

## Megoldásvázlatok a 2018/9. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

### I. rész

1. a) Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\log_{2^x+1}(2^{x+1} + 5) = 2. \quad (6 \text{ pont})$$

b) A *LOTTÓ* (90 számból 5 húzása) megváltoztatására készülnek. Két javaslat van. Az egyik 90-ből 4 szám húzását javasolva a régi módon, a másik meg 45 számból 4 húzását javasolja a sorrend figyelembe vételével, de ez lehetővé tenné, hogy ugyanazt a számot többször is ki lehessen húzni, azaz a már húzott számot ismét visszatennék. Azt akarnák elfogadni, amelyik játék esetében kevesebb az esély a teletalálatra. Zsebszámológép nélkül (!) határozzuk meg, hogy melyiket válasszák.

(6 pont)

**Megoldás.** a) Mivel az exponenciális függvény mindig pozitív, ezért  $2^x + 1 > 1$ , tehát a logaritmus alapszáma pozitív és nem egyenlő 1-gyel, valamint  $2^{x+1} + 5 > 5$ , tehát a logaritmizálandó kifejezés is pozitív. Az egyenletünk minden valós számra értelmezett.

Rendezzük az egyenletünket, közben használjuk a logaritmus definícióját, valamint az exponenciális függvény monoton tulajdonságát:

$$\begin{aligned} \log_{2^x+1}(2^{x+1} + 5) &= 2, \\ 2^{x+1} + 5 &= (2^x + 1)^2, \\ 2 \cdot 2^x + 5 &= 2^{2x} + 2 \cdot 2^x + 1, \\ 4 &= 2^{2x}, \\ 2^2 &= 2^{2x}, \\ 2 &= 2x, \\ 1 &= x. \end{aligned}$$

Az ellenőrzés a kapott gyökököt jónak találja:

$$\log_{2^{1+1}+1}(2^{1+1} + 5) = \log_3 9 = 2.$$

b) Az első verzió szerint 90 számból 4 számot húznak a sorrend figyelembe vétele nélkül, ez megtehető

$$\binom{90}{4} = \frac{90!}{4! \cdot 86!} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

módon.

A másik esetben 45 számból 4 szám húzása a javaslat, a húzott számok sorrendjének a figyelembe vételével és a már húzott számok visszatételével. Ez megtehető  $45^4$  módon.

Induljunk ki az első módon húzott esetre kapott végeredményből és végezzünk becslést:

$$\frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{90}{2} \cdot \frac{89}{2} \cdot \frac{88}{2} \cdot \frac{87}{3} = 45 \cdot 44,5 \cdot 44 \cdot 29 < 45 \cdot 45 \cdot 45 \cdot 45 = 45^4.$$

A második módon többféle húzás lehetséges, a telitalálat valószínűsége kisebb. Tehát ezt célszerű választani.

2. a) Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet, ahol  $p$  valós paraméter:

$$3x + 2p = 5\sqrt{px}. \quad (7 \text{ pont})$$

b) Egy négyszögnek, mely egyidejűleg érintő és húrnégyszög is, az egyik oldala 5 cm és valamelyik oldaltól kezdve pozitív körbejárás szerint véve az oldalakat mértani sorozat elemeit kapjuk. Mekkora a másik három oldal és milyen négyszögről van szó? (6 pont)

**Megoldás.** a) A gyökjel alatt nem állhat negatív kifejezés, ezért a megoldhatóság feltétele:  $px \geq 0$ .

I. eset:  $p < 0$ . Ekkor a feltételből adódik, hogy  $x \leq 0$  lehet, de így az egyenlet bal oldala  $(3x + 2p)$  negatív, míg a jobb oldala nem negatív, tehát ekkor nincs megoldás.

II. eset:  $p = 0$ . Ekkor egyenletünk  $3x = 0$  alakot vesz fel, aminek az  $x = 0$  a megoldása.

III. eset:  $p > 0$ , ekkor a feltételből adódik, hogy  $x \geq 0$ , így az egyenlet mindkét oldala pozitív, ezért négyzetre emeljük és rendezzük:

$$\begin{aligned} 3x + 2p &= 5\sqrt{px}, \\ (3x + 2p)^2 &= 25px, \\ 9x^2 - 13px + 4p^2 &= 0, \\ x_{1,2} &= \frac{13p \pm \sqrt{(13p)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 4p^2}}{18} = \frac{13p \pm 5p}{18}, \\ x_1 &= p; \quad x_2 = \frac{4}{9}p. \end{aligned}$$

b) Az oldalak mértani sorozatot alkotnak, ezért jelöljük ezen sorozat első tagját  $a$ -val ( $a > 0$ ), és a hányadosát  $q$ -val ( $q > 0$ ). Ekkor az oldalak rendre  $a$ ,  $aq$ ,  $aq^2$ ,  $aq^3$  lesznek.

Mivel érintőnégyzögről van szó, ezért a szemben levő oldalak összege megegyezik, azaz

$$\begin{aligned} a + aq^2 &= aq + aq^3, \\ a + aq^2 - aq - aq^3 &= 0, \\ a(1 + q^2 - q - q^3) &= 0, \\ a(1 + q^2 - q(1 + q^2)) &= 0, \\ a(1 - q)(1 + q^2) &= 0. \end{aligned}$$

Itt  $a > 0$  és  $1 + q^2 > 0$ , ezért  $1 - q = 0$ , azaz  $q = 1$ , ekkor a négyszög minden oldala megegyezik.

Mivel az egyik oldal 5 cm, ezért minden oldala ugyanekkora, tehát rombuszról van szó. A másik feltétel szerint húrnégyszög is, azaz a rombuszok között keresünk ilyen négyszöget, ami csak négyzet lehet.

3. a) Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} \frac{x}{y} - 1 = 1 - \frac{y}{x}, \\ x^8 + 2y^6 = x^6 + 2y^8. \end{cases} \quad (6 \text{ pont})$$

b) Adjuk meg az összes  $p$  pozitív prímszámot, melyre a

$$4x^2 - 4(2p + 1)x + (4p^2 - p) = 0$$

egyenlet gyökeinek különbsége egész szám.

(7 pont)

**Megoldás.** a) Mivel tört szerepel az egyenletekben, ezért  $x \neq 0$  és  $y \neq 0$  kell a megoldhatóságához. Rendezzük az első egyenletet:

$$\begin{aligned} \frac{x}{y} - 1 &= 1 - \frac{y}{x}, \\ x^2 - xy &= xy - y^2, \\ x^2 - 2xy + y^2 &= 0, \\ (x - y)^2 &= 0, \\ x &= y. \end{aligned}$$

Ezt a második egyenletbe helyettesítve:

$$\begin{aligned} x^8 + 2y^6 &= x^6 + 2y^8, \\ x^8 + 2x^6 &= x^6 + 2x^8, \\ 0 &= x^8 - x^6, \\ 0 &= x^6(x^2 - 1), \\ 0 &= x^6(x - 1)(x + 1); \\ x_1 &= 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = -1. \end{aligned}$$

$x_1$  nem jó megoldás a kikötés miatt, a másik kettő pedig az  $M_1(1; 1)$  és  $M_2(-1; -1)$  megoldásokat szolgáltatja, amit az ellenőrzés jónak is talál.

b) Vizsgáljuk meg, hogy egyáltalán mikor van az egyenletnek valós megoldása. A diszkriminánst felírva:

$$D = [4(2p + 1)]^2 - 4 \cdot 4 \cdot (4p^2 - p) = 80p + 16 > 16,$$

ami mindig pozitív a feltételek miatt, tehát az egyenletnek minden esetben van két különböző valós gyöke.

A Viète-formulákat felírva:

$$x_1 + x_2 = 2p + 1, \quad x_1 x_2 = \frac{4p^2 - p}{4}.$$

Keressük a gyökök különbségének a négyzetét a következő azonosság alapján:

$$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = (2p + 1)^2 - 4 \cdot \frac{4p^2 - p}{4} = 5p + 1.$$

Innen a gyökök különbsége

$$|x_1 - x_2| = \sqrt{5p + 1}.$$

Ha ez egész, akkor az  $5p + 1$  kifejezés egy egész szám négyzete. A továbbiakban meg kell oldanunk az  $5p + 1 = a^2$  egyenletet, ahol  $a \in \mathbb{N}$ . Ezt átrendezve:

$$5p = a^2 - 1 = (a - 1)(a + 1).$$

Mivel 5 is és  $p$  is prím, ezért a következő esetek vannak:

$a - 1$	$a + 1$	$a$	$p$
1	$5p$	2	—
5	$p$	6	7 megoldás, $p = 7$
$p$	5	4	3 megoldás, $p = 3$
$5p$	1	0	—

Ha  $p = 3$ , akkor az egyenlet  $4x^2 - 28x + 33 = 0$ ; aminek a gyökei  $x_1 = \frac{11}{2}$  és  $x_2 = \frac{3}{2}$ ; amelyek különbsége  $x_1 - x_2 = 4$  egész.

Ha  $p = 7$ , akkor az egyenlet  $4x^2 - 60x + 189 = 0$ ; aminek a gyökei  $x_1 = \frac{21}{2}$  és  $x_2 = \frac{9}{2}$ ; amelyek különbsége  $x_1 - x_2 = 6$  egész.

4. a) Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\sin x + \sqrt{3} \cdot \cos x = 4 \cdot \sin x \cdot \cos x. \quad (7 \text{ pont})$$

b) Mekkora területet zárnak be az  $y = x$  egyenes és az  $y = x^3 - 9x^2 + 9x$  görbe? (6 pont)

**Megoldás.** a) Rendezzük a megadott egyenletet:

$$\begin{aligned}\sin x + \sqrt{3} \cdot \cos x &= 4 \cdot \sin x \cdot \cos x, \\ \frac{1}{2} \cdot \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos x &= 2 \cdot \sin x \cdot \cos x, \\ \frac{1}{2} \cdot \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos x &= \sin 2x; \\ \cos \frac{\pi}{3} &= \frac{1}{2}, \quad \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{így} \\ \cos \frac{\pi}{3} \cdot \sin x + \sin \frac{\pi}{3} \cdot \cos x &= \sin 2x, \\ \sin \left( x + \frac{\pi}{3} \right) &= \sin 2x.\end{aligned}$$

Mind a két oldalon sinus függvény áll, ezért ezek egyenlőségére 2 eset van.

*I. eset:*

$$\begin{aligned}2x &= x + \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ x &= \frac{\pi}{3} + 2k\pi.\end{aligned}$$

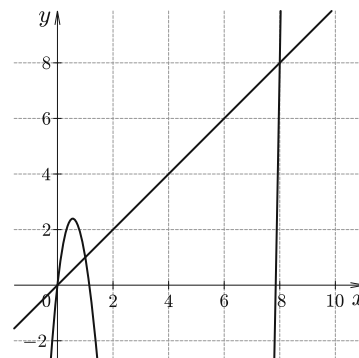
*II. eset:*

$$\begin{aligned}2x &= \pi - \left( x + \frac{\pi}{3} \right) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ 3x &= \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \\ x &= \frac{2\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi.\end{aligned}$$

Az ellenőrzés jónak találja a megadott gyököket.

b) A bezárt területhez szükségünk van a metszéspontokra:

$$\begin{aligned}x^3 - 9x^2 + 9x &= x, \\ x^3 - 9x^2 + 8x &= 0, \\ x(x^2 - 9x + 8) &= 0, \\ x(x-1)(x-8) &= 0, \\ x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 &= 8.\end{aligned}$$



A keresett terület:

$$t = \left| \int_0^1 ((x^3 - 9x^2 + 9x) - x) dx \right| + \left| \int_1^8 ((x^3 - 9x^2 + 9x) - x) dx \right|.$$

Kiszámítva a két integrált:

$$\begin{aligned} t_1 &= \int_0^1 ((x^3 - 9x^2 + 9x) - x) dx = \int_0^1 (x^3 - 9x^2 + 8x) dx = \left[ \frac{x^4}{4} - 3x^3 + 4x^2 \right]_0^1 = \\ &= \left( \frac{1^4}{4} - 3 \cdot 1^3 + 4 \cdot 1^2 \right) - \left( \frac{0^4}{4} - 3 \cdot 0^3 + 4 \cdot 0^2 \right) = \frac{5}{4} - 0 = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} t_2 &= \int_1^8 ((x^3 - 9x^2 + 9x) - x) dx = \int_1^8 (x^3 - 9x^2 + 8x) dx = \left[ \frac{x^4}{4} - 3x^3 + 4x^2 \right]_1^8 = \\ &= \left( \frac{8^4}{4} - 3 \cdot 8^3 + 4 \cdot 8^2 \right) - \left( \frac{1^4}{4} - 3 \cdot 1^3 + 4 \cdot 1^2 \right) = -256 - \frac{5}{4} = -\frac{1029}{4}. \end{aligned}$$

A kapott negatív érték azt jelzi, hogy a két függvény közül az  $y = x$  a „nagyobb” ezen az intervallumon.

A keresett terület tehát

$$t = \left| \frac{5}{4} \right| + \left| -\frac{1029}{4} \right| = \frac{1034}{4}.$$

## II. rész

5. Az  $y = x^3 - 6x^2 + 15x + c$  függvény egyik érintőjének egyenlete  $y = 6x - 5$ .  
Mekkora a  $c$  értéke? (16 pont)

**Megoldás.** Az érintő egyenletéből leolvasható, hogy meredeksége  $m = 6$ . Egy görbéhez húzott érintő meredekségét a görbe első deriváltja szolgáltatja.

$y' = 3x^2 - 12x + 15$  a függvényünk első deriváltja. Olyan pontot kell keresnünk, amely pontban a derivált felvett értéke 6, vagyis az

$$y' = 3x^2 - 12x + 15 = 6$$

egyenletet kell megoldanunk. Ennek gyökei  $x_1 = 1$  és  $x_2 = 3$ , azaz két lehetséges érintési pontot kaptunk, amely esetén a függvény és az adott érintő érinteni tudják egymást.

*I. eset:* Érintési pont  $x = 1$ . Ekkor az érintő átmegy az  $M(1;1)$  ponton (az  $y = 6x - 5$  egyenletből számolva), tehát a függvénynek is itt kell átmennie, azaz

$$1^3 - 6 \cdot 1^2 + 15 \cdot 1 + c = 1,$$

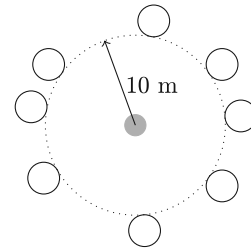
innen  $c = -9$ .

II. eset: Érintési pont  $x = 3$ . Ekkor az érintő átmegy a  $M(3;13)$  ponton (az  $y = 6x - 5$  egyenletből számolva), tehát a függvénynek is itt kell átmennie, azaz

$$3^3 - 6 \cdot 3^2 + 15 \cdot 3 + c = 13,$$

innen  $c = -5$ .

6. A rajz szerint egy 10 m sugarú kör közepén állunk puskával a kézben, amit 8 darab, 1 m sugarú tölgyfa vesz körbe nem egyenletesen elhelyezkedve (a rajz nem a valós elhelyezkedést mutatja). Véletlenszerűen 5 lövést leadva mekkora annak a valószínűsége, hogy legalább 3 lövés kijut a „fa ketrecből”? (16 pont)

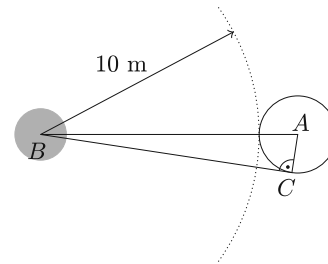


**Megoldás.** Tekintsünk csak 1 fát az ábrán látható módon.

Legyen a fa középpontja  $A$ , a mi helyünk  $B$ . Húzzunk érintőt a fához, az érintési pont legyen  $C$ , ahol derékszög van. Ekkor

$$\sin \angle ABC \leq \frac{1}{11},$$

$$\angle ABC \leq \approx 5,216^\circ.$$



Ebből következik, hogy a  $B$  pontból a fa  $2 \cdot \angle ABC \leq 10,432^\circ$  szögben látszik.

Tehát 1 fa eltalálási valószínűsége:

$$P(1 \text{ fa talál}) = \frac{10,432}{360}.$$

Nem ismerjük a fák elhelyezkedését, de 2 fa egyidejű találata lehetetlen esemény, egymást kizárják, a valószínűsége 0. Így annak a valószínűsége, hogy valamelyik fát eltaláljuk:

$$P(\text{fa találat}) = 10 \cdot P(1 \text{ fa talál}) = \frac{104,32}{360}.$$

Az egyszerűség kedvéért jelöljük ezt az értéket  $p$ -vel.

A feladatunk a  $P(\text{legalább 3 kijut az 5-ből})$  valószínűség kiszámítása:

$$P(\text{legalább 3 kijut}) = P(2 \text{ fa találat}) + P(1 \text{ fa találat}) + P(0 \text{ fa találat}).$$

$$\text{A pontosan 2 fa találat valószínűsége: } \binom{5}{2} p^2 (1-p)^3.$$

$$\text{A pontosan 1 fa találat valószínűsége: } \binom{5}{1} p^1 (1-p)^4.$$

A pontosan 0 fa találat valószínűsége:  $\binom{5}{0}p^0(1-p)^5$ .

$$P(\text{legalább 3 kijut}) = \binom{5}{2}p^2(1-p)^3 + \binom{5}{1}p^1(1-p)^4 + \binom{5}{0}p^0(1-p)^5,$$

$P(\text{legalább 3 kijut}) = 85,01\%$  (2 tizedesre kerekítve).



**7.** *Kugli játékhoz könnyen boruló bábút terveztünk. A rajz a keresztmetszeti képét ábrázolja. Vesszünk egy  $R = 30$  cm sugarú gömböt, amiből kivágunk egy a gömb középpontjából induló kúpot úgy, hogy a gömb felületén egy  $225\pi$  cm<sup>2</sup> felületdarabot vágunk ki. Ezután egy  $r = 5$  cm sugarú gömböt teszünk a csúcsra úgy, hogy a kis gömb középpontja pont a csúcsra illeszkedjék (persze, előtte a szükséges lyukat kivágjuk). Mekkora az így kapott test térfogata? (16 pont)*

**Megoldás.** A nagy gömb felszíne

$$A = 4 \cdot 30^2 \cdot \pi = 3600\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$

A kivágott kúp ebből  $225\pi$  cm<sup>2</sup> területet metsz ki, ami a teljes felszín

$$\frac{225\pi}{3600\pi} = \frac{1}{16}$$

része. Tehát a kúp térfogatának is az 1/16 részét vágjuk ki:

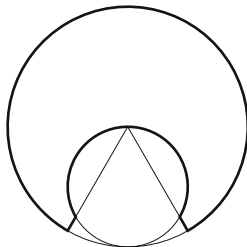
$$V_1 = \frac{1}{16} \cdot \frac{4}{3} \cdot 30^3 \pi = 2250\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$

A kúpra ráarakott kicsi gömb hasonló az eredetihez (két gömb mindig hasonló), így a vágási hányad is, de itt a 15/16-od rész marad meg, azaz

$$V_2 = \frac{15}{16} \cdot \frac{4}{3} \cdot 5^3 \pi = \frac{625}{4} \pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Így a kugli térfogata:

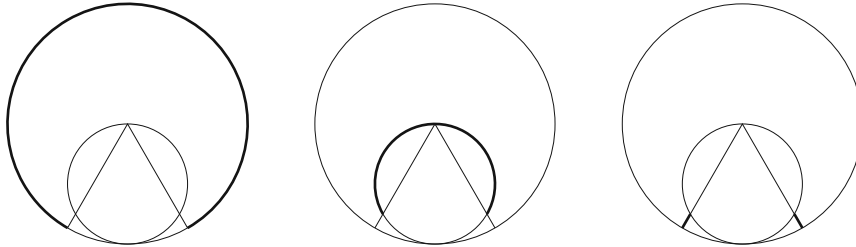
$$V = V_1 + V_2 = 2250\pi + \frac{625}{4}\pi = \frac{9625}{4}\pi \approx 7559,46 \text{ cm}^3.$$



**8.** *Egy nyakláncra medált terveztünk, melyet a rajz mutat, ahol a medált a vastag vonalak határolják. A nagy kör sugara  $R = 4$  cm, a kicsi kör belülről érinti a nagy kört és sugara  $r = 2$  cm, amit kivágunk. Hogy ne legyen hegyes a medál, ezért a nagy kör középpontjából szimmetrikusan  $60^\circ$  szög szögtartományában levő részeket is levágjuk. Mekkora a keletkezett medál kerülete, területe? (16 pont)*



**Megoldás.** A keresett terület 3 részből áll össze:



Az első rész a nagy kör területének az öthatoda, hiszen  $60^\circ$ -os középponti szögnyi területet vágunk ki:

$$k_1 = \frac{5}{6} \cdot 2 \cdot 4 \cdot \pi = \frac{20}{3} \pi \text{ (cm)}.$$

A második rész a kis kör területének a kétharmada, hiszen a  $60^\circ$  kerületi szög ebben a körben, és így a középponti szög  $120^\circ$ , tehát  $120^\circ$ -os középponti szögnyi területet vágunk ki:

$$k_2 = \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \pi = \frac{8}{3} \pi \text{ (cm)}.$$

A harmadik rész pedig két kis szakasz, melyek hosszának meghatározásához a nagy kör sugarából ki kell vonni a kis kör  $120^\circ$ -os középponti szögéhez tartozó húrját:

$$k_3 = 2(4 - 2 \cdot 2 \sin 60^\circ) = 2 \left( 4 - 2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2(4 - 2\sqrt{3}) = 8 - 4\sqrt{3} \text{ (cm)}.$$

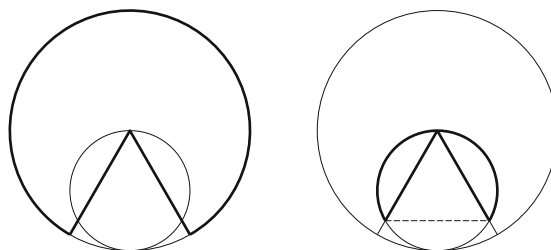
A medál kerülete:

$$k = k_1 + k_2 + k_3 = \frac{20}{3} \pi + \frac{8}{3} \pi + 8 - 4\sqrt{3} = \frac{28}{3} \pi + 8 - 4\sqrt{3} \text{ (cm)},$$

ami két tizedesjegyre kerekítve:

$$k = \frac{28}{3} \pi + 8 - 4\sqrt{3} \approx 30,39 \text{ cm}.$$

A keresett területet két rész különbségként állítjuk elő:



Az első rész a nagy kör ötödöd része:

$$t_1 = \frac{5}{6} \cdot 4^2 \cdot \pi = \frac{40}{3} \pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$

A második rész pedig a kis kör területéből kivont szabályos háromszög különbségének a kétharmada:

$$t_2 = \frac{2}{3} \left( 2^2 \cdot \pi - \frac{(2\sqrt{3})^2 \cdot \sin 60^\circ}{2} \right) = \frac{8}{3} \pi - 2\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

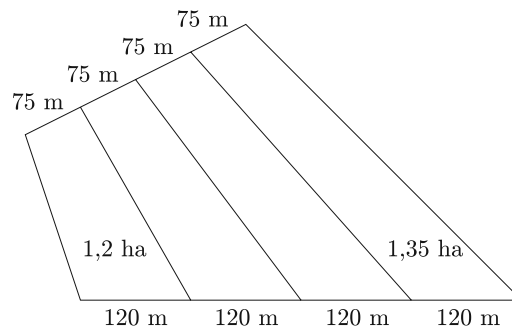
A medál területe:

$$t = t_1 - t_2 = \frac{40}{3} \pi - \left( \frac{8}{3} \pi - 2\sqrt{3} \right) = \frac{32}{3} \pi + 2\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)},$$

ami két tizedesjegyre kerekítve:

$$t = \frac{32}{3} \pi + 2\sqrt{3} \approx 36,97 \text{ cm}^2.$$

9. Az ábra egy földterület rajzát adja, amelyen 4 tulajdonos osztozik. A nyilvántartásban a középső két terület nagysága olvashatatlan. Mekkora a hiányzó két terület nagysága?



(16 pont)

**Megoldás.** Használjuk az 1. ábrán levő jelöléseket.

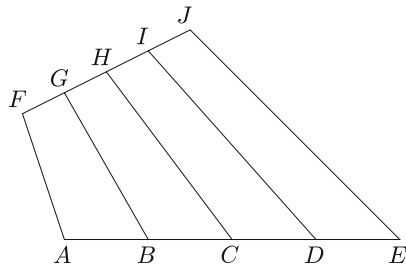
Húzzunk  $AE$ -vel párhuzamost az  $F$  ponton keresztül és bocsássunk merőlegest erre az egyenesre a másik egyenes pontjaiból (2. ábra).

A párhuzamos szelőszakaszok tételét felírva:

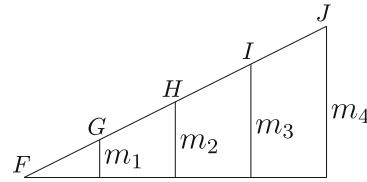
$$\frac{m_1}{FG} = \frac{m_2}{FH} = \frac{m_3}{FI} = \frac{m_4}{FJ} = \frac{m_1}{FG} = \frac{m_2}{2 \cdot FG} = \frac{m_3}{3 \cdot FG} = \frac{m_4}{4 \cdot FG},$$

$$m_2 = 2 \cdot m_1, \quad m_3 = 3 \cdot m_1, \quad m_4 = 4 \cdot m_1.$$

Bocsássunk merőlegest  $AE$  egyenesére a másik egyenes pontjaiból, valamint a négyszögeknek húzzuk meg az átlóit a 3. ábra szerint.



1. ábra



2. ábra

Az  $F$  pontból állított merőleges szakasz hosszát  $x$ -szel jelölve a  $G$ ,  $H$ ,  $I$  és  $J$  pontokból állított merőleges szakaszok hossza rendre  $x + m_1$ ,  $x + 2m_1$ ,  $x + 3m_1$ ,  $x + 4m_1$ , tehát ezek is számtani sorozatot alkotnak.

Ugyanez igaz – az ábrán meg nem húzott –  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  csúcsokból a másik egyenesre bocsátott merőlegesekkel.

Az  $ABGF$ ,  $BCHG$ ,  $CDIH$  és  $DEJI$  négyszögek területét a behúzott átlók által meghatározott háromszögek területének összegeként számolva azt kapjuk, hogy a négyszögek területei is számtani sorozatot alkotnak.

Tehát a területek:  $a_1 = 1,2$  ha;  $a_4 = 1,35$  ha, ahol  $\{a_i\}$  számtani sorozat. Ebből

$$a_4 = a_1 + 3d,$$

$$1,35 = 1,2 + 3d.$$

Innen a differencia  $0,05$  ha és a hiányzó területek:  $1,25$  ha és  $1,3$  ha.

**Szoldatics József**  
Budapest

✱

**Helyesbítés** a 2018/8. szám emelt szintű feladatsorának megoldásvázlatához.

1. Az 1.b) feladat megoldásában az egyenlet jobb oldalán  $-1$  áll, így a  $\cos x$ -re kapott másodfokú egyenlet

$$0 = \cos^2 x - \cos x - 2 = (\cos x + 1)(\cos x - 2).$$

Mivel  $\cos x$  értéke nem lehet  $2$ , így csak a  $\cos x = -1$  lehetséges. Ennek megoldása  $x = (2k + 1)\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ), de a megadott intervallumon ilyen nincs. Tehát az egyenletnek nincs megoldása az adott intervallumon.

2. A 8. feladat részpontoszámjai helyesen  $5$ ,  $5$ , és  $6$ .

Köszönjük *Németh Lászlónak*, hogy a fentiekre felhívta figyelmünket.