35, 4 pontos 3, 3 pontos 7, 2 pontos 2 dolgozat.