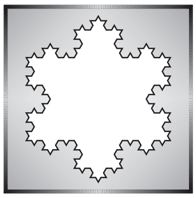

C gyakorlat megoldása

C. 1480. *Oldjuk meg az*

$$\frac{x^3-7x+6}{x-2}=\frac{2x+14}{x+2}$$

egyenletet az egész számok halmazán.

I. megoldás. Feltételek: $x\neq\pm2$, $x\in\mathbb{Z}$. Mivel

$$x^3-7x+6=x^3-4x-3x+6=x(x^2-4)-3(x-2)=$$
$$=x(x-2)(x+2)-3(x-2)=(x-2)(x^2+2x-3),$$

így az egyenlet bal oldalának számlálóját átírva:

$$\frac{(x-2)(x^2+2x-3)}{x-2}=\frac{2x+14}{x+2}.$$

Mivel

$$\frac{2x+14}{x+2}=\frac{2x+4+10}{x+2}=2+\frac{10}{x+2},$$

kapjuk, hogy

$$x^2+2x-3=2+\frac{10}{x+2},\quad \text{ahonnan}\quad x^2+2x-5=\frac{10}{x+2}.$$

Figyelembe véve, hogy $x\in\mathbb{Z}\setminus\{\pm2\}$, és így $x^2+2x-5\in\mathbb{Z}$, ahonnan következik, hogy $\frac{10}{x+2}\in\mathbb{Z}$ kell legyen, azaz $x+2$ a 10 osztója. Tehát $x+2\in\{\pm1;\pm2;\pm5;\pm10\}$.

Behelyettesítve látható, hogy egyik sem megoldás.

$x+2=1$	$x=-1$	$1-2-5\neq\frac{10}{1}$
$x+2=-1$	$x=-3$	$9-6-5\neq\frac{10}{-1}$
$x+2=2$	$x=0$	$0-0-5\neq\frac{10}{2}$
$x+2=-2$	$x=-4$	$16-8-5\neq\frac{10}{-2}$
$x+2=5$	$x=3$	$9+6-5\neq\frac{10}{5}$
$x+2=-5$	$x=-7$	$49-14-5\neq\frac{10}{-5}$
$x+2=10$	$x=8$	$64+16-5\neq\frac{10}{10}$
$x+2=-10$	$x=-12$	$144-24-5\neq\frac{10}{-10}$

Molnár István (Békéscsaba, Széchenyi István Szki., 11. évf.)

II. megoldás. Értelmezzünk, majd tüntessük el a nevezőket: $x \neq \pm 2$.

$$\begin{aligned}
(x^3-7x+6)(x+2) &= (x-2)(2x+14),\\
x^4+2x^3-7x^2-8x+12 &= 2x^2+10x-28,\\
x^4+2x^3-9x^2-18x &= -40,\\
x^3(x+2)-9x(x+2) &= -40,\\
x(x+2)(x-3)(x+3) &= -40.
\end{aligned}$$

Mivel az egész számok halmazán dolgozunk, ezért a -40 (nemcsak pozitív) osztóit kell megkeresnünk, ezeknek kell a tényezőknek megfelelniük.

A -40 osztói: 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40 és ezek -1-szeresei. Az $x+2$ és az $x+3$ egymást követő egész számok, így csak az 1, 2; -2, -1; 4, 5 és -5, -4 számok jöhetnek szóba. Ezekben az esetekben $x=-1;-3;2;-6$. A -3 és a -6 nem jók, mert nem osztói a -40-nek, a 2 pedig nincs benne az értelmezési tartományban. Nézzük meg, hogy $x=-1$ megoldás-e:

$$(-1)\cdot 1\cdot(-4)\cdot 2 \neq -40.$$

Tehát az egyenletnek nincs egész megoldása.

Görcs András (Somorja, Madách Imre Gimn., 9. évf.)

Megjegyzés. Néhányan a 3-mal való oszthatóságot vizsgálták: az egyenletet átírták $(x-1)(x+2)(x+3)=2(x+7)$ alakra, majd megnézték $x\geqslant 0$, illetve $x<0$ esetén, hogy ha x rendre 0, 1 vagy 2 maradékot ad 3-mal osztva, akkor mi a maradék a bal és a jobb oldalon. Mivel egyik esetben sem egyezik meg a maradék, ezért nincs megoldás az egész számok körében.

134 dolgozat érkezett. 5 pontos 59, 4 pontos 22, 3 pontos 20, 2 pontos 8, 1 pontos 13, 0 pontos 10 dolgozat. Nem versenyszerű: 2 dolgozat.

Matematika feladatok megoldása

B. 4878. *Legfeljebb mekkora lehet a $PA+PB+PC+PD$ összeg, ha P az $ABCD$ egységnégyzet egy pontja?*

(*4 pont*)

Megoldás. Először igazolunk egy lemmát.

Lemma. *Legyenek $0\leqslant a\leqslant 1$ és b valós számok, valamint*

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(1-x)^2+y^2}.$$