Hubert Tibor	2001–2004	Szlávi Péter	2001–2004
Király Zoltán	2004–2005	Kós Géza	2004–2007
Kőhegyi János	2004–2005	Marx Dániel	2004–2005
Székely Jenő	2004–2005	Brányi László	2005
Fried Katalin	2005	Iványi Antal	2005
Vásárhelyi Éva	2005	Erben Péter	2005–2006
Engedy István	2005–2008	Rácz Béla András	2005–2006
Schmidt Zoltán	2005–2006	Burcsi Péter	2006
Schmieder László	2006–2008	Engedy Balázs	2007–2012
Siegler Gábor	2008–	Fodor Zsolt	2009–
Gévay Gábor	2010–2017	Tóth Tamás	2011–2015
Weisz Ágoston	2012–2016	Farkas Csaba	2015–
Erdős Márton	2016–2017	Lóczi Lajos	2016–
Lutter András	2017–2018	László Nikolett	2017–
Busa Máté	2018–		

1992-től a lap címe **Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok,** 2015 szeptemberétől pedig **Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok Informatika Rovattal Bővítve.**

Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

I. rész

1. Kilencjegyű pozitív egész számokat képezünk úgy, hogy a képzett számban szereplő számjegy annyiszor fordul elő, amekkora a számjegy. Hány ilyen kilencjegyű szám képezhető? (*11 pont*)

2. Tekintsük a következő állításokat:

A: Ha egy függvény periodikus, akkor van legkisebb periódusa (alapperiódusa).

B: Létezik olyan 10 csúccsal rendelkező gráf, melynek fokszámai egy növekvő számtani sorozat egymást követő tagjait alkotják.

C: Ha a_n és b_n korlátos sorozatok, akkor a_nb_n is korlátos.

a) Döntsük el, hogy igazak vagy hamisak az állítások. Válaszainkat indokoljuk. (*8 pont*)

b) Fogalmazzuk meg a C állítás megfordítását. Döntsük el, hogy igaz vagy hamis az állítás megfordítása. Válaszunkat indokoljuk. (*4 pont*)

3. Tekintsük az ABC háromszöget, ahol $A(0;1)$, $B(3;4)$ és $C(4;-3)$.

a) Határozzuk meg a háromszög szögeinek nagyságát. (*4 pont*)

b) Írjuk fel a háromszög köré írt kör egyenletét. (*3 pont*) *c*) Határozzuk meg a háromszögbe írható kör sugarának pontos értékét. (*3 pont*)

d) Számítsuk ki annak a pontnak a koordinátáit, amelyben a B-ből induló belső szögfelező metszi a szemközti oldalt. (*4 pont*)

4. *a*) Adjuk meg a következő kifejezés értelmezési tartományát:

$$\log_{x+2-6x^2}\left(\frac{3-5x}{2x+4}\right). \qquad (10\ pont)$$

b) Határozzuk meg az A; B; C kijelentések logikai értékét, ha tudjuk, hogy az alábbi állítás logikai értéke hamis.

$$(A \leftrightarrow B) \to (B \vee C). \qquad (4\ pont)$$

II. rész

5. *a*) Egy négypontú üres gráfba berajzolunk három élt úgy, hogy a gráf egyszerű legyen. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az így kapott gráf összefüggő lesz? (*5 pont*)

b) Hány négy hosszú kört tartalmaz egy tízpontú teljes gráf? (*4 pont*)

Egy angolos nyelvi csoportban, ahol öt fiú és öt lány tanul, minden óra elején sződolgozatot írat a tanárnő. A szódolgozatot mindig öt tanuló írja meg úgy, hogy tanáruk egymástól függetlenül, egyenlő valószínűséggel választja ki a tanulókat.

c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a dolgozatot író tanulók között a fiúk és a lányok számának eltérése legfeljebb 2? (*3 pont*)

d) Mennyi annak a valószínűsége, hogy öt egymást követő szódolgozatnál az ötödik lesz az első olyan, ahol teljesül, hogy a dolgozatot író diákok számának eltérése legfeljebb 2?

Eredményeinket tízezredekre kerekítve adjuk meg. (*4 pont*)

6. *a*) Az $ABCDEF$ szabályos hatszög körülírt körén felvettünk egy olyan P pontot, amely nem csúcsa a hatszögnek. Mutassuk meg, hogy a P pontnak a hatszög csúcsaitól mért távolságainak négyzetösszege a P pont helyzetétől függetlenül mindig ugyanakkora. (*4 pont*)

Az iskolai darts szakkör táblája háromszög alakú, melynek oldalai 13, 14 és 15 egység hosszúak. Egy dobássorozat hét dobásból áll. Robi még kezdő játékos, ezért szorgalmasan gyakorol. Feltételezzük, hogy a táblát biztosan eltalálja, és a tábla minden pontját egyenlő valószínűséggel találja el.

b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a hét dobásból legfeljebb háromszor talál bele a háromszög beírt körébe? Válaszunkat normálalakban adjuk meg. (*6 pont*)

A tábla különböző részeinek eltalálása más-más pontot ér.

Robi utolsó hét dobásáról tudjuk, hogy az átlaguk 120 pont. Pontosan annyi, mint az adatok mediánja. Az adathalmaz egyetlen módusza 100 pont. Két dobás során éppen az átlagnak megfelelő összeget dobott, míg a legjobb találata 160 pontra sikerült.

c) Számítsuk ki az elért pontszámok szórását. (*6 pont*)

7. *a*) Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a valós számok halmazán.

$$4\cdot\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}=\sqrt{ab+a+b+1}\,, \tag{1}$$

$$2\cdot\sqrt{a+1}+5\cdot\sqrt{b+1}=2\cdot\sqrt{ab+a+b+1}\,. \tag{2}$$

(*8 pont*)

b) Kedvenc együttesem legújabb albumán négy dal különösen jóra sikerült, ezért már egy ideje csak ezt a négy dalt hallgatom a telefonomon. A telefon a dalokat egymás után véletlenszerűen, egymástól függetlenül, mindegyiket $\frac{1}{4}$ valószínűséggel játssza le. Addig hallgatom a zenéket, amíg nem következik be az első ismétlődés.

Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy ehhez 1, 2, 3, 4, 5, illetve 6 dalt kell meghallgassak, majd számítsuk ki az első ismétlésig meghallgatott dalok számának várható értékét. (*8 pont*)

8. Adott az

$$f(x)=\begin{cases} x^3, & \text{ha } \ x\leqslant 3,\\ \dfrac{12x^2-35x-3}{x-3}+p, & \text{ha } \ x>3.\end{cases}$$

függvény.

a) Határozzuk meg a p paraméter értékét úgy, hogy az $f(x)$ függvény folytonos legyen a valós számok halmazán. (*4 pont*)

Tekintsük a fenti függvényt a $[-1;2]$ intervallumon. Legyen ez a $g(x)$ függvény.

b) Adjuk meg a $g(x)$ függvénynek az inverz függvényét. Adjuk meg az inverz függvény értelmezési tartományát és értékkészletét is. (*4 pont*)

Az $f(x)$ függvény 2 abszcisszájú pontjába érintőt húzunk. (Pont abszcisszája: a pont első koordinátája.)

c) Írjuk fel az érintő egyenletét. (*4 pont*)

d) Határozzuk meg az érintő és az $f(x)$ függvény által határolt korlátos zárt síkidom területét. (*4 pont*)

9. Egy mértani sorozat első eleme 9, az első n elem összege $\frac{40}{3}$, ugyanezen elemek reciprokainak összege $\frac{40}{9}$.

a) Mutassuk meg, hogy a sorozat hányadosa $\frac{1}{3}$. (*7 pont*)

b) Határozzuk meg n értékét. (*2 pont*)

c) A sorozat mely elemei kisebbek $\frac{1}{2019}$-nél? Mennyi az összege ezen elemeknek? (*7 pont*)

Fridrik Richárd
Magister Universitas
Matematika Szekció
Szeged