KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK

INFORMATIKA ROVATTAL BŐVÍTVE

ALAPÍTOTTA: **ARANY DÁNIEL** 1894-ben

69. évfolyam 1. szám Budapest, 2019. január

Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta 64 oldalon. ÁRA: 950 Ft

TARTALOMJEGYZÉK

INDEX: 25 450 ISSN 1215-9247

A szerkesztőség címe: 1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1.A, II. emelet 2.76.; Telefon: 372-2500/6541; 372-2850
A lap megrendelhető az Interneten: `www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.h.shtml`.
Előfizetési díj egy évre: 8100 Ft

E-mail: `szerk@komal.hu`
Internet: `http://www.komal.hu`
This journal can be ordered from the Editorial office: Pázmány Péter sétány 1.A, II. emelet 2.76., 1117–Budapest, Hungary telephone: +36 (1) 372-2850 or on the Postal address H–1518 Budapest 112, P.O.B. 32, Hungary, or on the Internet: `www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.e.shtml`.

125 éves a KöMaL 2.[*]

A második újrakezdés (1947-től)

1947 novemberével indult el a lap új sorozata Soós Paula és Surányi János szerkesztésében. Ekkor már több kísérletezés történt a lap felélesztésére, erről Surányi János számolt be „Emlékeimből” c. cikkében [2].

Az új sorozat is megtartotta elődjének hagyományait. Fő céljának tekintette, hogy változatos, szellemes feladatokon keresztül fejlessze a matematika iránt érdeklődő diákság logikai és feladatmegoldó készségét, szélesítse látókörét. A legjobbakon kívül a közepes tanulókat kívánta felszabadítani a matematika iránt érzett babonás tiszteletérzéstől és bátortalanságtól. Az iskolából jól ismert dolgok tanulságos beállításával, érdekes fejtörőkön és feladatsorokon keresztül szerette volna elvezetni az olvasókat a matematika eddig ismeretlen területeire. A lap népszerűsége semmit se csökkent. A feladatmegoldásokban elért eredményekért való versengés lelkesítette a diákokat, és ha nem is személyesen, de a lapon keresztül megismerték egymást. 1950-től az éves pontverseny hivatalos értékelésére is sor került. A legjobb eredményt elért diákok könyv- vagy pénzjutalmat, a többi eredményes megoldó dicsérő oklevelet kapott, a legszorgalmasabbak arcképe is megjelent. Közben persze változások is voltak. A legfontosabb változás az, hogy az Eötvös Loránd Fizikai Társulat kezdeményezésére 1959 szeptemberétől ismét bővült a lap fizika résszel. A fizika rovat szerkesztői Bodó Zalán és Kunfalvi Rezső voltak, majd Szőkefalvi-Nagy Ágnes, Lugosi Erzsébet, Gajzágó Éva, és 1991-től Gnädig Péter. A rovat a matematika részhez hasonlóan feladatokat tartalmaz, és a megoldók részére meghirdeti az éves pontversenyt. A 80-as évek végéig pályázati kiírások is szerepeltek a lapban, ezekkel a tanulókat kísérletezésre és mérések elvégzésére serkentik. Az 1976–77-es tanévtől kezdve szerepelnek a pontversenyben mérési feladatok. A fizika újabb eredményeiről cikkekben számol be. Megindul a Kérdezz – felelek cikksorozat, amely a diákok által felvetett fizikai problémákra kíván válaszolni. A cikkek írói közt olyan kiváló fizikusok szerepelnek, mint Vermes Miklós.

A lap munkatársai vidéken ankétokat, tanulódélutánokat szerveztek. Előadó körutakon igyekeztek a lap munkáját népszerűsíteni. Munkájuk eredményeként rohamosan nőtt a feladatmegoldók száma. Később megalakult az Ifjúsági Fizikai Kör is.

A lap megoldói közül többen értek el kiemelkedő eredményt fizikából az Országos Középiskolai Tanulmányi Versenyen, az 1967-ben először megrendezett Nemzetközi Fizikai Diákolimpián, amelyen azóta is sikeresen szerepelnek a magyar diákok. A lapban megjelent fizika feladatok megoldása jó előkészületet jelent az egyetemi felvételi vizsgákhoz is. Többen a lapban megoldott feladatokon keresztül ismerték és szerették meg a fizikát, és választották a fizikusi hivatást.

[*] Az itt megjelent cikk lényegében az 1993. évi decemberi számban megjelent írás ismétlése.

Változtak a szerkesztők, a szerkesztőbizottság vezetője, a főszerkesztő, a bizottsági tagok. Némiképp a tartalom is változott. A szokásos gyakorlat és feladat rovatokon kívül voltak más típusú problémák is: a jobbaknak „pontversenyek kívüli problémák” „nehezebb feladatok”, a könnyebb feladatok „C kategória” megjelöléssel. Több cikket közöltünk, mint azelőtt. Volt „Oktotó” rovatunk *Tusnády Gábor* és „Kedvenc problémáim” *Csirmaz László* szerkesztőbizottsági vezetők ötlete alapján. A 80-as években indult Számítástechnikai Rovat *Ada-Winter Péter* kezdeményezésére, melynek irányítója *Appel György,* illetve *Székely Jenő* volt.

A lap ezen új sorozata folytatódik napjainkban is hála az elődöknek, akik kigondolták, megszervezték, elindították és ránk örökül hagyták.

Ajánlott olvasmányok

[1] Kántor Sándorné: A 125 éves KöMaL-ról, *Érintő* (2018. december), `http://ematlap.hu/index.php/tudomany-tortenet-2018-12/802-a-125-eves-komal-rol`.

[2] Surányi János: Emlékeimből, *KöMaL* (1993. december), 472–474, `http://db.komal.hu/KomalHU/cikk.phtml?id=199363`.

Időrendi táblázat

1894–1914: Középiskolai Matematikai Lapok

Szerkesztők:	Arany Dániel	1894–1896*
	Rátz László	1896–1914
	Antal Márk	1896–1914

(Az első világháború kezdetén a lap anyagi okok miatt megszűnt.)

1925–1939: Középiskolai Mathematikai és Fizikai Lapok

Szerkesztő:	Faragó Andor	1952–1939
Ábrázoló geometria rovatvezetői:	Kresznerics Károly	1925–1932
	Vigassy Lajos	1925–1939

(A második világháború kezdetekor a lap ismét megszűnt.)

1947-től: Középiskolai Matematikai Lapok (Új sorozat)

Szerkesztők:	Surányi János	1947–1948
	Soós Paula	1947–1948
Főszerkesztő:	Surányi János	1949–1959
Felelős szerkesztő:	Neukomm Gyula	1952–1957
	Lukács Ottó	1957–1958

*A számok az időtartamot jelölik.

	Bakos Tibor	1958–1974
	Fried Ervinné	1974–1990
Főszerkesztő:	Lugosi Erzsébet	1990–1992
	Oláh Vera	1993–2001
	Nagy Gyula	2001–2015
	Ratkó Éva	2015–
Főszerkesztő helyettes:	Gajzágó Éva	1992–1994
	Pataki János	1999–2007
A matematika szerkesztőbizottság vezetője:	Surányi János	1949–1972
	Tusnády Gábor	1972–1983
	Csirmaz László	1983–1985
	Pataki János	1986–1988
	Hermann Péter	1988–

1959. szeptemberétől a lap fizika rovattal bővült.

A rovat szerkesztői:	Kunfalvi Rezső	1959–1975
	Bodó Zalán	1959–1962
	Szőkefalvi-Nagy Ágnes	1975–1982
	Lugosi Erzsébet	1982–1986
		1988–1990
	Gajzágó Éva	1986–1988
		1990–1991
	Gnädig Péter	1991–
A fizika szerkesztőbizottság vezetője:	Bodó Zalán	1966–1988
	Radnai Gyula	1988–

1949-ben megalakult a matematikai szerkesztőbizottság. Tagjai egyetemi oktatók, középiskolai tanárok, az Oktatási Minisztérium képviselője és az utóbbi években olyan egyetemi hallgatók, akik eredményes megoldói voltak a lapnak, versenyeken, Nemzetközi Diákolimpián díjakat nyertek. A szerkesztőbizottság tagjai feladatokat javasolnak, megfogalmazzák a kitűzött feladatok szövegét, megoldását. Véleményükkel befolyásolják a lap tartalmát, megjelenési formáját stb.

A matematikai szerkesztőbizottság tagjai:

Gallai Tibor	1949–1951	Kalmár Lászlóné	1949–1951
Soós Paula	1949–1951	Kárteszi Ferenc	1949–1968
Hódi Endre	1950–1952	Aczél Istvánné	1952–1952
Lőrincz Pál	1953–1957	Késedi Ferenc	1953–1965
Lukács Ottó	1958–1982	Vigassy Lajos	1958–1973
Tolnai Jenő	1958–1983	Ács Pál	1963–1994
Tusnády Gábor	1966–1971	Baróti György	1974–1975
Petruska György	1974–1975	Ratkó István	1974–1981
Csirmaz László	1974–1982	Bakos Tibor	1974–1999
Lippner György	1976–1977	Gálfi László	1977–1978
Herczeg János	1977–1978	Urbán János	1977–1978

Piroska?			

Loránt László	1978–	Pataki János	1980–1994
Bogdán Zoltán	1986–1999		1998–1999
Ruttkay Zsófia	1986–1987	Kiss György	1986–2006
Károlyi Gyula	1989–2013		2009–2016
Fried Ervinné	1990–2012	Kós Géza	1990–
Benczúr Péter	1992–1996	Harcos Gergely	1992–1997
Podoski Károly	1992–1994	Csörnyei Marianna	1996–1998
Fried Katalin	1996–2005	Gyarmati Katalin	1997–1999
Pap Gyula	1997–1999	Megyeri Csaba	1999–2001
Ratkó Éva	1999–2015	Számadó László	1999–2014
Gróf Andrea	2001–2005	Csikvári Péter	2002–2005
Kosztolányiné		Miklós Ildikó	2004–2005
Nagy Erzsébet	2002–2006	Pach Péter Pál	2005–
Lorántfy László	2006–2018	Salát Máté	2006–2009
Balga Attila	2009–2012	Kiss Géza	2009–
Kós Rita	2010–	Károlyi Gergely	2015–
Szabó Éva	2016–2018	Vígh Viktor	2016–
Sztranyák Attila	2017–	Williams Kada	2017–
Ökördi Péterné	2018–		

1959-ben megalakult a fizika szerkesztőbizottság. Működése a matematika bizottsághoz hasonló.

A fizika szerkesztőbizottság tagjai:

Holics László	1959–	Varga Zoltán	1959–1962
Vermes Miklós	1959–1990		1964–1973
Bukovszky Ferenc	1959–1963	Brájer László	1959–1962
Nyilas Dezső	1964–1966	Bellay László	1963–1973
Székely György	1967–1983	Kugler Sándorné	1967–1975
Szőkefalvi-Nagy Ágnes	1974–1975	Simon László	1972–
Kunfalvi Rezső	1975–1998	Major János	1975–1985
Woynarovich Ferenc	1983, 1992–	Menyhárd Miklós	1982
Kriza György	1986–1988	Szép Jenő	1983–1992
Gálfi László	1990–	Gnädig Péter	1988–1991
Honyek Gyula	1992–	Vladár Károly	1990–
Vigh Máté	2008–	Szász Krisztián	2015–
Baranyai Klára	2016–		

A lapban először 1982 és 1987 között voltak kitűzve számítástechnika feladatok, illetve jelentek meg ilyen témájú cikkek is. Ezt a munkát Appel György irányította, aki számítástechnika bizottság híján a matematika bizottság tagjaként szerepelt. Informatika feladatokkal 2001-től jelentkezett újra a Lap, ilyen témájú cikkek pedig 2005 óta jelennek meg rendszeresen ismét. A bizottság vezetői voltak még Zsakó László (2001–2004), Horpácsi Illés (2006–2008) és Schmieder László (2008-tól).

Hubert Tibor	2001–2004	Szlávi Péter	2001–2004
Király Zoltán	2004–2005	Kós Géza	2004–2007
Kőhegyi János	2004–2005	Marx Dániel	2004–2005
Székely Jenő	2004–2005	Brányi László	2005
Fried Katalin	2005	Iványi Antal	2005
Vásárhelyi Éva	2005	Erben Péter	2005–2006
Engedy István	2005–2008	Rácz Béla András	2005–2006
Schmidt Zoltán	2005–2006	Burcsi Péter	2006
Schmieder László	2006–2008	Engedy Balázs	2007–2012
Siegler Gábor	2008–	Fodor Zsolt	2009–
Gévay Gábor	2010–2017	Tóth Tamás	2011–2015
Weisz Ágoston	2012–2016	Farkas Csaba	2015–
Erdős Márton	2016–2017	Lóczi Lajos	2016–
Lutter András	2017–2018	László Nikolett	2017–
Busa Máté	2018–		

1992-től a lap címe **Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok,** 2015 szeptemberétől pedig **Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok Informatika Rovattal Bővítve.**

Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

I. rész

1. Kilencjegyű pozitív egész számokat képezünk úgy, hogy a képzett számban szereplő számjegy annyiszor fordul elő, amekkora a számjegy. Hány ilyen kilencjegyű szám képezhető? (*11 pont*)

2. Tekintsük a következő állításokat:

A: Ha egy függvény periodikus, akkor van legkisebb periódusa (alapperiódusa).

B: Létezik olyan 10 csúccsal rendelkező gráf, melynek fokszámai egy növekvő számtani sorozat egymást követő tagjait alkotják.

C: Ha a_n és b_n korlátos sorozatok, akkor a_nb_n is korlátos.

a) Döntsük el, hogy igazak vagy hamisak az állítások. Válaszainkat indokoljuk. (*8 pont*)

b) Fogalmazzuk meg a C állítás megfordítását. Döntsük el, hogy igaz vagy hamis az állítás megfordítása. Válaszunkat indokoljuk. (*4 pont*)

3. Tekintsük az ABC háromszöget, ahol $A(0;1)$, $B(3;4)$ és $C(4;-3)$.

a) Határozzuk meg a háromszög szögeinek nagyságát. (*4 pont*)

b) Írjuk fel a háromszög köré írt kör egyenletét. (*3 pont*) *c*) Határozzuk meg a háromszögbe írható kör sugarának pontos értékét. (*3 pont*)

d) Számítsuk ki annak a pontnak a koordinátáit, amelyben a B-ből induló belső szögfelező metszi a szemközti oldalt. (*4 pont*)

4. *a*) Adjuk meg a következő kifejezés értelmezési tartományát:

$$\log_{x+2-6x^2}\left(\frac{3-5x}{2x+4}\right). \qquad (10\ pont)$$

b) Határozzuk meg az A; B; C kijelentések logikai értékét, ha tudjuk, hogy az alábbi állítás logikai értéke hamis.

$$(A \leftrightarrow B) \to (B \vee C). \qquad (4\ pont)$$

II. rész

5. *a*) Egy négypontú üres gráfba berajzolunk három élt úgy, hogy a gráf egyszerű legyen. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az így kapott gráf összefüggő lesz? (*5 pont*)

b) Hány négy hosszú kört tartalmaz egy tízpontú teljes gráf? (*4 pont*)

Egy angolos nyelvi csoportban, ahol öt fiú és öt lány tanul, minden óra elején szódolgozatot írat a tanárnő. A szódolgozatot mindig öt tanuló írja meg úgy, hogy tanáruk egymástól függetlenül, egyenlő valószínűséggel választja ki a tanulókat.

c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a dolgozatot író tanulók között a fiúk és a lányok számának eltérése legfeljebb 2? (*3 pont*)

d) Mennyi annak a valószínűsége, hogy öt egymást követő szódolgozatnál az ötödik lesz az első olyan, ahol teljesül, hogy a dolgozatot író diákok számának eltérése legfeljebb 2?

Eredményeinket tízezredekre kerekítve adjuk meg. (*4 pont*)

6. *a*) Az $ABCDEF$ szabályos hatszög körülírt körén felvettünk egy olyan P pontot, amely nem csúcsa a hatszögnek. Mutassuk meg, hogy a P pontnak a hatszög csúcsaitól mért távolságainak négyzetösszege a P pont helyzetétől függetlenül mindig ugyanakkora. (*4 pont*)

Az iskolai darts szakkör táblája háromszög alakú, melynek oldalai 13, 14 és 15 egység hosszúak. Egy dobássorozat hét dobásból áll. Robi még kezdő játékos, ezért szorgalmasan gyakorol. Feltételezzük, hogy a táblát biztosan eltalálja, és a tábla minden pontját egyenlő valószínűséggel találja el.

b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a hét dobásból legfeljebb háromszor talál bele a háromszög beírt körébe? Válaszunkat normálalakban adjuk meg. (*6 pont*)

A tábla különböző részeinek eltalálása más-más pontot ér.

Robi utolsó hét dobásáról tudjuk, hogy az átlaguk 120 pont. Pontosan annyi, mint az adatok mediánja. Az adathalmaz egyetlen módusza 100 pont. Két dobás során éppen az átlagnak megfelelő összeget dobott, míg a legjobb találata 160 pontra sikerült.

c) Számítsuk ki az elért pontszámok szórását. (*6 pont*)

7. *a*) Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a valós számok halmazán.

$$4\cdot\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}=\sqrt{ab+a+b+1}\,, \tag{1}$$

$$2\cdot\sqrt{a+1}+5\cdot\sqrt{b+1}=2\cdot\sqrt{ab+a+b+1}\,. \tag{2}$$

(*8 pont*)

b) Kedvenc együttesem legújabb albumán négy dal különösen jóra sikerült, ezért már egy ideje csak ezt a négy dalt hallgatom a telefonomon. A telefon a dalokat egymás után véletlenszerűen, egymástól függetlenül, mindegyiket $\frac{1}{4}$ valószínűséggel játssza le. Addig hallgatom a zenéket, amíg nem következik be az első ismétlődés.

Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy ehhez 1, 2, 3, 4, 5, illetve 6 dalt kell meghallgassak, majd számítsuk ki az első ismétlésig meghallgatott dalok számának várható értékét. (*8 pont*)

8. Adott az

$$f(x)=\begin{cases} x^3, & \text{ha } x\leqslant 3,\\ \dfrac{12x^2-35x-3}{x-3}+p, & \text{ha } x>3.\end{cases}$$

függvény.

a) Határozzuk meg a p paraméter értékét úgy, hogy az $f(x)$ függvény folytonos legyen a valós számok halmazán. (*4 pont*)

Tekintsük a fenti függvényt a $[-1;2]$ intervallumon. Legyen ez a $g(x)$ függvény.

b) Adjuk meg a $g(x)$ függvénynek az inverz függvényét. Adjuk meg az inverz függvény értelmezési tartományát és értékkészletét is. (*4 pont*)

Az $f(x)$ függvény 2 abszcisszájú pontjába érintőt húzunk. (Pont abszcisszája: a pont első koordinátája.)

c) Írjuk fel az érintő egyenletét. (*4 pont*)

d) Határozzuk meg az érintő és az $f(x)$ függvény által határolt korlátos zárt síkidom területét. (*4 pont*)

9. Egy mértani sorozat első eleme 9, az első n elem összege $\frac{40}{3}$, ugyanezen elemek reciprokainak összege $\frac{40}{9}$.

a) Mutassuk meg, hogy a sorozat hányadosa $\frac{1}{3}$. (*7 pont*)

b) Határozzuk meg n értékét. (*2 pont*)

c) A sorozat mely elemei kisebbek $\frac{1}{2019}$-nél? Mennyi az összege ezen elemeknek? (*7 pont*)

Fridrik Richárd
Magister Universitas
Matematika Szekció
Szeged

Megoldásvázlatok a 2018/9. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *a) Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:*

$$\log_{2^x+1}\left(2^{x+1}+5\right)=2. \qquad (6\ pont)$$

b) A LOTTÓ (90 számból 5 húzása) megváltoztatására készülnek. Két javaslat van. Az egyik 90-ből 4 szám húzását javasolva a régi módon, a másik meg 45 számból 4 húzását javasolja a sorrend figyelembe vételével, de ez lehetővé tenné, hogy ugyanazt a számot többször is ki lehessen húzni, azaz a már húzott számot ismét visszatennék. Azt akarnák elfogadni, amelyik játék esetében kevesebb az esély a telitalálatra. Zsebszámológép nélkül (!) határozzuk meg, hogy melyiket válasszák.

(6 pont)

Megoldás. *a)* Mivel az exponenciális függvény mindig pozitív, ezért $2^x+1>1$, tehát a logaritmus alapszáma pozitív és nem egyenlő 1-gyel, valamint $2^{x+1}+5>5$, tehát a logaritmizálandó kifejezés is pozitív. Az egyenletünk minden valós számra értelmezett.

Rendezzük az egyenletünket, közben használjuk a logaritmus definícióját, valamint az exponenciális függvény monoton tulajdonságát:

$$\begin{aligned}
\log_{2^x+1}(2^{x+1}+5)&=2,\\
2^{x+1}+5&=\left(2^x+1\right)^2,\\
2\cdot 2^x+5&=2^{2x}+2\cdot 2^x+1,\\
4&=2^{2x},\\
2^2&=2^{2x},\\
2&=2x,\\
1&=x.
\end{aligned}$$

Az ellenőrzés a kapott gyököt jónak találja:

$$\log_{2^1+1}(2^{1+1}+5)=\log_3 9=2.$$

b) Az első verzió szerint 90 számból 4 számot húznak a sorrend figyelembe vétele nélkül, ez megtehető

$$\binom{90}{4}=\frac{90!}{4!\cdot 86!}=\frac{90\cdot 89\cdot 88\cdot 87}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$$

módon.

A másik esetben 45 számból 4 szám húzása a javaslat, a húzott számok sorrendjének a figyelembe vételével és a már húzott számok visszatételével. Ez megtehető 45^4 módon.

Induljunk ki az első módon húzott esetre kapott végeredményből és végezzünk becslést:

$$\frac{90\cdot 89\cdot 88\cdot 87}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=\frac{90}{2}\cdot\frac{89}{2}\cdot\frac{88}{2}\cdot\frac{87}{3}=45\cdot 44,5\cdot 44\cdot 29<45\cdot 45\cdot 45\cdot 45=45^4.$$

A második módon többféle húzás lehetséges, a telitalálat valószínűsége kisebb. Tehát ezt célszerű választani.

2. *a*) *Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet, ahol p valós paraméter:*

$$3x+2p=5\sqrt{px}. \qquad (7\ pont)$$

b) *Egy négyszögnek, mely egyidejűleg érintő és húrnégyszög is, az egyik oldala* 5 cm *és valamelyik oldaltól kezdve pozitív körbejárás szerint véve az oldalakat mértani sorozat elemeit kapjuk. Mekkora a másik három oldal és milyen négyszögről van szó?* (*6 pont*)

Megoldás. *a*) A gyökjel alatt nem állhat negatív kifejezés, ezért a megoldhatóság feltétele: $px\geqslant 0$.

I. eset: $p<0$. Ekkor a feltételből adódik, hogy $x\leqslant 0$ lehet, de így az egyenlet bal oldala $(3x+2p)$ negatív, míg a jobb oldala nem negatív, tehát ekkor nincs megoldás.

II. eset: $p=0$. Ekkor egyenletünk $3x=0$ alakot vesz fel, aminek az $x=0$ a megoldása.

III. eset: $p>0$, ekkor a feltételből adódik, hogy $x\geqslant 0$, így az egyenlet mindkét oldala pozitív, ezért négyzetre emeljük és rendezzük:

$$3x+2p=5\sqrt{px}\,,$$

$$(3x+2p)^2=25px,$$

$$9x^2-13px+4p^2=0,$$

$$x_{1,2}=\frac{13p\pm\sqrt{(13p)^2-4\cdot 9\cdot 4p^2}}{18}=\frac{13p\pm 5p}{18},$$

$$x_1=p;\qquad x_2=\frac{4}{9}p.$$

b) Az oldalak mértani sorozatot alkotnak, ezért jelöljük ezen sorozat első tagját a-val ($a>0$), és a hányadosát q-val ($q>0$). Ekkor az oldalak rendre a, aq, aq^2, aq^3 lesznek.

Mivel érintőnégyszögről van szó, ezért a szemben levő oldalak összege megegyezik, azaz

$$\begin{aligned} a + aq^2 &= aq + aq^3, \\ a + aq^2 - aq - aq^3 &= 0, \\ a(1 + q^2 - q - q^3) &= 0, \\ a\big(1 + q^2 - q(1 + q^2)\big) &= 0, \\ a(1 - q)(1 + q^2) &= 0. \end{aligned}$$

Itt $a > 0$ és $1 + q^2 > 0$, ezért $1 - q = 0$, azaz $q = 1$, ekkor a négyszög minden oldala megegyezik.

Mivel az egyik oldal 5 cm, ezért minden oldala ugyanekkora, tehát rombuszról van szó. A másik feltétel szerint húrnégyszög is, azaz a rombuszok között keresünk ilyen négyszöget, ami csak négyzet lehet.

3. *a*) *Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletrendszert:*

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} - 1 = 1 - \dfrac{y}{x}, \\ x^8 + 2y^6 = x^6 + 2y^8. \end{cases}$$

(*6 pont*)

b) *Adjuk meg az összes p pozitív prímszámot, melyre a*

$$4x^2 - 4(2p + 1)x + (4p^2 - p) = 0$$

egyenlet gyökeinek különbsége egész szám. (*7 pont*)

Megoldás. *a*) Mivel tört szerepel az egyenletekben, ezért $x \neq 0$ és $y \neq 0$ kell a megoldhatósághoz. Rendezzük az első egyenletet:

$$\begin{aligned} \frac{x}{y} - 1 &= 1 - \frac{y}{x}, \\ x^2 - xy &= xy - y^2, \\ x^2 - 2xy + y^2 &= 0, \\ (x - y)^2 &= 0, \\ x &= y. \end{aligned}$$

Ezt a második egyenletbe helyettesítve:

$$\begin{aligned} x^8 + 2y^6 &= x^6 + 2y^8, \\ x^8 + 2x^6 &= x^6 + 2x^8, \\ 0 &= x^8 - x^6, \\ 0 &= x^6(x^2 - 1), \\ 0 &= x^6(x - 1)(x + 1); \end{aligned}$$

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 1, \qquad x_3 = -1.$$

x_1 nem jó megoldás a kikötés miatt, a másik kettő pedig az $M_1(1;1)$ és $M_2(-1;-1)$ megoldásokat szolgáltatja, amit az ellenőrzés jónak is talál.

b) Vizsgáljuk meg, hogy egyáltalán mikor van az egyenletnek valós megoldása. A diszkriminánst felírva:

$$D = \left[4(2p+1)\right]^2 - 4 \cdot 4 \cdot (4p^2 - p) = 80p + 16 > 16,$$

ami mindig pozitív a feltételek miatt, tehát az egyenletnek minden esetben van két különböző valós gyöke.

A Viète-formulákat felírva:

$$x_1 + x_2 = 2p + 1, \qquad x_1x_2 = \frac{4p^2 - p}{4}.$$

Keressük a gyökök különbségének a négyzetét a következő azonosság alapján:

$$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = (2p+1)^2 - 4 \cdot \frac{4p^2 - p}{4} = 5p + 1.$$

Innen a gyökök különbsége

$$|x_1 - x_2| = \sqrt{5p+1}\,.$$

Ha ez egész, akkor az $5p + 1$ kifejezés egy egész szám négyzete. A továbbiakban meg kell oldanunk az $5p + 1 = a^2$ egyenletet, ahol $a \in \mathbb{N}$. Ezt átrendezve:

$$5p = a^2 - 1 = (a-1)(a+1).$$

Mivel 5 is és p is prím, ezért a következő esetek vannak:

$a-1$	$a+1$	a	p	
1	$5p$	2	—	
5	p	6	7	megoldás, $p = 7$
p	5	4	3	megoldás, $p = 3$
$5p$	1	0	—	

Ha $p = 3$, akkor az egyenlet $4x^2 - 28x + 33 = 0$; aminek a gyökei $x_1 = \frac{11}{2}$ és $x_2 = \frac{3}{2}$; amelyek különbsége $x_1 - x_2 = 4$ egész.

Ha $p = 7$, akkor az egyenlet $4x^2 - 60x + 189 = 0$; aminek a gyökei $x_1 = \frac{21}{2}$ és $x_2 = \frac{9}{2}$; amelyek különbsége $x_1 - x_2 = 6$ egész.

4. *a*) *Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:*

$$\sin x + \sqrt{3} \cdot \cos x = 4 \cdot \sin x \cdot \cos x. \qquad (7\ pont)$$

b) *Mekkora területet zárnak be az $y = x$ egyenes és az $y = x^3 - 9x^2 + 9x$ görbe?* *(6 pont)*

Megoldás. *a*) Rendezzük a megadott egyenletet:

$$\sin x + \sqrt{3} \cdot \cos x = 4 \cdot \sin x \cdot \cos x,$$

$$\frac{1}{2} \cdot \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x,$$

$$\frac{1}{2} \cdot \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos x = \sin 2x;$$

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \quad \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{így}$$

$$\cos\frac{\pi}{3} \cdot \sin x + \sin\frac{\pi}{3} \cdot \cos x = \sin 2x,$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin 2x.$$

Mind a két oldalon sinus függvény áll, ezért ezek egyenlőségére 2 eset van.

I. eset:

$$2x = x + \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi.$$

II. eset:

$$2x = \pi - \left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

$$3x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi,$$

$$x = \frac{2\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi.$$

Az ellenőrzés jónak találja a megadott gyököket.

b) A bezárt területhez szükségünk van a metszéspontokra:

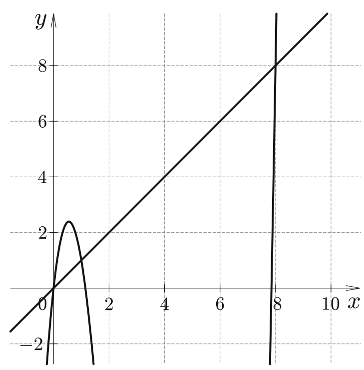
$$x^3 - 9x^2 + 9x = x,$$

$$x^3 - 9x^2 + 8x = 0,$$

$$x(x^2 - 9x + 8) = 0,$$

$$x(x-1)(x-8) = 0,$$

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 1, \qquad x_3 = 8.$$



A keresett terület:

$$t=\left|\int_0^1 \big((x^3-9x^2+9x)-x\big)\,\mathrm{d}x\right|+\left|\int_1^8 \big((x^3-9x^2+9x)-x\big)\,\mathrm{d}x\right|.$$

Kiszámítva a két integrált:

$$t_1=\int_0^1 \big((x^3-9x^2+9x)-x\big)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 \big(x^3-9x^2+8x\big)\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x^4}{4}-3x^3+4x^2\right]_0^1=$$
$$=\left(\frac{1^4}{4}-3\cdot 1^3+4\cdot 1^2\right)-\left(\frac{0^4}{4}-3\cdot 0^3+4\cdot 0^2\right)=\frac{5}{4}-0=\frac{5}{4}$$

és

$$t_2=\int_1^8 \big((x^3-9x^2+9x)-x\big)\,\mathrm{d}x=\int_1^8 \big(x^3-9x^2+8x\big)\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x^4}{4}-3x^3+4x^2\right]_1^8=$$
$$=\left(\frac{8^4}{4}-3\cdot 8^3+4\cdot 8^2\right)-\left(\frac{1^4}{4}-3\cdot 1^3+4\cdot 1^2\right)=-256-\frac{5}{4}=-\frac{1029}{4}.$$

A kapott negatív érték azt jelzi, hogy a két függvény közül az $y=x$ a „nagyobb” ezen az intervallumon.

A keresett terület tehát

$$t=\left|\frac{5}{4}\right|+\left|-\frac{1029}{4}\right|=\frac{1034}{4}.$$

II. rész

5. *Az $y=x^3-6x^2+15x+c$ függvény egyik érintőjének egyenlete $y=6x-5$. Mekkora a c értéke?* (*16 pont*)

Megoldás. Az érintő egyenletéből leolvasható, hogy meredeksége $m=6$. Egy görbéhez húzott érintő meredekségét a görbe első deriváltja szolgáltatja.

$y'=3x^2-12x+15$ a függvényünk első deriváltja. Olyan pontot kell keresnünk, amely pontban a derivált felvett értéke 6, vagyis az

$$y'=3x^2-12x+15=6$$

egyenletet kell megoldanunk. Ennek gyökei $x_1=1$ és $x_2=3$, azaz két lehetséges érintési pontot kaptunk, amely esetén a függvény és az adott érintő érinteni tudják egymást.

I. eset: Érintési pont $x=1$. Ekkor az érintő átmegy az $M(1;1)$ ponton (az $y=$ $=6x-5$ egyenletből számolva), tehát a függvénynek is itt kell átmennie, azaz

$$1^3-6\cdot 1^2+15\cdot 1+c=1,$$

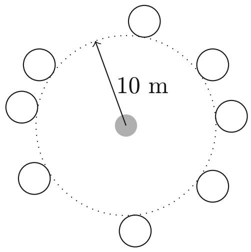
innen $c=-9$.

II. eset: Érintési pont $x=3$. Ekkor az érintő átmegy a $M(3;13)$ ponton (az $y=$ $=6x-5$ egyenletből számolva), tehát a függvénynek is itt kell átmennie, azaz

$$3^3-6\cdot 3^2+15\cdot 3+c=13,$$

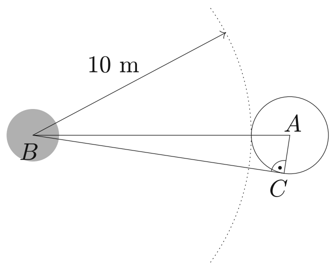
innen $c=-5$.

6. *A* rajz *szerint egy* 10 m *sugarú kör közepén állunk puskával a kézben, amit* 8 *darab,* 1 m *sugarú tölgyfa vesz körbe nem egyenletesen elhelyezkedve (a rajz nem a valós elhelyezkedést mutatja). Véletlenszerűen* 5 *lövést leadva mekkora annak a valószínűsége, hogy legalább* 3 *lövés kijut a „fa ketrecből”?* (*16 pont*)



Megoldás. Tekintsünk csak 1 fát az *ábrán* látható módon.

Legyen a fa középpontja A, a mi helyünk B. Húzzunk érintőt a fához, az érintési pont legyen C, ahol derékszög van. Ekkor



$$\sin ABC\sphericalangle=\frac{1}{11},$$

$$ABC\sphericalangle\approx 5{,}216^\circ.$$

Ebből következik, hogy a B pontból a fa $2\cdot ABC\sphericalangle=10{,}432^\circ$ szögben látszik.

Tehát 1 fa eltalálási valószínűsége:

$$P(1\text{ fa talál})=\frac{10{,}432}{360}.$$

Nem ismerjük a fák elhelyezkedését, de 2 fa egyidejű találata lehetetlen esemény, egymást kizárják, a valószínűsége 0. Így annak a valószínűsége, hogy valamelyik fát eltaláljuk:

$$P(\text{fa találat})=10\cdot P(1\text{ fa talál})=\frac{104{,}32}{360}.$$

Az egyszerűség kedvéért jelöljük ezt az értéket p-vel.

A feladatunk a $P(\text{legalább 3 kijut az 5-ből})$ valószínűség kiszámítása:

$$P(\text{legalább 3 kijut})=P(2\text{ fa találat})+P(1\text{ fa találat})+P(0\text{ fa találat}).$$

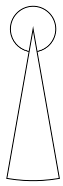
A pontosan 2 fa találat valószínűsége: $\binom{5}{2}p^2(1-p)^3$.

A pontosan 1 fa találat valószínűsége: $\binom{5}{1}p^1(1-p)^4$.

A pontosan 0 fa találat valószínűsége: $\binom{5}{0}p^0(1-p)^5$.

$$P(\text{legalább 3 kijut}) = \binom{5}{2}p^2(1-p)^3 + \binom{5}{1}p^1(1-p)^4 + \binom{5}{0}p^0(1-p)^5,$$

$$P(\text{legalább 3 kijut}) = 85{,}01\% \text{ (2 tizedesre kerekítve).}$$



7. *Kugli játékhoz könnyen boruló bábut terveztünk. A* rajz *a keresztmetszeti képét ábrázolja. Veszünk egy $R = 30$ cm sugarú gömböt, amiből kivágunk egy a gömb középpontjából induló kúpot úgy, hogy a gömb felületén egy 225π cm^2 felületdarabot vágunk ki. Ezután egy $r = 5$ cm sugarú gömböt teszünk a csúcsra úgy, hogy a kis gümb középpontja pont a csúcsra illeszkedjék (persze, előtte a szükséges lyukat kivágjuk). Mekkora az így kapott test térfogata?* (*16 pont*)

Megoldás. A nagy gömb felszíne

$$A = 4 \cdot 30^2 \cdot \pi = 3600\pi \ (\text{cm}^2).$$

A kivágott kúp ebből 225π cm^2 területet metsz ki, ami a teljes felszín

$$\frac{225\pi}{3600\pi} = \frac{1}{16}$$

része. Tehát a kúp térfogatának is az 1/16 részét vágjuk ki:

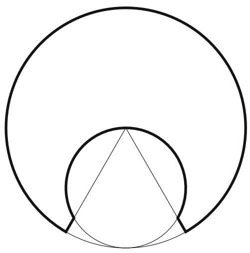
$$V_1 = \frac{1}{16} \cdot \frac{4}{3} \cdot 30^3\pi = 2250\pi \ (\text{cm}^3).$$

A kúpra rárakott kicsi gömb hasonló az eredetihez (két gömb mindig hasonló), így a vágási hányad is, de itt a 15/16-od rész marad meg, azaz

$$V_2 = \frac{15}{16} \cdot \frac{4}{3} \cdot 5^3\pi = \frac{625}{4}\pi \ (\text{cm}^3).$$

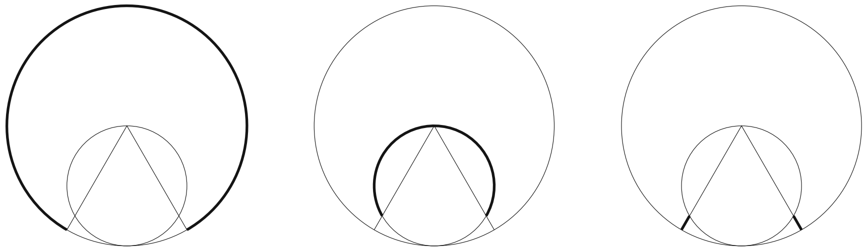
Így a kugli térfogata:

$$V = V_1 + V_2 = 2250\pi + \frac{625}{4}\pi = \frac{9625}{4}\pi \approx 7559{,}46 \text{ cm}^3.$$



8. *Egy nyakláncra medált terveztünk, melyet a rajz mutat, ahol a medált a vastag vonalak határolják. A nagy kör sugara $R = 4$ cm, a kicsi kör belülről érinti a nagy kört és sugara $r = 2$ cm, amit kivágunk. Hogy ne legyen hegyes a medál, ezért a nagy kör középpontjából szimmetrikusan 60° szög szögtartományában levő részeket is levágjuk. Mekkora a keletkezett medál kerülete, területe?* (*16 pont*)

Megoldás. A keresett kerület 3 részből áll össze:



Az első rész a nagy kör kerületének az öthatoda, hiszen 60°-os középponti szögnyi kerületet vágunk ki:

$$k_1 = \frac{5}{6} \cdot 2 \cdot 4 \cdot \pi = \frac{20}{3}\pi \text{ (cm)}.$$

A második rész a kis kör kerületének a kétharmada, hiszen a 60° kerületi szög ebben a körben, és így a középponti szög 120°, tehát 120°-os középponti szögnyi kerületet vágunk ki:

$$k_2 = \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \pi = \frac{8}{3}\pi \text{ (cm)}.$$

A harmadik rész pedig két kis szakasz, melyek hosszának meghatározásához a nagy kör sugarából ki kell vonni a kis kör 120°-os középponti szögéhez tartozó húrját:

$$k_3 = 2(4 - 2 \cdot 2\sin 60^\circ) = 2\left(4 - 2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\big(4 - 2\sqrt{3}\big) = 8 - 4\sqrt{3} \text{ (cm)}\,.$$

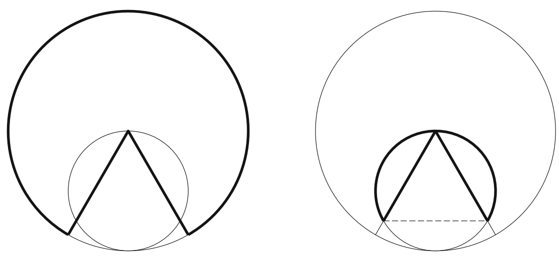
A medál kerülete:

$$k = k_1 + k_2 + k_3 = \frac{20}{3}\pi + \frac{8}{3}\pi + 8 - 4\sqrt{3} = \frac{28}{3}\pi + 8 - 4\sqrt{3} \text{ (cm)}\,,$$

ami két tizedesjegyre kerekítve:

$$k = \frac{28}{3}\pi + 8 - 4\sqrt{3} \approx 30{,}39 \text{ cm}.$$

A keresett területet két rész különbségeként állítjuk elő:



Az első rész a nagy kör öthatod része:

$$t_1 = \frac{5}{6} \cdot 4^2 \cdot \pi = \frac{40}{3}\pi \ (\mathrm{cm}^2).$$

A második rész pedig a kis kör területéből kivont szabályos háromszög különbségének a kétharmada:

$$t_2 = \frac{2}{3}\left(2^2 \cdot \pi - \frac{\left(2\sqrt{3}\right)^2 \cdot \sin 60^\circ}{2}\right) = \frac{8}{3}\pi - 2\sqrt{3} \ (\mathrm{cm}^2).$$

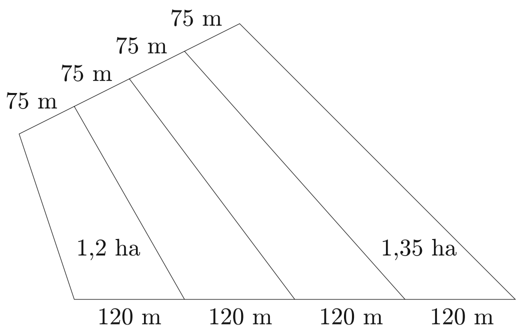
A medál területe:

$$t = t_1 - t_2 = \frac{40}{3}\pi - \left(\frac{8}{3}\pi - 2\sqrt{3}\right) = \frac{32}{3}\pi + 2\sqrt{3} \ (\mathrm{cm}^2),$$

ami két tizedesjegyre kerekítve:

$$t = \frac{32}{3}\pi + 2\sqrt{3} \approx 36{,}97 \ \mathrm{cm}^2.$$

9. *Az* ábra *egy földterület rajzát adja, amelyen* 4 *tulajdonos osztozik. A nyilvántartásban a középső két terület nagysága olvashatatlan. Mekkora a hiányzó két terület nagysága?*



(*16 pont*)

Megoldás. Használjuk az *1. ábrán* levő jelöléseket.

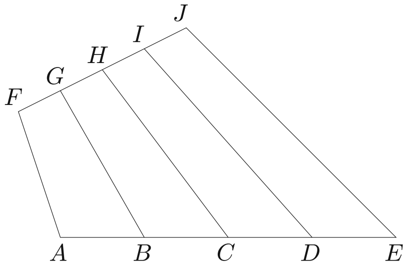
Húzzunk AE-vel párhuzamost az F ponton keresztül és bocsássunk merőlegest erre az egyenesre a másik egyenes pontjaiból (*2. ábra*).

A párhuzamos szelőszakaszok tételét felírva:

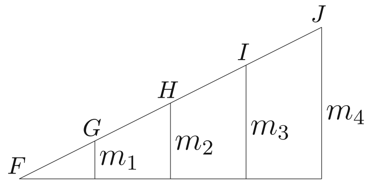
$$\frac{m_1}{FG} = \frac{m_2}{FH} = \frac{m_3}{FI} = \frac{m_4}{FJ} = \frac{m_1}{FG} = \frac{m_2}{2 \cdot FG} = \frac{m_3}{3 \cdot FG} = \frac{m_4}{4 \cdot FG},$$

$$m_2 = 2 \cdot m_1, \qquad m_3 = 3 \cdot m_1, \qquad m_4 = 4 \cdot m_1.$$

Bocsássunk merőlegest AE egyenesére a másik egyenes pontjaiból, valamint a négyszögeknek húzzuk meg az átlóit a *3. ábra* szerint.

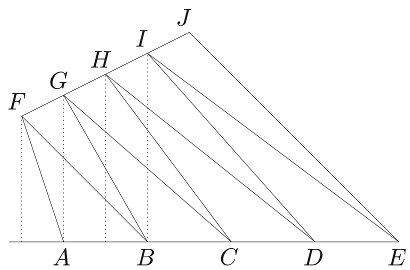


1. ábra



2. ábra

Az F pontból állított merőleges szakasz hosszát x-szel jelölve a G, H, I és J pontokból állított merőleges szakaszok hossza rendre $x+m_1$, $x+2m_1$, $x+3m_1$, $x+4m_1$, tehát ezek is számtani sorozatot alkotnak.



3. ábra

Ugyanez igaz – az ábrán meg nem húzott – A, B, C, D, E csúcsokból a másik egyenesre bocsátott merőlegesekkel.

Az $ABGF$, $BCHG$, $CDIH$ és $DEJI$ négyszögek területét a behúzott átlók által meghatározott háromszögek területének összegeként számolva azt kapjuk, hogy a négyszögek területei is számtani sorozatot alkotnak.

Tehát a területekre: $a_1=1{,}2$ ha; $a_4=1{,}35$ ha, ahol $\{a_i\}$ számtani sorozat. Ebből

$$a_4=a_1+3d,$$
$$1{,}35=1{,}2+3d.$$

Innen a differencia 0,05 ha és a hiányzó területek: 1,25 ha és 1,3 ha.

Szoldatics József
Budapest

❄

Helyesbítés a 2018/8. szám emelt szintű feladatsorának megoldásvázlatához.

1. Az **1.***b*) feladat megoldásában az egyenlet jobb oldalán -1 áll, így a $\cos x$-re kapott másodfokú egyenlet

$$0=\cos^2 x-\cos x-2=(\cos x+1)(\cos x-2).$$

Mivel $\cos x$ értéke nem lehet 2, így csak a $\cos x=-1$ lehetséges. Ennek megoldása $x=(2k+1)\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$, de a megadott intervallumon ilyen nincs. Tehát az egyenletnek nincs megoldása az adott intervallumon.

2. A 8. feladat részpontszámai helyesen 5, 5, és 6.

Köszönjük *Németh Lászlónak,* hogy a fentiekre felhívta figyelmünket.

Szociális pályázat ingyenes matektábori részvételre

A Matematika Összeköt Egyesület évek óta kínál egyedülálló, izgalmas rendezvényeket országszerte, minden érdeklődő számára. Célunk, hogy az élményszerű megközelítés segítségével minél több gyereket vigyünk közelebb a matematikához. Versenyeink, a Medve Szabadtéri Matematika Versenyek során kimozdítjuk a tanulókat a természetbe, valamint a kooperatív gondolkodás előnyeit közvetítjük a résztvevő csapatoknak. Tehetséggondozó táboraink minden 5–12. évfolyamos diák előtt nyitva állnak. Délelőtt a kiscsoportos foglalkozások alatt különböző, a tanórákon ritkán vagy egyáltalán nem előforduló témákban mélyedhetnek el a résztvevők, míg délutánonként további, a matematikát játékokkal ötvöző programok várnak rájuk.

Annak érdekében, hogy minél több diák részt tudjon venni táborainkban, indítottunk egy pályázatot, melyet olyan gyerekek számára hoztuk létre, akik matematikai képességei figyelemre méltóak, szeretnék átélni a Medve élményt, de nem rendelkeznek olyan anyagi háttérrel, hogy megengedhessenek maguknak egy ilyen tábort.

A pályázáshoz olyan dokumentumokat kell benyújtani, melyek igazolják, hogy a diák érdeklődik a matematika iránt (tanulmányi eredmény igazolása, tanár által írt ajánlólevél, illetve ha vannak, versenyeredmények), valamint rászorul az anyagi támogatásra. Ezek alapján több kategóriába soroljuk a gyereket. Olyanokra, akiknek az egész tábor díját biztosítjuk, illetve másoknak kedvezményt ajánlunk fel valamely táborunkra.

Hogy pályázatunk olyan gyerekekhez jusson el, akik ténylegesen ilyen helyzetben vannak, arra kérjük önt, hogy amennyiben ismer ilyen diákot, értesítse erről a lehetőségről, illetve terjessze kollégái és ismerősei között.

Amennyiben felkeltettük figyelmét és szeretne többet megtudni a kezdeményezésünkről, az alábbi linken elolvashatja a pályázat részletes leírását:

`http://medvematek.hu/tamogatas/palyazat-taborozasra`.

A pályázattal kapcsolatos további kérdés esetén írjon a `palyazat@medvematek.hu` email címre, honlapunkon pedig további hasznos információkat találhat az egyesületről és rendezvényeinkről (`http://medvematek.hu/`). Ha bármilyen kérdés felmerül önben, bátran keressen bennünket.

Hadfi János
pályázati koordinátor
A Matematika Összeköt Egyesület

C gyakorlat megoldása

C. 1480. *Oldjuk meg az*

$$\frac{x^3-7x+6}{x-2}=\frac{2x+14}{x+2}$$

egyenletet az egész számok halmazán.

I. megoldás. Feltételek: $x \neq \pm 2$, $x \in \mathbb{Z}$. Mivel

$$x^3-7x+6=x^3-4x-3x+6=x(x^2-4)-3(x-2)=$$
$$=x(x-2)(x+2)-3(x-2)=(x-2)(x^2+2x-3),$$

így az egyenlet bal oldalának számlálóját átírva:

$$\frac{(x-2)(x^2+2x-3)}{x-2}=\frac{2x+14}{x+2}.$$

Mivel

$$\frac{2x+14}{x+2}=\frac{2x+4+10}{x+2}=2+\frac{10}{x+2},$$

kapjuk, hogy

$$x^2+2x-3=2+\frac{10}{x+2}, \quad \text{ahonnan} \quad x^2+2x-5=\frac{10}{x+2}.$$

Figyelembe véve, hogy $x \in \mathbb{Z} \setminus \{\pm 2\}$, és így $x^2+2x-5 \in \mathbb{Z}$, ahonnan következik, hogy $\frac{10}{x+2} \in \mathbb{Z}$ kell legyen, azaz $x+2$ a 10 osztója. Tehát $x+2 \in \{\pm 1; \pm 2; \pm 5; \pm 10\}$.

Behelyettesítve látható, hogy egyik sem megoldás.

$x+2=1$	$x=-1$	$1-2-5 \neq \frac{10}{1}$
$x+2=-1$	$x=-3$	$9-6-5 \neq \frac{10}{-1}$
$x+2=2$	$x=0$	$0-0-5 \neq \frac{10}{2}$
$x+2=-2$	$x=-4$	$16-8-5 \neq \frac{10}{-2}$
$x+2=5$	$x=3$	$9+6-5 \neq \frac{10}{5}$
$x+2=-5$	$x=-7$	$49-14-5 \neq \frac{10}{-5}$
$x+2=10$	$x=8$	$64+16-5 \neq \frac{10}{10}$
$x+2=-10$	$x=-12$	$144-24-5 \neq \frac{10}{-10}$

Molnár István (Békéscsaba, Széchenyi István Szki., 11. évf.)

II. megoldás. Értelmezzünk, majd tüntessük el a nevezőket: $x \neq \pm 2$.

$$\begin{aligned}
(x^3-7x+6)(x+2) &= (x-2)(2x+14),\\
x^4+2x^3-7x^2-8x+12 &= 2x^2+10x-28,\\
x^4+2x^3-9x^2-18x &= -40,\\
x^3(x+2)-9x(x+2) &= -40,\\
x(x+2)(x-3)(x+3) &= -40.
\end{aligned}$$

Mivel az egész számok halmazán dolgozunk, ezért a -40 (nemcsak pozitív) osztóit kell megkeresnünk, ezeknek kell a tényezőknek megfelelniük.

A -40 osztói: 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40 és ezek -1-szeresei. Az $x+2$ és az $x+3$ egymást követő egész számok, így csak az 1, 2; -2, -1; 4, 5 és -5, -4 számok jöhetnek szóba. Ezekben az esetekben $x=-1; -3; 2; -6$. A -3 és a -6 nem jók, mert nem osztói a -40-nek, a 2 pedig nincs benne az értelmezési tartományban. Nézzük meg, hogy $x=-1$ megoldás-e:

$$(-1)\cdot 1\cdot(-4)\cdot 2 \neq -40.$$

Tehát az egyenletnek nincs egész megoldása.

Görcs András (Somorja, Madách Imre Gimn., 9. évf.)

Megjegyzés. Néhányan a 3-mal való oszthatóságot vizsgálták: az egyenletet átírták $(x-1)(x+2)(x+3)=2(x+7)$ alakra, majd megnézték $x \geqslant 0$, illetve $x<0$ esetén, hogy ha x rendre 0, 1 vagy 2 maradékot ad 3-mal osztva, akkor mi a maradék a bal és a jobb oldalon. Mivel egyik esetben sem egyezik meg a maradék, ezért nincs megoldás az egész számok körében.

134 dolgozat érkezett. 5 pontos 59, 4 pontos 22, 3 pontos 20, 2 pontos 8, 1 pontos 13, 0 pontos 10 dolgozat. Nem versenyszerű: 2 dolgozat.

Matematika feladatok megoldása

B. 4878. *Legfeljebb mekkora lehet a $PA+PB+PC+PD$ összeg, ha P az $ABCD$ egységnégyzet egy pontja?*

(*4 pont*)

Megoldás. Először igazolunk egy lemmát.

Lemma. *Legyenek $0 \leqslant a \leqslant 1$ és b valós számok, valamint*

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(1-x)^2+y^2}.$$

Ekkor $f(a,b) \leqslant f(0,b)$*, és egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha* $a=0$ *vagy* $a=1$ *vagy* $b=0$.

A honlapunkon* megadtunk egy, a lemmával ekvivalens geometriai állítást, és annak a geometriai bizonyítását. Most megmutatjuk, számolással hogyan érhetünk célt. Az állítás átrendezéssel a következő alakban írható:

$$\sqrt{1+b^2}-\sqrt{(1-a)^2+b^2} \geqslant \sqrt{a^2+b^2}-|b|.$$

Az a-ra tett feltevésünk szerint mindkét oldal nemnegatív, ezért a négyzetreemelés ekvivalens átalakítás. A műveletek elvégzése után kapjuk, hogy

$$1+b^2+1-2a+a^2+b^2-2\sqrt{1+b^2}\sqrt{(1-a)^2+b^2} \geqslant \tag{1}$$

$$\geqslant a^2+b^2+b^2-2|b|\sqrt{a^2+b^2}\,.$$

Az egyszerűsítések után vezessük be a $c=1-a$ jelölést (nyilván $0 \leqslant c \leqslant 1$), így rendezéssel (1) a következő alakra hozható:

$$c+|b|\sqrt{(1-c)^2+b^2} \geqslant \sqrt{1+b^2}\sqrt{c^2+b^2}\,.$$

Ismét mindkét oldal nemnegatív, ezért újra négyzetre emelhetünk:

$$c^2+b^2(1-c)^2+b^4+2|b|c\sqrt{(1-c)^2+b^2} \geqslant c^2+b^2+b^2c^2+b^4.$$

Egyszerűsítések és rendezés után $2|b|c\sqrt{(1-c)^2+b^2} \geqslant 2b^2c$ adódik. Mivel $2|b|c \geqslant$ $\geqslant 0$, így két eset van: ha $2|b|c=0$, akkor $b=0$ vagy $a=1$ és egyenlőség áll. Egyébként $2|b|c>0$ és oszthatunk vele:

$$\sqrt{(1-c)^2+b^2} \geqslant |b|.$$

Ismét mindkét oldal nemnegatív, és újabb négyzetreemelés után a nyilvánvaló $(1-c)^2 \geqslant 0$ egyenlőtlenséghez jutunk. Itt egyenlőség $a=0$ esetben áll. Mivel csupa ekvivalens átalakítást végeztünk, így az eredeti állítást, és ezzel a lemmát beláttuk.

Válasszuk úgy a koordinátarendszerünket, hogy az egységnégyzet csúcsai legyenek $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(1,1)$ és $D(0,1)$; továbbá legyen $P(x,y)$, ahol $0 \leqslant x,y \leqslant 1$. Ekkor

$$PA+PB+PC+PD=$$

$$=\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(1-x)^2+y^2}+\sqrt{(1-x)^2+(1-y)^2}+\sqrt{x^2+(1-y)^2}=$$

$$=f(x,y)+f(x,1-y).$$

* `https://www.komal.hu/feladat?a=feladat&f=B4878&l=hu`.

A lemmát alkalmazva, majd kihasználva, hogy $0 \leqslant y \leqslant 1$ kapjuk, hogy

$$f(x,y)+f(x,1-y) \leqslant f(0,y)+f(0,1-y)=$$

$$=\sqrt{y^2}+\sqrt{1+y^2}+\sqrt{(1-y)^2}+\sqrt{1+(1-y)^2}=$$

$$=y+1-y+f(y,1)=1+f(y,1).$$

Ismét a lemma szerint $f(y,1) \leqslant f(0,1)=1+\sqrt{2}$, amiből az eddigiek szerint $PA+PB+PC+PD \leqslant 2+\sqrt{2}$. Egyenlőség akkor teljesül, ha minden becslésünkben egyenlőség áll, könnyű meggondolni, hogy ez pontosan akkor teljesül, ha P az egységnégyzet valamely csúcsa.

Borbély Márton (Kaposvár, Táncsics Mihály Gimn., 12. évf.)

Megjegyzés. Vázolunk egy második lehetséges megoldást, amely felhasznál néhány alapismeretet a kétváltozós függvényekről. Vezessük be a $g(P)=PA+PB+PC+PD$ függvényt. Ismert, hogy egy háromszögben a súlyvonal legfeljebb olyan hosszú, mint a súlyvonalat közrefogó oldalak számtani közepe. Ebből az elemi geometriai tényből azonnal következik, hogy ha a PQ szakasz felezőpontja F, akkor $g(F) \leqslant \big(g(P)+g(Q)\big)/2$, és egyenlőség csak $P=Q$ esetben áll. Mivel a g függvény folytonos, így kaptuk, hogy g szigorúan konvex. A konvexitást kihasználva nem túl nehéz megmutatni, hogy a maximum a csúcsokban lesz, elég arra gondolni, hogy $ABCD$ minden többi pontja belső pontja egy olyan szakasznak, amelynek a végpontjai is $ABCD$ valamely pontjai.

58 dolgozat érkezett. 4 pontos 37, 3 pontos 7, 2 pontos 2, 1 pontos 10, 0 pontos 2 dolgozat.

B. 4945. *Határozzuk meg azokat az n pozitív egészeket, amelyekre*

$$1\cdot 2^0+2\cdot 2^1+3\cdot 2^2+\ldots+n\cdot 2^{n-1}$$

négyzetszám.

(*5 pont*) *Németh László* (Fonyód) javaslata alapján

Megoldás. A mértani sorozat összegképletének többszöri alkalmazásával juthatunk az összeg zárt alakjához:

$$\begin{aligned}
&1\cdot 2^0+2\cdot 2^1+3\cdot 2^2+\ldots+n\cdot 2^{n-1}=\\
&=(2^0+2^1+2^2+\ldots+2^{n-1})+(2^1+2^2+\ldots+2^{n-1})+\\
&\quad+(2^2+\ldots+2^{n-1})+\ldots+(2^{n-1})=\\
&=(2^n-1)+(2^n-2)+(2^n-2^2)+\ldots+(2^n-2^{n-1})=\\
&=n\cdot 2^n-(1+2+2^2+\ldots+2^{n-1})=n\cdot 2^n-(2^n-1)=\\
&=(n-1)\cdot 2^n+1.
\end{aligned}$$

Ezzel a feladat követelménye a következő alakot ölti:

$$(n-1)\cdot 2^n+1=k^2, \quad \text{azaz}$$

$$(n-1)\cdot 2^n=k^2-1=(k+1)\cdot(k-1).$$

Itt az azonos paritású $(k+1)$ és $(k-1)$ szorzata páros lévén mindkét szám páros, és mivel a különbségük 2, azért valamelyikük nem osztható 4-gyel. Tehát vagy $k+1=2^{n-1}t$ (ahol t páratlan) és $k-1=2\cdot\frac{n-1}{t}$, vagy $k+1=2s$ (ahol s páratlan) és $k-1=2^{n-1}\cdot\frac{n-1}{s}$. Az első esetben

$$2=(k+1)-(k-1)=2^{n-1}t-2\cdot\frac{n-1}{t},$$

$$2t=2^{n-1}t^2-2(n-1),$$

$$n-1=t(2^{n-2}t-1)\geqslant 2^{n-2}-1.$$

A másik esetben hasonlóan

$$2=(k+1)-(k-1)=2s-2^{n-1}\cdot\frac{n-1}{s},$$

$$2s=2s^2-2^{n-1}(n-1),$$

$$2^{n-2}(n-1)=s^2-s=s(s-1),$$

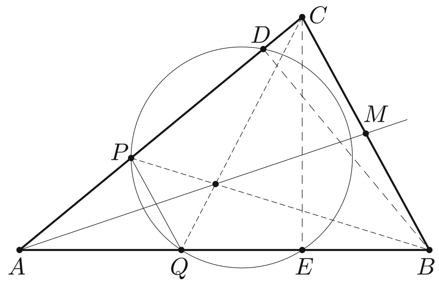
amiből (mivel s páratlan lévén osztója $(n-1)$-nek) $s(s-1)<(n-1)^2$, és így $2^{n-2}<n-1$ következik. Ennek alapján $n\geqslant 2^{n-2}$, ami csak $n\leqslant 4$ esetén teljesül. Az n számára szóbajövő négy értéket kipróbálva csak $n=1$ és $n=4$ felel meg; előbbire $(n-1)\cdot 2^n+1=1^2$, utóbbira pedig $(n-1)\cdot 2^n+1=7^2$.

Schifferer András (Kaposvári Táncsics Mihály Gimn., 12. évf.) és
Kupás Vendel Péter (Gyöngyös, Berze Nagy János Gimn., 12. évf.)
megoldását felhasználva

89 dolgozat érkezett. 5 pontos 34, 4 pontos 18, 3 pontos 10, 2 pontos 18, 1 pontos 6, 0 pontos 3 dolgozat.

B. 4949. *Az ABC hegyesszögű háromszög B-ből, illetve C-ből induló magasságának talppontja D, illetve E. Legyen P az AD, Q pedig az AE szakasz olyan belső pontja, amelyre $EDPQ$ húrnégyszög. Mutassuk meg, hogy a BP és CQ szakaszok az A-ból induló súlyvonalon metszik egymást.*

(*3 pont*)



Megoldás. Mivel $BEC\sphericalangle$ és $BDC\sphericalangle$ derékszög, azért $BCDE$ húrnégyszög. Emiatt a $CBE\sphericalangle$ és az $ADE\sphericalangle$ szög megegyezik. A P pont az AD szakasz pontja, így a $PDE\sphericalangle$ szög is ugyanekkora. Most felhasználjuk, hogy $DPQE$ is húrnégyszög, ezért $PDE\sphericalangle=PQA\sphericalangle$. Ezzel két lépésben beláttuk, hogy a $PQA\sphericalangle$ és $CBA\sphericalangle$ szögek egyenlők. A feladat feltételei alapján a P és Q pontok az eredeti háromszög oldalain vannak, így az előzőek egyállású szögek, így PQ párhuzamos BC-vel.

A BAC szögre és a BC, PQ párhuzamos egyenesekre alkalmazva a párhuzamos szelők tételét

$$(1)\qquad \frac{AQ}{AP}=\frac{BQ}{CP} \quad\Rightarrow\quad AQ\cdot CP=BQ\cdot AP.$$

Az M pont a BC oldal felezőpontja, tehát $MB=MC$.

Bővítsük (1)-ben a szorzatokat az egymással megegyező MB-vel és MC-vel:

$$AQ\cdot CP\cdot MB=BQ\cdot AP\cdot CM.$$

Az ABC háromszögben az AM, BP és CQ szakaszokra alkalmazható a fenti egyenlőség alapján a Ceva-tétel megfordítása, azaz AM, BP és CQ egy pontban metszik egymást. Az AM a háromszög A-hoz tartozó súlyvonala, így az állítást igazoltuk.

Janzer Orsolya Lili (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.) dolgozata alapján

Összesen 70 dolgozat érkezett. 3 pontot kapott 67, 2 pontot 2 versenyző. 1 pontos 1 tanuló dolgozata.

B. 4951. *A V halmaz elemei olyan n-dimenziós vektorok (rendezett szám n-esek), amelyek minden koordinátája -1, 0 vagy 1. Semelyik három különböző V-beli vektor összege nem a nullvektor. Mutassuk meg, hogy $|V|\leqslant 2\cdot 3^{n-1}$.*

(4 pont)

I. megoldás. Nevezzük *bandának* (n-dimenziós, -1, 0, 1 számokból álló) vektorok egy olyan háromelemű halmazát, amelyben a három vektor összege 0. Legyen $\oplus$ az a tetszőleges n és m dimenziójú a és b vektorokra értelmezett művelet, amelynek eredménye az az $n+m$ dimenziójú vektor, amelynek első n koordinátája megegyezik a koordinátáival, a további koordinátái pedig b koordinátáival. Az n szerinti indukcióval megmutatjuk, hogy az összes n-dimenziós (0, ±1 elemű) vektorok halmaza 3^{n-1} darab, páronként diszjunkt banda egyesítése. Az $n=1$ esetén ez nyilvánvalóan igaz: egyetlen banda van, a $\{-1,0,1\}$. Tegyük föl, hogy $n=k$-ra igaz az állítás. Az $n=k+1$-re belátandó tekintsünk egy, az $n=k$ esethez tartozó felosztásban szereplő $\{A,B,C\}$ bandát; ebből a következő, $n=k+1$ dimenziós bandákat hozzuk létre:

$$\{A\oplus 0, B\oplus 1, C\oplus -1\},\ \{A\oplus -1, B\oplus 0, C\oplus 1\},\ \{A\oplus 1, B\oplus -1, C\oplus 0\}.$$

Ezzel (az indukciós feltevés alapján) $3\cdot 3^{k-1}=3^k$ darab $k+1$ dimenziós bandát konstruáltunk, amelyek páronként diszjunktak, így összesen $3\cdot 3^k=3^{k+1}$ darab különböző vektort tartalmaznak, tehát az összeset.

A feladat állítása ebből már egyszerűen következik, hiszen a követelmény szerint minden bandából legfeljebb két vektort választhatunk, és a bandák száma 3^{n-1}.

A bizonyított becslés éles: ha az összes olyan vektort tekintjük, aminek az első koordinátája 1 vagy -1, a többi pedig (0, 1 és -1 közül választva) tetszőleges, akkor ezek száma éppen $2\cdot 3^{n-1}$, és semelyik háromnak az összege nem nulla.

Noszály Áron (Debrecen, Fazekas Mihály Gimn., 10. évf.)

II. megoldás. Az I. megoldásban bandáknak nevezett hármas csoportokba sorolást egyszerűbben is kaphatunk a következő módon. Mindegyik (n dimenziós, a 0, 1, -1 elemekből képzett) vektorhoz adjuk hozzá a csupa 1-esből álló (n dimenziós) $\mathbf{e}$ vektort, a koordináták összeadását modulo 3 végezve. (Vagyis $0+1=1$, $-1+1=0$, $1+1=-1$ szerint.) Ezzel páronként diszjunkt, $\{\mathbf{v},\mathbf{v}+\mathbf{e},\mathbf{v}-\mathbf{e}\}$ típusú vektor-hármasokhoz jutunk, amelyek elemei a bennük levő bármelyik vektorból az $\mathbf{e}$ legfeljebb kétszeri hozzáadásával előállíthatók, a három vektor összege pedig $\mathbf{v}+(\mathbf{v}+\mathbf{e})+(\mathbf{v}-\mathbf{e})=3\mathbf{v}=\mathbf{0}$.

Schifferer András (Kaposvár, Táncsics Mihály Gimn., 12. évf.)

68 dolgozat érkezett. 4 pontos 50, 3 pontos 4, 2 pontos 2, 1 pontos 7, 0 pontos 5 dolgozat.

B. 4953. *Bizonyítsuk be, hogy minden $n>1$ egész számra*

$$\ln n+\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{2}{3}}+\ldots+\sqrt{\frac{n-1}{n}}<\sqrt{2}+\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{4}{3}}+\ldots+\sqrt{\frac{n}{n-1}}\,.$$

(*5 pont*) Javasolta: *Holló Gábor* (Budapest)

I. megoldás. Először a következő segédtételt igazoljuk: minden $x>1$ valós számra

$$\ln x+\sqrt{\frac{1}{x}}<\sqrt{x}.$$

Bizonyítás: Ha $x>0$, akkor az

$$f(x)=\sqrt{x}-\sqrt{\frac{1}{x}}-\ln x$$

függvény deriváltjára

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x^3}}-\frac{1}{x}=\frac{1}{2\sqrt{x^3}}\cdot\left(x+1-2\sqrt{x}\right)=\frac{1}{2\sqrt{x^3}}\cdot\left(\sqrt{x}-1\right)^2\geqslant 0,$$

ahol egyenlőség csak $x=1$ esetén teljesülhet. Ennélfogva $f(x)$ pozitív x-ekre szigorúan monoton nő, így minden $x>1$ esetén

$$f(x)>f(1)=0,\quad \text{azaz}\quad \sqrt{x}-\sqrt{\frac{1}{x}}-\ln x>0,$$

amivel az állításunkat igazoltuk.

Mivel minden $1 \leqslant k$ egész szám esetén $\frac{k+1}{k} > 1$, a most belátott segédtétel alapján

$$\ln \frac{k+1}{k} + \sqrt{\frac{k}{k+1}} < \sqrt{\frac{k+1}{k}},$$

amit minden $1 \leqslant k < n$-re összegezve

$$\sum_{k=1}^{n-1} \ln \frac{k+1}{k} + \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{\frac{k}{k+1}} < \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{\frac{k+1}{k}}.$$

Itt a

$$\sum_{k=1}^{n-1} \ln \frac{k+1}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k+1) - \ln k$$

összeg teleszkopikusan $\ln n$-nel egyenlő, vagyis

$$\ln n + \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{\frac{k}{k+1}} < \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{\frac{k+1}{k}}$$

minden $n > 1$ egész esetén, ami éppen a feladat állítása.

Daróczi Sándor (Nyíregyháza, Krúdy Gy. Gimn., 12. évf.)

II. megoldás. Az n szerinti indukcióval bizonyítunk; ha $n = 2$, akkor $\ln 2 + \sqrt{\frac{1}{2}} < \sqrt{2}$ teljesülése közvetlen számolással ellenőrizhető. Az indukciós lépésben megmutatjuk, hogy $n-1$-ről n-re lépve a bizonyítandó egyenlőtlenség bal oldala kevesebbel nő, mint a jobb oldal, vagyis

$$\ln n - \ln(n-1) + \sqrt{\frac{n-1}{n}} < \sqrt{\frac{n}{n-1}}.$$

A fenti egyenlőtlenség azonos átalakításával és az $x = \sqrt{\frac{n}{n-1}}$ jelölést bevezetve:

$$\ln x^2 + \frac{1}{x} < x,$$

$$0 < x - \frac{1}{x} - 2\ln x.$$

Az utóbbi egyenlőtlenség igazolásához elegendő megmutatni, hogy a $g(x) = x - \frac{1}{x} - 2\ln x$ függvény deriváltja pozitív, ha $x > 1$. Valóban: $g(1) = 0$, és minden $x > 1$-re

$$g'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 > 0.$$

Győrffy Ágoston (Budapest, Fazekas M. Gimn., 11. évf.)

47 dolgozat érkezett. 5 pontos 35, 4 pontos 3, 3 pontos 7, 2 pontos 2 dolgozat.

Matematikai képzések az ELTE TTK-n

Kedves leendő Egyetemista! A *KöMaL* olvasójaként bizonyára szívesen foglalkozol matematikával, és felmerülhetett már Benned az a gondolat, hogy életpályádul ennek a szép tudománynak a művelését választod, illetve szeretnél megismerkedni alkalmazásaival a műszaki, gazdasági és pénzügyi élet különböző területein. Egy amerikai felmérés évről évre a legjobb foglalkozások között tartja számon a matematikust és a szintén matematikai előképzettséget igénylő aktuáriust és statisztikust (`https://www.careercast.com/jobs-rated/2018-best-jobs`). Ez Magyarországra is igaz, hiszen nemcsak a kutatóintézetek, egyetemek, hanem számos cég is tárt karokkal és igen jó fizetéssel várja az ELTE-n végzett matematikusokat. Az alkalmazott matematika ma már az élet szinte minden területén nélkülözhetetlen, és az ilyen képzettségű munkaerő iránt egyre növekszik az igény.

Esetleg még nem döntöttél, de leginkább matematikából folytatnál felsőfokú tanulmányokat? Minderre kitűnő lehetőség nyílik az ország egyik legnagyobb múltú egyetemén, az Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Karán, ahol világhírű professzoroktól és lelkes, közvetlen fiatal oktatóktól tanulhatsz. Pezsgő diákélet vár rád az ELTE korszerű számítógépparkkal felszerelt, a KöMaL szerkesztőségének is otthont adó modern lágymányosi épületegyüttesében.

A bolognai képzési rendszerbe illeszkedik BSc képesítést nyújtó hároméves matematikai alapképzésünk. Itt az első évben hallgatói és oktatói mentorok biztosítják, hogy mindenki be tudjon illeszkedni és találjon előismereteinek, képességeinek és tanulási sebességének megfelelő nehézségű feladatokat. Az első év végén dönthetsz arról, hogy milyen témákkal szeretnél a továbbiakban behatóbban foglalkozni.

A kínálat széles: aki szeretne, az elmélyedhet az elméleti matematika kérdéseiben, hiszen szinte minden fontos területről hirdetünk kurzusokat. Ezek építenek a magyar matematikai kutatások méltán világhírű hagyományaira, ugyanakkor szilárd alapokat nyújtanak a modern matematika műveléséhez, jól felkészítve hallgatóinkat a leendő kutatói munkára.

Akit viszont az alkalmazások érdekelnek, megteheti, hogy az alapok elsajátítása után olyan modern témákkal is foglalkozzon, mint az adattudomány vagy a mesterséges intelligencia matematikai kérdései. Azoknak is ajánljuk a matematika alapképzési szakot, akik ismereteiket később inkább a matematikán kívül szeretnék majd gyümölcsöztetni. Itt szerzett tudásukat hasznosíthatják például gazdasági területeken, médiában, a matematika népszerűsítésében, a közművelődésben – és a megszerzett matematikai gondolkodásmód mindvégig segíteni fogja őket a munkájukban.

A képzés egyéb vonatkozásairól további részletek a `http://www.math.elte.hu/` honlapon a Képzések menüpont alatt találhatók. Ajánljuk a középiskolásoknak szóló oldalainkat is, ahol végzett diákjainkkal készült interjúk is láthatók.

A legkiemelkedőbb hallgatók az egyetemi oktatómunkába is bekapcsolódhatnak, és világszerte jó eséllyel pályázhatnak ösztöndíjakra, külföldi részképzésre (pl. az Erasmus+ program keretében).

Az alapképzést további kétéves szakasz követ(het)i (mesterképzés vagy röviden MSc), egyetemünkön a Matematikai Intézet gondozásában matematikus, alkalmazott matematikus, valamint biztosítási és pénzügyi matematika mesterszakok indulnak. BSc-t végzett hallgatóink természetesen más (bel- és külföldi) oktatási intézmény programjain is folytathatják tanulmányaikat. A mesterszakot végzettek közül a legkiválóbbak számára biztosítjuk az egyetemen a doktori fokozat megszerzésének lehetőségét (PhD-képzés).

Egyetemünkön gondosan ápolt hagyomány, hogy a rátermett, tehetséges diákok neves professzorok vezetésével bekapcsolódnak a tudományos kutatásba. A legkiválóbb hallgatók matematikai versenyeken is sikerrel szerepelnek, például az Egyetemi Hallgatók Nemzetközi Matematikaversenyén az elmúlt tíz évben kétszer is az ELTE csapata végzett az élen több, mint 70 egyetem csapatának versenyében – olyan nagyhírű egyetemeket is megelőzve, mint a Yale, a Princeton vagy a Moszkvai Állami Egyetem.

Matematikatanár-képzés az ELTE TTK-n

Az ELTE Természettudományi Karán sok évtizedes múltra tekint vissza a matematika szakos tanárképzés. Az általános és középiskolák részéről mindig jelentős igény mutatkozott a nálunk végzett matematikatanárok iránt, akik közül sokan külföldön is sikeres oktatói pályát futottak be.

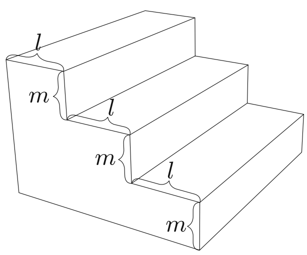
A matematika szakos tanári pályát elsősorban azoknak a középiskolás diákoknak ajánljuk, akik számára örömet jelent érdekes matematikai feladatokon gondolkodni, és jó érzést okoz a megoldásokra másokat is rávezetni, másokkal is megosztani azt az élvezetet, amit a matematika megismerése jelent.

A tanárképzés osztatlan formában zajlik. Tanári szakképzettséget kétszakos formában lehet szerezni $4+1$ vagy $5+1$ éves képzés keretében, amelyben a plusz egy év szakmai gyakorlat teljesítésére szolgál. A tanárképzésre való jelentkezés során a leendő hallgatóknak egy szakpárt kell megjelölni. Az ELTE-n a matematika szak mellé természettudományos szakokon és az informatikán kívül választani lehet a bölcsész szakok (például a magyar, a történelem vagy a nyelvszakok) közül is. A tanárképzés első három évében szakpáronként egységes képzésben részesülnek hallgatóink. A matematika szakterületi tárgyaknál az oktatás szemléletében már az első három évben is nagy hangsúlyt kap az iskolai matematikatanítással való kapcsolat. A harmadik év végén a hallgató dönt arról, hogy általános iskolai vagy középiskolai tanári végzettséget kíván szerezni a két szakjából. Ezen döntéstől függően vagy egy 2 féléves, vagy pedig egy 4 féléves képzési programot kell elvégezni. Ekkor kerül sor a szaktárgyi tanítási gyakorlatok teljesítésére, melyekre az ELTE hallgatóinak a legjobb budapesti iskolákban, kiváló vezetőtanárok irányítása mellett nyílik lehetőségük. A szakterületi záróvizsgák letétele után a hallgatóknak még egy egyéves szakmai gyakorlatot kell elvégezniük egy iskolában, melynek során módjuk lesz begyakorolni a tanári munka mesterfogásait.

Azaz bátran állíthatjuk, hogy a KöMaL minden olvasójának testhezálló képzést tudunk nyújtani az ELTE Matematikai Intézetében. Ha személyesen is szeretnél találkozni leendő oktatóiddal, beszélgetni a mostani egyetemistákkal, akkor gyere el az ELTE TTK nyílt napjára január 18-án!

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (609–613.)

K. 609. Hány óra van most, ha 50 perccel ezelőtt négyszer annyi perccel múlt 3 óra, mint amennyi még 6 óráig hátravan? (Ugyanazon a délutánon értve az időpontokat.)



K. 610. Három méter magasra vezető 1 méter széles tömör beton lépcsőt kell építenünk, egyforma magas lépcsőfokokkal. Minden lépcsőfoknak van egy magassága (m), és egy úgynevezett lépésmélysége (l), ahogy az *ábra* mutatja. A lépcsőfokoknál előírás, hogy $2m+l=64$ cm, valamint hogy a lépcsőfok ne legyen magasabb, mint amekkora a lépésmélysége. Legkevesebb hány lépcsőfokra lesz szükség? Mennyi betonra lesz szükség a minimális darabszámú lépcsőfokból álló lépcsőhöz?

K. 611. Párokba lehet-e rendezni 1-től 50-ig az egész számokat úgy, hogy minden párban a számok összege más-más prímszám legyen?

K. 612. Keressük meg az összes olyan pozitív egész n számot, melyre $n+125$ és $n+201$ is négyzetszám.

K. 613. Egy táblára ketten felváltva felírnak egy-egy 10-nél nem nagyobb pozitív egész számot. A szabály szerint olyan számot nem lehet felírni, amely a táblára már felírt számok valamelyikének osztója. Aki nem tud új számot felírni, veszít. Melyik játékosnak van nyerő stratégiája?

Javasolta: *Loránt László*

❄

Beküldési határidő: 2019. február 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (1518–1524.)

Feladatok 10. évfolyamig

C. 1518. Hány olyan 13-jegyű pozitív egész szám van, ami csak a 3, 6, 9 számjegyeket tartalmazza, és bármely két szomszédos számjegyének különbsége 3?

C. 1519. Egy háromszög két oldalának hossza 31 és 22, a hozzájuk tartozó súlyvonalak merőlegesek egymásra. Mekkora a harmadik oldal?

Feladatok mindenkinek

C. 1520. Határozzuk meg a $2^{2019}+2019^2$ szám utolsó két számjegyét.

C. 1521. Az O középpontú kört E-ben belülről érinti egy feleakkora sugarú kör. Egy O-ból induló félegyenes a nagy kört P-ben, a kis kört pedig az O-tól különböző R pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy az $\widehat{EP}$ és az $\widehat{ER}$ körív hossza megegyezik.

C. 1522. A pozitív egész számokat három sorba rendezzük a következőképpen:

$$\begin{array}{llllll} 1 & 4 & 7 & 10 & 13 & 16\ldots \\ 2 & 5 & 8 & 11 & 14 & 17\ldots \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 & 18\ldots \end{array}$$

Igazoljuk, hogy mindhárom sorból kiválasztható egy-egy végtelen mértani sorozat.

Feladatok 11. évfolyamtól

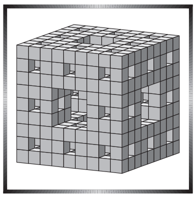
C. 1523. Egy konvex négyszöget az átlóival háromszögekre bontunk. Mutassuk meg, hogy ha a négy háromszög területei között pontosan háromféle érték fordul elő, akkor a négyszög trapéz.

C. 1524. Legyenek N és M pozitív egész számok, továbbá p és q különböző prímszámok. Tegyük fel, hogy $N+M$ ötjegyű, N-nek osztója a p, és osztóinak száma q, ugyanakkor M osztható q-val, és osztóinak száma p. Határozzuk meg N és M lehetséges értékeit.

❄

Beküldési határidő: 2019. február 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄



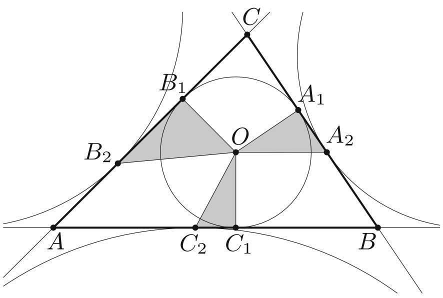
A B pontversenyben kitűzött feladatok (4998–5005.)

B. 4998. Az általános iskolai Logikai Készlet 48 műanyag lapocskából áll. A lapokat négy jellemző tulajdonság írja le: egy-egy elem mérete lehet kicsi vagy nagy; lehet sima vagy lyukas; a színe piros, sárga, kék vagy zöld; alakja kör, négyzet vagy háromszög. A tulajdonságok minden lehetséges kombinációja (pl. kicsi kék lyukas kör) pontosan egy lapocskára igaz. Hány olyan x eleme van a készletnek, amelyhez található a készletnek olyan y eleme, amelyre az alábbi két feltétel mindegyike teljesül?

1. Ha x sima vagy piros, akkor y kicsi sárga négyzet.

2. Ha y kicsi vagy kék, akkor x zöld háromszög, vagy pedig valamilyen sima alakzat.

(*4 pont*) ELTE TTK elsőéves analízis zárthelyi dolgozat alapján



B. 4999. Az ABC háromszög beírt körének középpontja O, érintési pontjai A_1, B_1, C_1, hozzáírt köreinek érintési pontjai A_2, B_2, C_2 az *ábra* szerint. Mutassuk meg, hogy az OA_1A_2, OB_1B_2 és OC_1C_2 háromszögek közül valamelyiknek a területe egyenlő a másik két háromszög területének összegével.

(*3 pont*) Javasolta: *Kocsis Szilveszter* (Budapest)

B. 5000. Adott 4999 különböző egész szám, az egyik a 42. Igazoljuk, hogy kiválasztható közülük néhány, amelyek összege osztható 5000-rel.

(*4 pont*)

B. 5001. Egy egyenlő szárú háromszög alapja a, szárszöge $120°$-nál kisebb, az alaphoz tartozó magassága m. A háromszög mindegyik csúcsát tükrözzük a szemközti oldalegyenesre. A három kapott pont egy másik egyenlő szárú háromszöget alkot, amelynek alapja a', alaphoz tartozó magassága pedig m'. Mutassuk meg, hogy
$$\frac{a'}{a}+\frac{m'}{m}=4.$$

(*3 pont*) Javasolta: *Bártfai Pál* (Budapest)

B. 5002. Az x^3+ax^2+bx+c harmadfokú polinom grafikonja a különböző P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 pontokban metszi az origó középpontú, 10 egység sugarú kört. Fejezzük ki a P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 pontrendszer súlypontjának koordinátáit az a, b, c együtthatókkal.

(*5 pont*)

B. 5003. Igaz-e, hogy ha egy tetraéder hat élfelezőpontja közül öt illeszkedik egy gömbre, akkor a hatodik élfelezőpont is illeszkedik ugyanerre a gömbre?

(*5 pont*)

B. 5004. $2n$ egymást követő egész szám között legfeljebb hány olyan lehet, amely osztható az $n+1$, $n+2$, $\ldots$, $2n$ számok közül legalább az egyikkel?

(*6 pont*) Javasolta: *Róka Sándor* (Nyíregyháza)

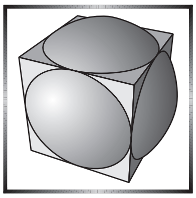
B. 5005. Az ABC hegyesszögű háromszög magasságvonalainak talppontja a BC, CA, AB oldalakon rendre D, E, F, az ABC háromszög magasságpontja M. Jelölje az AB, mint átmérő fölé rajzolt kört k_1, a DEM háromszög körülírt körét k_2. Vegyük föl a k_2 körnek a D pontot nem tartalmazó EM ívén az E, M pontoktól különböző P pontot. Messe a DP egyenes a k_1 kört másodszor a Q pontban, és legyen a PQ szakasz felezőpontja R. Mutassuk meg, hogy az AQ, MP, FR egyenesek egy pontban metszik egymást.

(*6 pont*) Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

Beküldési határidő: 2019. február 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (738., 740–742.)



A decemberi számunkban kitűzött **A. 738.** feladat hibás volt; helyette új feladatot tűzünk ki, amely a januári feladatokkal együtt küldhető be. A hibáért elnézést kérünk.

A. 738. Tekintsük a következő számsorozatot: $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=3$, illetve

$$a_{n+3}=\frac{a_{n+1}^2+a_{n+2}^2-2}{a_n}$$

minden $n\geqslant 1$ egészre. Bizonyítsuk be, hogy a sorozat minden tagja pozitív egész szám.

A. 740. Egy $k\times k$-as számtáblázatban az $1,2,\ldots,m$ számok pontosan egyszer szerepelnek, míg a maradék helyen 0 áll. Tegyük fel, hogy az összes sorösszeg és oszlopösszeg azonos. Legalább mekkora m értéke, ha $k=3^n$ $(n\in\mathbb{N}^+)$?

Javasolta: *Sztranyák Attila* és *Erben Péter,*
a 2017. évi Kalmár-verseny feladata alapján

A. 741. Legyen f olyan pozitív egészeken értelmezett függvény, melyre $f(n) \geqslant \geqslant 0$ és $f(n) \leqslant f(n+1)$ minden n-re. Igazoljuk, hogy ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^2}$$

divergens, akkor létezik olyan $a_1, a_2, \ldots$ sorozat, amelyre $\frac{a_n}{n}$ felvesz minden racionális számot értékként, míg

$$a_{n+m} \leqslant a_n + a_m + f(n+m)$$

teljesül minden n, m párra.

Schweitzer-feladat nyomán

A. 742. Az Ω körbe írt $ABCD$ konvex húrnégyszög AD és BC oldalegyenesei az E pontban metszik egymást. Legyen M és N a többi csúcsot nem tartalmazó AB, illetve CD körívek felezőpontja, továbbá legyen I, J, K, és L rendre az ABD, a ABC, a BCD, illetve a CDA háromszögbe írt kör középpontja. Messe Ω az IJM és KLN köröket másodszor az $U \neq M$, illetve a $V \neq N$ pontban. Mutassuk meg, hogy az E, U és V pontok egy egyenesre illeszkednek.

❄

Beküldési határidő: 2019. február 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

Informatikából kitűzött feladatok

I. 472. Ma már számtalan eszköz és azt vezérlő program áll rendelkezésre, hogy az igényelt méretben és formában állítsunk elő feliratokat. 40-50 évvel ezelőtt még mechanikus céleszköz volt szükséges, hogy az írógéppel írhatóhoz hasonló karaktereket nyomjunk egy vékony műanyag szalagra. A megfelelő karaktert egy tárcsa elfordításával lehetett kiválasztani, majd egy kar meghúzásával egy műanyag szalagra rögzíteni. A benyomás eredményeként a betű alakjának megfelelő kiemelkedés jött létre, egyúttal a szalag el is fehéredett. (Az eszköz ma is szerepel a boltok kínálatában.)

Az eszköz forgatható tárcsáján az ABC betűi szerepeltek. Az egyszerűbb szerkezeteknél a tárcsát csak az egyik irányban lehetett forgatni, ezért a BABA szó leírásához kétszer is körbe kell forgatni a tárcsát. Jól látható, hogy ha a tárcsa mindkét irányban szabadon forgatható lenne, sokkal gyorsabban előállna a felirat.

Készítsünk vezérlő programot egy feliratozó gép tárcsájának kezeléséhez, amely biztosítja a feliratok legrövidebb idő alatti elkészültét. A tárcsa egy karakterrel való elfordítása egy időegységet igényel. A forgásirány megváltoztatásához V időegység kell. A folyamatosan előre haladó szalag egy karakterhellyel való elmozdítása szintén egy időegység, mozgatása a tárcsa mozgatásával párhuzamosan is történhet. Az aktuális karakter benyomása is egy időegység.

A program standard bemenetének első sorában az irányváltáshoz szükséges V érték található. A második sorban pedig a felirat olvasható, amely csak az angol ábécé nagybetűit és a szóközt tartalmazhatja, legfeljebb 200 karakter hosszban. A kimenet első sorában az elkészítéshez szükséges idő, a következőben pedig a szükséges fordítások száma és az irányváltások (jele #) szerepelnek egymástól egy-egy szóközzel elválasztva.

A tárcsa az angol ábécé nagybetűit tartalmazza ábécé sorrendben. Induláskor az A karakteren áll, ha egyet fordítunk, akkor a B karakter következik.

Példa bemenet	**Példa kimenet**
`5` `KABAI ILONA`	`83` `10 16 1 # 1 # 8 3 3 # 1 13`

A kimenet magyarázata: A tárcsa forgatásához összesen 56 időegység kell. A forgásirány háromszori megváltoztatása 15 időegység. A 10 karakter előállítása 10 időegység. Az első szó utolsó karaktere egyezik a következő szó első karakterével, így a tárcsát nem kell forgatni, de a szalagot továbbítani kell, először a szóköz helyére, majd a második I karakter pozíciójára.

Beküldendő egy `i472.zip` tömörített állományban a program forráskódja és a működéséhez szükséges egyéb fájlok, továbbá a hozzá kapcsolódó dokumentáció. Utóbbi a problémamegoldás lényeges elemeire világít rá, valamint tartalmazza, hogy a forrásállomány melyik fejlesztő környezetben fordítható.

I. 473 (É). Ebben a feladatban egy cég dolgozóinak adatai állnak rendelkezésünkre. A táblázat a következő adatokat tartalmazza: a dolgozó neve, neme, az a részleg, ahol a dolgozó a munkáját végzi, a céghez való belépés éve, valamint a dolgozó bére. Célunk egy olyan táblázat elkészítése, amellyel a cégvezetés elemezheti a dolgozók bérét. A feladatok megoldása során ügyeljünk arra, hogy az eredmények helyesek legyenek akkor is, ha új dolgozókat alkalmaz a cégvezetés, vagy ha egyes dolgozók időközben kilépnek.

1. Töltsük be a táblázatkezelő program egyik munkalapjára az `A1` cellától kezdve a honlapunkról letölthető `dolg.txt` adatfájlt (tabulátorokkal tagolt, UTF-8 kódolású szövegállomány), majd mentsük a munkafüzetet `dolgozok` néven a program alapértelmezett formátumában.

2. Határozzuk meg az I4:I5 tartományban a cég dolgozónak számát és együttes bérét (bértömegét).

3. A cégvezetés a dolgozók bérét szeretné megemelni, a dolgozók egységesen 5% béremelést kapnak. Azok azonban, akik még így sem érik el az I2-es cellában lévő bérminimumot, a bérminimumot fogják kapni. Határozzuk meg a dolgozók új bérét az F oszlop celláiban. Az adatokat kerekítsük egész számra.

4. Határozzuk meg az I6-os cellában, hogy hány olyan dolgozó lesz béremelés után, aki a bérminimumot kapja.

5. Írjuk be az I8-as cellába egy részleg nevét, majd határozzuk meg az I11:J12 tartomány celláiban az adott részleg dolgozóinak számát és átlagbérét nemenkénti bontásban.

6. Emeljük ki az I8-as cellában megadott részlegen dolgozók összes adatát feltételes formázással az A:F oszlopokban halványszürke háttérrel.

7. Jelenítsük meg az I14-es cellában képlettel az aktuális évet (például 2019. 03. 15-én 2019-et). A következő két feladatban használjuk fel ennek a cellának a tartalmát.

8. A cégvezetés szeretné külön jutalomban részesíteni a törzsgárdát, vagyis azokat a dolgozókat, akik több, mint 25 éve a cég alkalmazásában állnak. Emelje ki az ő nevüket feltételes formázással, félkövér betűstílussal.

9. A H17:I28 tartományban a dolgozók új bérének eloszlását szeretnénk meghatározni 50 000 Ft-os sávonként. Határozzuk meg az I17:I27 tartományban képlettel, hogy hány dolgozó esik az egyes sávokba.

10. Írjuk a H30-as cellába a Maximális bért kap: szöveget, és határozzuk meg az I31-es cellába az illető nevét (felhasználhatjuk, hogy egy ilyen dolgozó van).

11. Ábrázoljuk sávdiagramon a dolgozók új bérének eloszlását! A függőleges tengelyen a sávok alsó határa jelenjen meg. A diagram címe A megemelt bér eloszlása legyen.

12. Formázzuk meg a táblázatot a mintának megfelelően.

	A	B	C	D	E	F
1	**Név**	**Neme**	**Részleg**	**Belépés**	**Bér**	**Új bér**
2	**Beri Dániel**	férfi	beszerzés	1979	222 943 Ft	[illegible]
3	Csavar Pista	férfi	pénzügy	1995	234 074 Ft	[illegible]
4	**Lakatos Pál**	férfi	beszerzés	1986	159 538 Ft	[illegible]
5	Devon Mihály	férfi	asztalosműhely	2007	161 533 Ft	[illegible]
6	**Él Ilona**	nő	beszerzés	1982	299 865 Ft	[illegible]
7	Gábor Gizella	nő	értékesítés	2003	181 108 Ft	[illegible]
8	**Kálvin Ödömér**	férfi	lakatosműhely	1976	321 959 Ft	[illegible]
9	Kolompár Gáspár	férfi	asztalosműhely	2003	253 794 Ft	[illegible]
10	Sörös Sándor	férfi	lakatosműhely	2012	202 216 Ft	[illegible]
11	Léc Elek	férfi	asztalosműhely	2001	220 506 Ft	[illegible]
12	Vonal Deodát	férfi	beszerzés	1997	[illegible]	[illegible]

Beküldendő egy tömörített `i473.zip` állományban a megoldást adó táblázatkezelő munkafüzet és egy rövid dokumentáció, amely megadja a felhasznált táblázatkelő nevét és verzióját.

I. 474. A jamaicai jégkorongbajnokság utolsó, mindent eldöntő mérkőzését a Grizzlimedvék félelmetes hírű csapata a Pingvinekkel játssza. Döntetlen esetén, vagy ha a Grizzlik győznek, ők a bajnokok. Ha viszont a Pingvinek győznek, akkor a Pingvinek nyerik a bajnokságot.

A Pingvinek – akiket alacsonyabb termetük miatt sokak esélytelenebbnek tartottak – az első két harmadban, nem kis szerencsével egygólos előnyt szereztek. A statisztikák szerint, ha a szokásos rendszerben játszanak, akkor a Grizzlik átlagosan 600, a Pingvinek átlagosan 900 másodpercenként szereznek gólt. Ha viszont a Grizzlik lehozzák a kapusukat, és öt helyett hat mezőnyjátékossal rohamoznak, akkor 180 másodpercenként szereznek, de – az üresen hagyott kapu miatt – 90 másodpercenként kapnak gólt. Ha továbbra sem változik az eredmény, mennyi idővel a mérkőzés vége előtt érdemes a Grizzliknek lehozniuk a kapusukat, hogy a lehető legnagyobb valószínűséggel kiegyenlítsenek?

Készítsünk számítógépes programot, amely megadja a választ a feltett kérdésre.

Beküldendő egy `i474.zip` tömörített állományban a program forráskódja és a dokumentáció, amely a megoldási módszer rövid ismertetése mellett megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztő környezetben fordítható.

Javasolta: *Kós Géza*

I/S. 32. Egy iskola könyvtárban összesen M darab számítógép van. Egy nap N diák előre megadta, hogy melyik időpillanattól melyik időpillanatig szeretne használni egy gépet. Tegyük fel, hogy egy diák az a_1 időpillanattól a b_1 időpillanatig szeretne gépezni, egy másik pedig a_2-től b_2-ig. Ők csak akkor használhatják ugyanazt a gépet, hogyha $b_1 < a_2$ vagy $b_2 < a_1$. Ha egy diák nem tud használni egy gépet sem a teljes kért időtartam alatt, akkor a könyvtárosnak el kell utasítania a kérését. Mivel csak M gép van, így nem biztos, hogy mindenkinek lesz szabad gépe. A könyvtáros szeretne a lehető legkevesebb diáknak nemet mondani. Segítsünk neki egy programmal, amely megadja, hogy legkevesebb hány diáknak és kiknek kell nemet mondania.

Bemenet: Az első sor tartalmazza a diákok N számát és a gépek M számát. A diákokat 0-tól $N-1$-ig indexeljük. A következő N sor mindegyike egy a és egy b számot tartalmaz, amely leírja, hogy az adott diák mettől meddig szeretne gépezni.

Kimenet: Az első sor tartalmazza azt a minimum számot, ahány diáknak nemet kell mondani. A következő sor tartalmazza azon diákok indexét növekvő sorrendben, akiknek nemet kell mondani. Több lehetséges megoldás, vagyis azonos számú elutasított diák esetén a legkisebb indexű diákokat fogadja a könyvtáros.

Példa bemenet (a / jel sortörést helyettesít)	**Példa kimenet**
`5 3`	`1`
`5 9 / 10 18 / 6 15 / 14 21 / 8 16`	`4`

Korlátok: $1 \leqslant N, M \leqslant 10^5$, $0 \leqslant a, b \leqslant 10^9$, egy diákra: $a < b$.

Időkorlát: 0,5 mp.

Értékelés: A pontok 20%-a kapható, ha $N \cdot M \leqslant 10^6$; további 20% kapható, ha $b - a = 1$ minden diákra; további 20% kapható, ha $a, b \leqslant 10^6$ minden diákra; további 40% kapható az eredeti korlátokra.

Beküldendő egy `is32.zip` tömörített állományban a megfelelően dokumentált és kommentezett forrásprogram, amely tartalmazza a megoldás lépéseit, valamint megadja, hogy melyik fejlesztő környezetben futtatható.

S. 131. Egy cukrászatban különböző díszítéseket lehet kérni a tortákra. Összesen N különböző dísz van, egy tortára pontosan M darab dísznek kell kerülnie. Hogy ne legyen egyhangú a torta, egyféle díszből legföljebb K darab kerülhet egy tortára. Ezen feltételek mellett a cukrászat elkészítette az összes különböző díszítésű tortát, mindegyikből pontosan egyet. Ezután a tortákat autók szállították el különböző cukrászdákba. Minden autó pontosan P tortát tudott szállítani, se többet, se kevesebbet. A maradék tortákat, amiket nem tudtak elszállítani, a cukrászat dolgozói fogyasztották el. Adjuk meg, hogy hány tortát kaptak a dolgozók, illetve a torták számának P-vel való osztási maradékát.

Bemenet: egyetlen sor tartalmazza az N, K, M, P számokat.

Kimenet: egy egész számot tartalmaz, amely megadja a dolgozók által kapott torták P szerinti maradékát.

Példa:

Bemenet	**Kimenet**
`3 2 3 5`	`1`

Korlátok: $1 \leqslant N, KM \leqslant 10^{17}$; $K < M$; $2 \leqslant P < 10^6$. Időlimit: 0,5 másodperc.

Értékelés: a pontok 20%-a kapható, ha $N, K, M \leqslant 20$; további 20% kapható, ha $N, K, M \leqslant 10^6$; további 10% kapható, ha P prím; további 10% kapható, ha M osztható K-val; további 40% kapható az eredeti korlátokra.

Beküldendő egy `s119.zip` tömörített állományban a megoldást leíró dokumentáció és a program forráskódja.

❄

A feladatok megoldásai regisztráció után a következő címen tölthetők fel:
`https://www.komal.hu/munkafuzet`
Beküldési határidő: 2019. február 10.

❄

Síkbeli elektromos vezetési problémák I. rész (matematikai előkészítés)

Bevezetés

Síkbeli vezetési jelenség során egy vékony síklapban létrejövő áramlást vizsgálunk. Ebben az esetben azt mondhatjuk, hogy a síkra merőlegesen nincs áramlás, vagy az áramlást leíró fizikai mennyiségek nem függenek ettől az iránytól. Ilyen jelenség lehet például az elektromos vezetés, a hővezetés vagy folyadék áramlása. Egy ilyen áramlási problémában az a feladat, hogy meghatározzuk a kialakuló kétdimenziós (síkbeli) áramlási teret, tehát az elektromos vezetés esetén az elektromos erővonalakat, hővezetésnél a hőáram áramvonalait, folyadék áramlásakor a sebességteret, vagyis az áramvonalak alakját.

A feladat megoldása általában nehéz. Sok esetben különböző határfeltételeknek kell teljesülni: a síklap (lemez) nem végtelen kiterjedésű, adott szögű hajlat van benne, esetleg a vizsgálandó tartomány lyukas. Azonban, ha az összenyomhatatlannak tekinthető folyadék áramlása stacionárius, azaz a lemezen kialakult áramlási tér időben nem változik, egy ügyesen választott leképezéses módszerrel sokkal könnyebben megadhatjuk az áramlás leírását. Ez azt jelenti, hogy egy megfelelő transzformációval a vizsgálandó áramlás egy másik, már ismert (vagy könnyebben leírható) áramlásba vihető át, így arra visszavezetve az eredeti probléma is megoldhatóvá válik. Megmutatható, hogy stacionárius esetben a megoldandó egyenletek mindhárom témakörben alakilag megegyeznek, így ez a módszer mindhárom esetben alkalmazható. A továbbiakban csak *elektromos vezetéssel* foglalkozunk, hővezetési és folyadékáramlási problémákat – terjedelmi okokból – nem tárgyalunk.

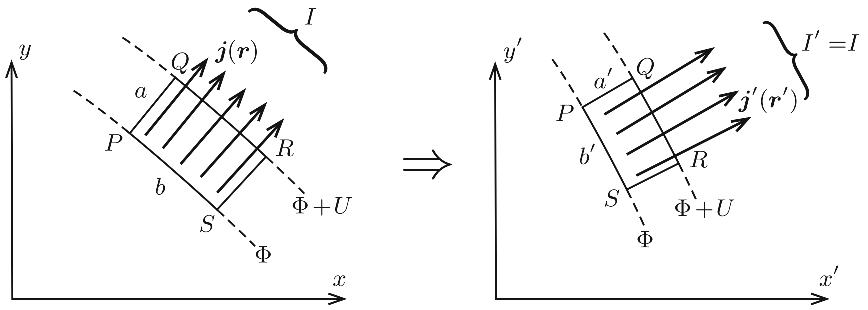
A leképezéses módszer a témakör szokásos tárgyalásában a komplex számok algebrai tulajdonságait és a komplex változós függvények differenciálszámítását használja fel, ami meghaladja a középiskolai matematika tananyagot. Ezért a cikkünkben – rendhagyó módon – egy egyszerűbb utat választunk: a leképezés geometriai tulajdonságait fogjuk vizsgálni, és csak elemi matematikai ismereteket várunk el az Olvasótól. Nem fogjuk az elektromos áram eloszlásának minden részletét meghatározni, hanem csak azt vizsgáljuk meg, hogy a lemezbe egy vagy több ponton be-, illetve kivezetett áram hatására (különböző geometriai elrendezések esetén) a lemez két kiválasztott pontja között mekkora feszültség alakul ki. Az ilyen feladatokra is alkalmazható az említett leképezéses eljárás, amihez egyszerűbb esetekben nincs szükség komplex változós függvények ismeretére.

A továbbiakban (teljesen általánosan vetve fel a kérdést) megvizsgáljuk, hogy milyen tulajdonságú transzformációk alkalmasak egymástól látszólag teljesen független síkbeli árameloszlások közötti kapcsolat leírására. Miután erre a kérdésre választ kaptunk, pontos matematikai képletekkel konkrétan megadunk a legfontosabb transzformációtípusok közül néhányat, majd cikkünk II. részében bemutatjuk, hogyan alkalmazhatók ezek a transzformációk bizonyos fizikai problémák megoldásánál.

Arány- és szögtartó transzformációk

Egy elektromosan vezető síklemezbe, amely lehet véges kiterjedésű, vagy akár „végtelen” nagy, bizonyos helyeken áramokat vezetünk be, illetve áramokat vezetünk el róla. A lemez homogén, vastagsága δ, fajlagos ellenállása ϱ.

Tételezzük fel, hogy ismerjük a kialakuló árameloszlást, vagyis a $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ áramsűrűséget, valamint az elektromos potenciál $\Phi(\boldsymbol{r})$ függvényét. Mindezeket a mennyiségeket egy alkalmasan választott derékszögű (x,y) koordináta-rendszerben adhatjuk meg (lásd az *1. ábra* bal oldali részét), de használhatjuk az (r,φ) síkbeli polárkoordinátákat is. Válasszuk ki az árameloszlásnak egy kicsiny, téglalap alakúnak tekinthető részét, amit két egymástól csak kicsit eltérő ekvipotenciális görbe és két közeli áramvonal határol. Legyenek a téglalap oldalai a és b, és jelöljük a P és S pontok közötti szakaszon átfolyó áram erősségét I-vel. (Ugyancsak I erősségű áram folyik a Q és az R pontok között is, hiszen az áramlási kép stacionárius, a töltések sehol nem halmozódhatnak fel egyre növekvő mértékben.)



1. ábra

Az áramerősség az áramsűrűséggel (vagyis az egységnyi felületen átfolyó árammal), az áramsűrűség az elektromos térerősséggel, a térerősség pedig a potenciálkülönbséggel fejezhető ki:

$$I = |\boldsymbol{j}| \cdot b\delta, \qquad \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\varrho}\boldsymbol{E}, \qquad |\boldsymbol{E}| = \frac{U}{a},$$

így tehát a P és S pontok közötti $b \cdot \delta$ nagyságú felületen átfolyó áram erőssége:

$$I = \frac{U\delta}{\varrho} \cdot \frac{b}{a}.$$

Ha valamilyen transzformáció (leképezés) az áram- és potenciáleloszlást átviszi az (x',y') koordinátarendszerben megadható $\boldsymbol{j}'(\boldsymbol{r}')$ árameloszlásba (lásd az *1. ábra* jobb oldali részét), akkor a vizsgált kicsiny tartományon átfolyó áram erőssége:

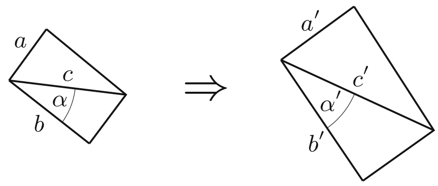
$$I' = \frac{U\delta}{\varrho} \cdot \frac{b'}{a'}.$$

Felhasználtuk, hogy a transzformált áramsűrűség-vektorok merőlegesek a transzformált ekvipotenciális görbékre, tehát a $PQRS$ téglalap „képe” ugyancsak téglalap, melynek oldalai (a' és b') általában különböznek az eredeti méretektől.

A két elrendezés (ugyanakkora be- és kivezetett áramok esetén) akkor egyenértékű, ha minden részletében ugyanakkora áramerősséget tartalmaz, vagyis $I' = I$. Ez láthatóan akkor teljesül, ha

$$\frac{b'}{a'} = \frac{b}{a},$$

vagyis a transzformáció (kis méretek esetén) *aránytartó*. Ez a tulajdonság nemcsak az egymást derékszögben metsző rövid szakaszokra érvényes, hanem egy adott ponton átmenő, tetszőleges irányú, kicsiny szakaszpárokra is fennáll, ahogy azt a *2. ábra* mutatja:



2. ábra

$$\frac{c'}{a'} = \frac{c}{a}.$$

Az ábráról az is leolvasható, hogy a transzformáció *szögtartó*: $\alpha' = \alpha$.[1]

Az arány- és szögtartó síkbeli transzformációkat *konform leképezéseknek* nevezik, és komplex változójú, komplex értékű, kellőképpen „sima" (differenciálható) függvényekkel írhatók le. Ezek a leképezések a sík egy-egy (kicsiny) darabkáját csak odébbtolják, elforgatják és valamilyen arányban nagyítják (vagy kicsinyítik). Az eltolás, forgatás és nagyítás mértéke természetesen helyről helyre változhat, így az alakzat egésze lényegesen eltorzulhat, átalakulhat.

A továbbiakban bemutatunk néhány – a fizikai alkalmazások szempontjából lényeges – konform leképezést. Mivel az ilyen leképezések egymás után történő alkalmazása ugyancsak szög- és aránytartó transzformációt eredményez, néhány alapesetből kiindulva a fizikai problémák meglepően széles körének megoldására nyílik lehetőségünk.

1. Eltolás

Ha a sík egészét valamilyen adott (síkbeli) vektorral odébbtoljuk, ez a transzformáció nyilván arány- és szögtartó lesz, tehát konform leképezést valósít meg. A kapcsolat egy-egy pont régi és új koordinátái között:

$$x' = x + x_0, \qquad y' = y + y_0,$$

ahol x_0 és y_0 állandók.

2. Nagyítás (kicsinyítés)

Egy másik szög- és aránytartó transzformáció képletei:

$$x' = \lambda x, \qquad y' = \lambda y,$$

[1] A transzfomáció során az egyenes vonalak általában görbe vonalakba mennek át. Ilyen esetben a szögtartást úgy értjük, hogy egy ponton átmenő két görbe érintőjének egymással bezárt szöge a leképezés során nem változik.

ahol $\lambda \neq 0$ egy adott állandó. Ha $\lambda > 1$, a leképezés a síkbeli alakzatokat nagyítja, $\lambda < 1$ esetben pedig kicsinyíti.

3. Forgatás

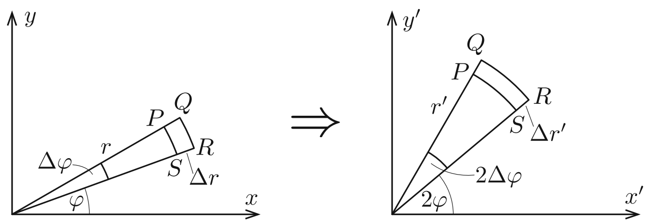
Kicsit bonyolultabb, de ugyancsak konform leképezés a sík pontjainak valamekkora φ szöggel történő elforgatása:

$$x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi, \qquad y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi.$$

Az eddig felsorolt transzformációk lényegében nem változtatják meg az áramlási képet (az áramvonalakat), csupán annak felelnek meg, hogy a koordinátarendszer kezdőpontját máshová helyezzük, a távolságok mértékegységét megváltoztatjuk (például centiméter helyett inch egységeket használunk), illetve az x tengelyt másfelé irányítjuk. A következő két leképezésnél azonban nem ez a helyzet, azok lényeges változást eredményeznek az árameloszlásban, tehát fizikailag különböző problémákat kapcsolnak össze.

4. „Legyező-leképezés"

Tekintsük azt a leképezést, ami az $y > 0$ végtelen félsík egyes pontjaihoz tartozó helyvektor x tengellyel alkotott φ szögét megkétszerezi: $\varphi' = 2\varphi$. Szemléletesen ez olyan, mintha egy legyezőt kétszeres méretre nyitnánk ki. A *3. ábrán* egy $\boldsymbol{r}$ helyvektorú, r és φ polárkoordinátákkal megadott pont körüli, kicsiny $PQRS$ tartomány szögtartó transzformációját láthatjuk.



3. ábra

Ahhoz, hogy a leképezés (kicsi méretek esetén) aránytartó is legyen, az szükséges, hogy a

$$\frac{\Delta r}{r \cdot \Delta\varphi} = \frac{\Delta r'}{r' \cdot 2\Delta\varphi}$$

egyenlőség teljesüljön. Innen következik, hogy

$$r\Delta r' - 2r'\Delta r = 0,$$

vagyis ($\Delta r \ll r$ és $\Delta r' \ll r'$ esetén) fennáll, hogy

$$\Delta\left(\frac{r^2}{r'}\right) = \frac{(r+\Delta r)^2}{r'+\Delta r'} - \frac{r^2}{r'} \approx \frac{r^2 + 2r\Delta r}{r'+\Delta r'} - \frac{r^2}{r'} \approx \frac{r}{r'^2}(2r'\Delta r - r\Delta') = 0,$$

amiből

$$\frac{r^2}{r'} = \text{állandó}$$

következik. Látható, hogy a kétszeresére kinyitott „legyező” esetében akkor kapunk szög- és aránytartó transzformációt, ha a kétszeres szög mellett a helyvektorok nagyságát négyzetre is emeljük és konstanssal megszorozzuk[2]. Az állandó értéke tetszőleges lehet, de célszerű a nagyságát 1-nek választani.

A leképezés általánosítható a legyező tetszőleges arányú kinyitására. A fentebb leírtakhoz hasonlóan látható be, hogy $\varphi' = n\varphi$ esetén a transzformáció akkor lesz aránytartó, ha $r' = r^n$, ahol n tetszőleges pozitív vagy negatív szám ($n \neq 0$).[3]

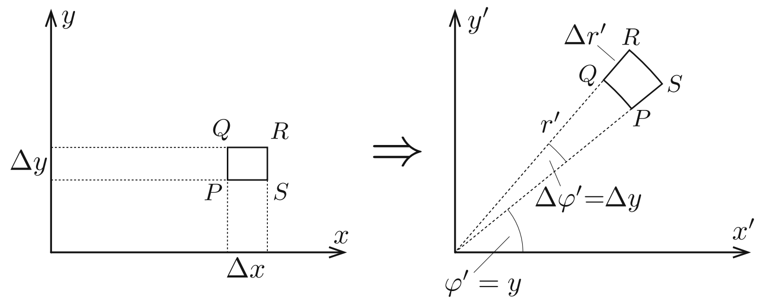
5. „Szalag-leképezés”

Véges szélességű, nagyon hosszú, elektromosan vezető lemezben folyó síkbeli árameloszlások leírásánál hasznos lehet egy olyan konform (szög- és aránytartó) leképezés, amely a szalagot egy végtelen síkba transzformálja. Legyen a szalag az x tengellyel párhuzamos és y irányban 2π széles. (Ha más lenne a szalag szélessége, alkalmas léptékű nagyítással mindig elérhető ez a kívánt méret.)

Válasszunk egy olyan transzformációt, ami az x tengellyel párhuzamos vonalakat (amelyekre $y = y_0$ állandó, $0 < y_0 < 2\pi$) az origóból kiinduló „sugarasan” szétfutó vonalakba viszi át. Ezeket a $\varphi' =$ állandó összefüggés jellemzi, ahol φ' a leképezés során kapott vektoroknak az x' tengellyel bezárt szöge. Legyen például

$$\varphi' = y.$$

Ez a legegyszerűbb választás, ami teljesíti a fentebb leírt követelményeket. Az x tengellyel párhuzamos vonalseregre merőleges vonalak (egyenesek) egyenlete: $x = x_0 =$ állandó. Ezek az egyenesek a leképezés után az origón áthaladó „sugaras egyenesekre” merőleges görbékbe, azaz valamekkora sugarú körökbe mennek át. Azt, hogy mi a kapcsolat az x koordináta és az r' sugár között, a leképezés aránytartóságának követelménye határozza meg.



4. ábra

[2] *Megjegyzések:* (i) Az $x = y = 0$ pontban (vagyis a koordináta-rendszer origójában (a legyező „tengelyénél”) a transzformáció nyilván nem szögtartó. Ez a kivételes pont a transzformáció „szinguláris pontja”. (ii) A leírt transzformáció a komplex számok nyelvén (az $x + \mathrm{i}y = z$ és $x' + \mathrm{i}y' = z'$ jelölés bevezetésével) így írható: $z' =$ állandó $\cdot\, z^2$.

[3] A komplex számok algebrájában jártasak felismerhetik, hogy az első három példában szereplő leképezés a $z' = z_1 z + z_0$ lineáris függvénnyel (z_0 és z_1 állandók), az általánosított „legyező-leképezés” pedig a $z' = z^n$ komplex függvénnyel írható le.

A *4. ábráról* leolvasható, hogy

$$\frac{\Delta r'}{\Delta x}=\frac{r'\Delta\varphi'}{\Delta y},$$

ahonnan $\Delta\varphi'=\Delta y$ miatt

$$\frac{\Delta r'(x)}{\Delta x}=r'(x).$$

Ez az egyenlet (határesetben differenciálegyenlet) a kamatos kamat vagy a radioaktív bomlások exponenciális törvényével azonos alakú, emiatt a megoldása:

$$r'(x)=\text{állandó}\cdot \mathrm{e}^x.$$

Az állandó 1-nek választható, avagy egy egyszerű nyújtással 1-gyé tehető.[4]

A bemutatott arány- és szögtartó leképezések mindegyikének „inverze" (visszafelé történő alkalmazása) is arány- és szögtartó, tehát azok is alkalmasak síkbeli vezetési (vagy áramlási) problémák leírására. Ugyancsak megengedett a konform leképezések egymást követő sorozatának alkalmazása. Bizonyos esetekben kihasználhatjuk még a probléma forgási és/vagy tükrözési szimmetriáját, amennyiben a vékony áramvezető lemez határvonalai is rendelkeznek ezekkel a szimmetriákkal. Mindezekre cikkünk II. (a KöMaL jövő havi számában megjelenő) részében mutatunk fizikai példákat, konkrét alkalmazásokat.

Elek Péter
Debreceni Ref. Koll.
Dóczy Gimn. 12. évf.

Szász Krisztián
BME Fizikai Intézet,
Budapest

Gyakorló feladatsor emelt szintű fizika érettségire

Tesztfeladatok*

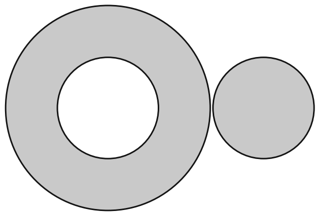
1. Egy kicsiny (pontszerűnek tekinthető) testet egy torony tetejéről bizonyos sebességgel ferdén hajítunk el. Lesz-e a mozgása során olyan pillanat, amikor a gyorsulása merőleges a sebességére?

A) Nem, ilyen helyzet nem fordulhat elő.
B) Igen, biztosan lesz ilyen pillanat.
C) Csak akkor, ha a test az eldobáskor emelkedni kezd.
D) Csak akkor, ha a test az eldobáskor süllyedni kezd.

[4] A komplex számok exponenciális alakját ismerők számára megjegyezzük, hogy a „szalag-leképezést" a $z'=\mathrm{e}^z$ komplex exponenciális függvény írja le.

* A válaszok közül minden esetben pontosan egy a helyes.

2. Egy 8 cm sugarú, kör alakú, homogén papírlap közepéről egy 4 cm sugarú körlapot vágunk ki, és azt közvetlenül az eredeti körlap mellé helyezzük. Hol lesz a két testből álló rendszer tömegközéppontja?



A) A körgyűrű és a kisebb kör középpontját összekötő egyenesen, de biztosan nem a „lyukas részen", hanem olyan helyen, ahol papír van.

B) A körgyűrű és a kisebb kör középpontját összekötő egyenesen, a körgyűrű középpontjától 2 cm távolságban.

C) A körgyűrű és a kisebb kör középpontját összekötő egyenesen, a körgyűrű középpontjától 3 cm távolságban.

D) A körgyűrű és a kisebb kör középpontját összekötő egyenesen, mindkét középponttól ugyanakkora távolságban.

3. Melyik állítás *igaz* az egyszerű gépekre?

A) Az egyszerű gépek használata esetén mindig lecsökken a szükséges erőhatás nagysága.

B) Az egyszerű gépek használata esetén mindig kevesebb munkát kell végezni, mint a gépek használata nélkül.

C) Az egyszerű gépek használatával mindig nagyobb teljesítményt tudunk elérni.

D) A fenti állítások egyike sem igaz.

4. Ugyanolyan magasságban két, azonos frekvenciájú, azonos fázisban rezgő hullámforrás található. Milyen alakzatok mentén találhatók a kioltási helyek a hullámforrásokat tartalmazó vízszintes síkban?

A) A két hullámforrást összekötő szakasz felezőpontján átmenő *egyenesek* mentén.

B) A két hullámforrást összekötő szakasz felezőpontja mint centrum által meghatározott koncentrikus *körökön.*

C) A két hullámforrás mint fókuszpontok és a rezgés hullámhossza által meghatározott *ellipsziseken.*

D) A két hullámforrás mint fókuszpontok és a rezgés hullámhossza által meghatározott *hiperbolák* mentén.

5. Melyik fizikai jellemző *nem* befolyásolja egy pohár víz párolgási sebességét?

A) A levegő páratartalma.
B) A levegő hőmérséklete.
C) A víz tömege.
D) A víz levegővel érintkező felülete.

6. Válasszuk ki a *hamis* állítást!

A) A hűtőgép és hőerőgép működése hasonlít egymáshoz, csak a hűtőgép a ciklust fordított irányba járja végig, mint a hőerőgép.

B) A hűtőgép működése során a felvett elektromos energiából is hő lesz.

C) A hűtőgép alacsonyabb hőmérsékletű hely felől magasabb hőmérsékletű hely felé szállít hőt, ezért ebben az esetben a hőtan II. főtétele nem teljesül.

D) A hűtőgép működése során több hőt ad le, mint amennyit felvesz.

7. Egy aranybevonatos kivezetésekkel rendelkező ellenállás nagysága R. Párhuzamosan kapcsolunk vele egy X nagyságú ellenállást, majd ezekkel sorosan egy ugyancsak X nagyságú ellenállást. Megválasztható-e X értéke úgy, hogy az eredő ellenállás az eredeti R maradjon?

A) Nem, ez nem lehetséges.

B) Igen, ha $X = 2R$.

C) Igen, tetszőleges $X < R$ megfelel a feltételnek.

D) Igen, ha $X = \frac{\sqrt{5}-1}{2} R \approx 0{,}618\, R$, vagyis X/R a híres aranymetszés arányszáma.

8. Valakinél a tisztánlátás távolsága 25 cm-ről megnövekedett. Azt szeretné, hogy az újságot újra 25 cm távolságból tudja olvasni. Milyen szemüvegre van szüksége?

A) 25 cm-nél kisebb fókusztávolságú szórólencséjűre.

B) 25 cm-nél nagyobb fókusztávolságú szórólencséjűre.

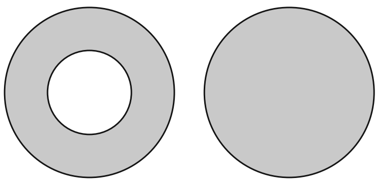
C) 25 cm-nél kisebb fókusztávolságú gyűjtőlencséjűre.

D) 25 cm-nél nagyobb fókusztávolságú gyűjtőlencséjűre.

9. Az ún. másodpercinga fél lengésideje éppen 1 másodperc, hossza kb. 1 m. A nehézségi gyorsulás értéke a Holdon a földi érték hatoda. Milyen hosszúságú a másodpercinga a Holdon?

A) $\frac{1}{6}$ m; *B*) $\frac{1}{\sqrt{6}}$ m; *C*) $\sqrt{6}$ m; *D*) 6 m.

10. Egy vastag falú acélcső külső sugara $2R$, belső sugara R. Egy ugyanakkora tömegű és a csővel azonos sűrűségű, tömör acélrúd sugara $2R$. Milyen viszonyban van a két testnek a forgástengelyükre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka?



A) Az acélcső tehetetlenségi nyomatéka a kisebb.

B) A két test tehetetlenségi nyomatéka megegyezik.

C) Az acélcső tehetetlenségi nyomatéka nagyobb, mint a tömör rúdé.

11. A Hold tömege 81-szer, a felszínén a nehézségi gyorsulás 6-szor kisebb, mint a Föld megfelelő értékei. Hányszor kisebb a Holdon az első kozmikus sebesség (vagyis a felszínhez közeli pályán a keringési sebesség), mint a Föld esetében?

A) 81-szer; *B*) 6-szor; *C*) az arány $\sqrt[4]{81 \cdot 6} \approx 4{,}7$; *D*) ugyanakkora, mint a földi érték.

12. Egy tárgyat egyszerű nagyítón keresztül vizsgálunk. Hová kell elhelyezni a tárgyat, és milyen jellegű a keletkezett kép?

A) A tárgyat a fókuszon belülre kell elhelyezni, és a keletkezett kép valódi.

B) A tárgyat a fókuszon belülre kell elhelyezni, és a keletkezett kép látszólagos.

C) A tárgyat a fókusz és a kétszeres fókusz közé kell elhelyezni, és a keletkezett kép valódi.

D) A tárgyat a fókusz és a kétszeres fókusz közé kell elhelyezni, és a keletkezett kép látszólagos.

13. Egy egyenes tekercs változó mágneses térben van. Az alábbiak közül mi *nem* befolyásolja a tekercsben indukálódó feszültség nagyságát?

A) A tekercs menetszáma.
B) A tekercs hossza.
C) A tekercs keresztmetszete.
D) A tekercs helyzete a mágneses tér irányához képest.

14. A gyorsuló teherautó platóján lévő láda az autóval együtt mozog. Melyik erőhatás okozza a láda gyorsulását?

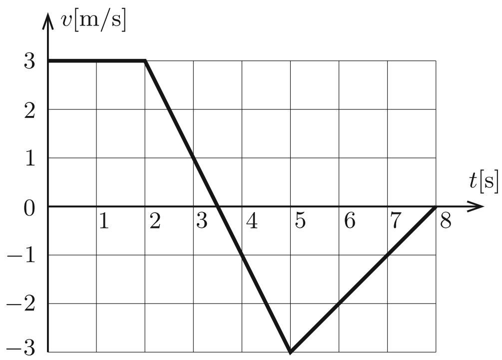
A) A láda gyorsításához nem kell erő, mert az autóval együtt mozog.
B) A motor húzóereje.
C) A láda súlyereje.
D) Az autó és a láda közötti tapadási súrlódási erő.

15. Egy deutérium- és egy tríciumatommag fúziójakor egy héliumatommag és egy neutron keletkezik. Válasszuk ki a helyes reakcióegyenletet!

A) ${}^2_1\mathrm{D}+{}^3_1\mathrm{T}\Rightarrow{}^4_1\mathrm{He}+{}^1_1\mathrm{n}$; *B*) ${}^3_1\mathrm{D}+{}^2_1\mathrm{T}\Rightarrow{}^3_2\mathrm{He}+{}^2_0\mathrm{n}$; *C*) ${}^3_1\mathrm{D}+{}^2_1\mathrm{T}\Rightarrow{}^4_2\mathrm{He}+{}^0_1\mathrm{n}$; *D*) ${}^2_1\mathrm{D}+{}^3_1\mathrm{T}\Rightarrow{}^4_2\mathrm{He}+{}^1_0\mathrm{n}$.

Számolásos feladatok

1. Az *ábrán* egy egyenes vonalú, változó mozgást végző test sebesség–idő grafikonja látható.



a) Rajzoljuk meg a mozgáshoz tartozó gyorsulás–idő és elmozdulás–idő grafikonokat!

b) Számítsuk ki a mozgás 8 másodperces időtartamára vonatkoztatva a sebesség nagyságának átlagos értékét!

2. 60 Ω nagyságú ohmikus ellenállással sorba kapcsolt ideális tekercset ismeretlen frekvenciájú, 230 V effektív feszültségű, szinuszosan váltakozó áramforrásra csatlakoztatunk. A tekercs önindukciós együtthatója 0,25 H. Az áramforrás effektív teljesítménye 15 W.

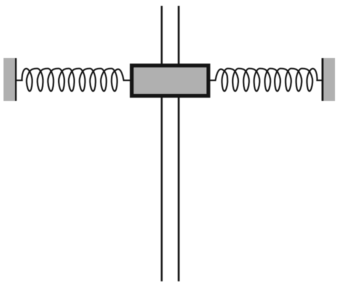
a) Mekkora az áramforrás frekvenciája?

b) Mekkora az áramforrás feszültsége és az áramkör árama közötti fáziseltolódás szöge?

3. Állandó mennyiségű hidrogéngáz a $p_1 = 4\cdot 10^5$ Pa, $V_1 = 2{,}5\ \mathrm{dm}^3$, $T_1 = 400$ K értékekkel jellemezhető állapotból a $p_2 = 1{,}6\cdot 10^5$ Pa, $V_2 = 6\ \mathrm{dm}^3$ állapotba kerül úgy, hogy a két állapotot a $p-V$ diagramon egyenes szakasz köti össze.

a) Hány részecske van a gáztérben?

b) Hányszorosára változott a gáz belső energiája a folyamat során?



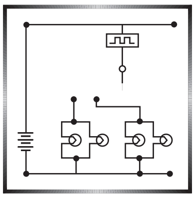
4. Ismeretlen tömegű test súrlódásmentesen mozoghat egy függőleges rúdon. A testhez az *ábra* szerint két, egyenként $D = 200$ N/m rugóállandójú rugót kapcsolunk. A rugók vízszintes helyzetükben nyújtatlanok, és ebben az állapotban $x_0 = 0{,}6$ m hosszúságúak. A test az ábrán látható helyzethez képest $h = 20$ cm-rel mélyebben lehet egyensúlyban.

a) Mekkora a test tömege?

b) A testet a rugók vízszintes helyzeténél kezdősebesség nélkül elengedjük. Mekkora lesz a test legnagyobb sebessége a további mozgása során?

c) Eljut-e a test a kiindulási helyzeténél $H = 40$ cm-rel mélyebbre?

Markovits Tibor
Budapest



Fizika gyakorlatok megoldása

G. 642. *Egy 2R sugarú kör kerületének belső oldalán csúszásmentesen gördül körbe egy R sugarú kerék. Milyen pályán mozog a kis kerék egy kerületi pontja?*

(*3 pont*)

I. megoldás. Jelöljük a nagy kör középpontját O-val, az a pontja pedig, amelyiket a kerék kijelölt kerületi pontja (M) valamikor (a kezdőhelyzetnek tekintett pillanatban) elért, legyen A. Megmutatjuk, hogy az M pont az OA sugárhoz tartozó átmérőn mozog oda-vissza.

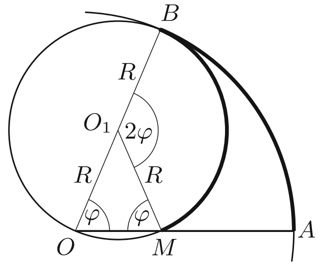
Ha a kis kerék középpontja a kezdőhelyzethez képest φ szöggel elfordul a nagy kör középpontja körül, a két kör érintési pontja B-be kerül (*1. ábra*). A kis kör és az OM egyenes metszéspontja az egyenlő szárú OO_1M háromszöget jelöli ki, amelynek O_1-nél levő külső szöge 2φ. Így a BM körív hossza megegyezik a BA körív hosszával, hiszen a sugarak aránya $1:2$. Az M pont tehát megfelel a csúszásmentes gördülés feltételének, vagyis tekinthető a kis kerék kezdetben A-ban levő kerületi pontjának a kerék elfordulása utáni helyzetben.

Megjegyzés. Ha a gördülés egyenletes, vagyis $\varphi = \omega t$, akkor

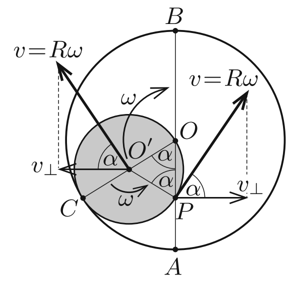
$$OM = 2R\cos\varphi = 2R\cos\omega t,$$

tehát M mozgása $2R$ amplitúdójú, a kerék gördülésével azonos periódusidejű *harmonikus rezgőmozgás.*

Markó Péter (Győr, Révai Miklós Gimn., 10. évf.)



1. ábra



2. ábra

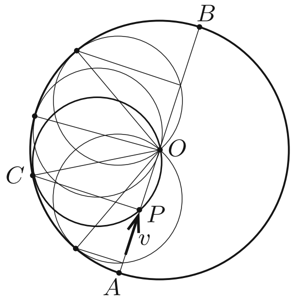
II. megoldás. Tekintsük az R sugarú gördülő kerék tetszőleges helyzetét (*2. ábra*). A kerék kerületének kiszemelt P pontja és a nagy kör O középpontja kijelöli a $2R$ sugarú kör AB átmérőjét. Megmutatjuk, hogy a kerék gördülése során a P pont nem távolodik el az AB egyenestől, mindvégig rajta marad azon.

A kerék mozgása két részből tehető össze. Egyrészt az O' középpontja valamekkora ω szögsebességgel elfordul a nagy kör O középpontja körül; ebből a mozgásból származó sebessége $v = R\omega$. Másrészt a kerék ugyancsak ω szögsebességgel, de az ellenkező irányban forog a saját (O') középpontja körül; a kerületi pontjainak, így P-nek is az ebből származó sebessége $R\omega$.

Megjegyzés. A kétféle mozgás szögsebességének egyenlő nagyságát jól mutatja az tény, hogy a kerék C pontjának eredő sebessége – a csúszásmentes gördülés miatt – *nulla.* A kerék C pontja (ami tényleges anyagi pont) nem tévesztendő össze a kerék és a nagy kör pillanatnyi érintkezési pontjával, amit mindig más és más anyagdarabkák jelölnek ki, és amelyik pont nem is mozdulatlan, hanem $\omega' = \omega/2$ szögsebességgel „jár körbe" az O pont körül.

A kétféle mozgásból adódó sebességvektor nagysága és az AB átmérővel bezárt szöge ugyanakkora, emiatt az AB-re merőleges $v_\perp$ sebességkomponensek is egyenlő nagyságúak (de ellentétes irányúak). Ezek szerint a P pont nem távolodik el az AB egyenestől, a kerék gördülése során mindvégig azon marad.

Tallósy Péter (Szeged, Dugonics András Piarista Gimn., 8. évf.) dolgozata alapján



3. ábra

III. megoldás. Tekintsük a gördülő kerék valamelyik (a *3. ábrán* vastagabban jelölt) helyzetét! A mozgás pillanatnyi forgási középpontja (ún. momentán centruma) a két kör érintkezési pontja, vagyis C, hiszen ezen pont sebessége nulla. A kerék kijelölt kerületi pontjának (P) sebessége merőleges CP-re, tehát átmegy a nagy kör O középpontján, hiszen a kis kerék határvonala az COP háromszög Thalész-köre. Ezek szerint a P pont sebessége mindvégig az O középpont felé, vagy azzal ellentétes irányba mutat, a P pont pályája tehát a nagy kör egyik átmérője.

(G. P.)

Megjegyzés. Amikor egy R_1 sugarú kör kerületének belső oldalán csúszásmentesen gördül körbe egy másik, $R_2 < R_1$ sugarú kör, akkor a belső kör egy pontja által leírt pályát *hipocikloisnak* nevezzük, aminek a pontjait – alkalmasan választott koordinátarendszerben – a következőképpen számíthatjuk ki:

$$x(t) = (R_1 - R_2)\cos t + R_1 \cos\frac{(R_1 - R_2)t}{R_2},$$

$$y(t) = (R_1 - R_2)\sin t - R_1 \sin\frac{(R_1 - R_2)t}{R_2}.$$

Amennyiben $R_1 = 2R$ és $R_2 = R$, a hipociklois elfajult lesz, $y(t) \equiv 0$ egyenletű egyenessé válik.

Bányai Kristóf (Miskolc, Herman Ottó Gimn., 9. évf.)

72 dolgozat érkezett. Helyes 18 megoldás. Kicsit hiányos (2 pont) 13, hiányos (1–2 pont) 34, hibás 18, nem értékelhető 3 dolgozat.

G. 645. *A NASA vákuumkamrájában filmre vették, ahogyan a kalapács és a madártoll is egyformán, $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$ gyorsulással esik a föld felé, egyszerre indítva őket egyszerre érnek talajt. Ha a filmet kétszeres sebességgel vetítik, mekkora lesz az így lejátszott moziban a kalapács és a toll gyorsulása?*

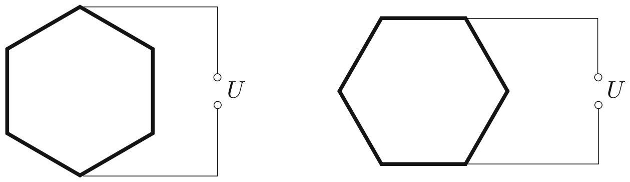
(*3 pont*)

Megoldás. A gyorsulás $\frac{\Delta v}{\Delta t}$, ahol Δv a végsebesség és a kezdősebesség különbsége, Δt pedig a mozgás időtartama. A kezdősebesség a filmen is és a valóságban is nulla. A kétszeres sebességgel levetített filmen a végsebesség a valódi érték kétszerese, az időtartam a tényleges időnek a fele. Így a kalapács és a madártoll gyorsulása a filmen 4-szer nagyobb, mint a valóságban: $a = 39{,}2\ \mathrm{m/s^2}$.

Bodzsár Míra (Hódmezővásárhely, Bethlen G. Ref. Gimn., 10. évf.)

99 darab dolgozat érkezett. Helyes 62 megoldás. Hiányos (1–2 pont) 8, hibás 29 dolgozat.

G. 647. *Két – látszólag egyforma – vízforraló kancsóban szabályos hatszögben meghajlított fűtőszálat találunk. Az egyik kancsóban az* a) ábra, *a másikban a* b) ábra *szerint kötötték be a fűtőszálat. Melyik kancsóban forr fel hamarabb a víz?*



a) *b*)

(*3 pont*)

Megoldás. Ha a hatszög egy-egy élének ellenállása R, akkor az a) esetben (amikor két darab $3R$ nagyságú ellenállást kapcsolunk párhuzamosan) az eredő ellenállás $R_a = \frac{3}{2}R$.

A b) esetben $4R$ és $2R$ ellenállás van párhuzamosan kapcsolva, az eredőjük tehát $R_b = \frac{4}{3}R$.

A fűtőszálak teljesítménye:

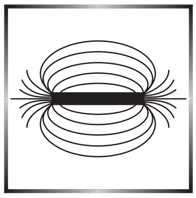
$$P_a = \frac{U^2}{R_a} = \frac{2}{3}\frac{U^2}{R} = \frac{8}{12}\frac{U^2}{R}, \qquad \text{illetve} \qquad P_b = \frac{U^2}{R_b} = \frac{3}{4}\frac{U^2}{R} = \frac{9}{12}\frac{U^2}{R}.$$

Látható, hogy a b) esetben nagyobb a fűtőszál teljesítménye, így a b) jelű kancsóban forr fel hamarabb a víz.

Szántó Barnabás (Keszthely, Vajda János Gimn., 10. évf.)

60 dolgozat érkezett. Helyes 31 megoldás. Kicsit hiányos (2 pont) 3, hiányos (1 pont) 6, hibás 18, nem versenyszerű 2 dolgozat.

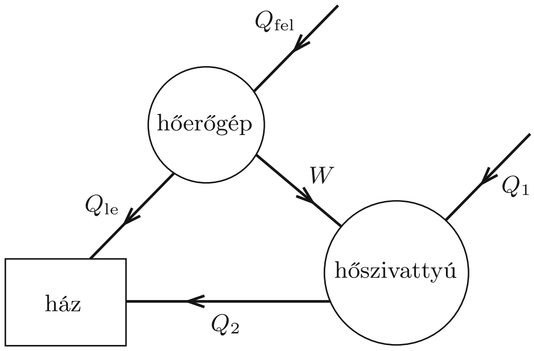
Fizika feladatok megoldása



P. 5018. *Ha a tüzelőt nem kályhában égetjük el, hanem egy hőerőgép tűzterében, a hőerőgéppel pedig egy hőszivattyút hajtunk meg, akkor a lakásba több hő juthat, mint amennyi a tüzelő elégetésekor keletkezik. Legyen a lakás a hőerőgép alsó hőtartálya, valamint a hőszivattyú felső hőtartálya. A hőszivattyú alsó hőtartálya lehet az utca levegője. Tegyük fel, hogy a hőerőgép hatásfoka η_1, a hőszivattyúról pedig tételezzük fel, hogy hőerőgépként működtetve η_2 hatásfokú lenne. Számítsuk ki, hogy a tüzelő elégetésekor felszabaduló hőnek hányszorosa kerül így a lakásba!*

(*5 pont*) Közli: *Radnai Gyula,* Budapest

Megoldás. Az *ábrán* látható jelölések segítenek a feladat megoldásánál. Ha a tüzelőt a kályhában égetjük el, a felszabaduló hő Q_{fel}.



Amennyiben ugyanennyi hő felvételével egy η_1 hatásfokú hőerőgépet működtetünk, az a gép $W = \eta_1 Q_{\text{fel}}$ munkát képes végezni, és

$$Q_{\text{le}} = Q_{\text{fel}} - W = (1 - \eta_1) Q_{\text{fel}}$$

hőt ad le az alsó hőtartálynak (esetünkben a lakásnak).

Egy hőszivattyú W munka befektetésével az utcáról felvett Q_1 hőt a melegebb lakásba képes „szivattyúzni", és a lakásnak $Q_2 = W + Q_1$ hőt ad le. Fordított irányú működése során a hőszivattyúnak megfelelő hőerőgép Q_2 hő felvételével $W = \eta_2 Q_2$ munkát végezne. Ennek megfelelően a hőszivattyú által leadott hő

$$Q_2 = \frac{W}{\eta_2} = \frac{\eta_1}{\eta_2} Q_{\text{fel}}.$$

A lakásba összesen a hőerőgép által leadott hő és a hőszivattyú által leadott hő összege kerül, ami a közvetlen elégetéskor felszabaduló hőnek bizonyos x-szerese.

$$Q_{\text{le}} + Q_2 = x \cdot Q_{\text{fel}}.$$

Behelyettesítve a korábban kiszámított értékeket:

$$(1 - \eta_1) Q_{\text{fel}} + \frac{\eta_1}{\eta_2} Q_{\text{fel}} = x \cdot Q_{\text{fel}},$$

ahonnan a kérdéses arányszám:

$$x = 1 - \eta_1 + \frac{\eta_1}{\eta_2},$$

amit

$$x = 1 + \eta_1 \left(\frac{1}{\eta_2} - 1 \right)$$

alakban is felírhatunk. Mivel $\eta_2 < 1$ és $\eta_1 > 0$, nyilván teljesül, hogy

$$\eta_1 \left(\frac{1}{\eta_2} - 1 \right) > 0, \qquad \text{vagyis} \qquad x > 1.$$

Igaz tehát a feladat szövegében szereplő állítás: a hőerőgép és a hőszivattyú együttes használatával több hő juthat a lakásba, mint amennyi a tüzelő elégetésekor keletkezik.

Bartók Imre (Debreceni Ref. Koll. Dóczy Gimn., 12. évf.) dolgozata alapján

20 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott Absur Khan Siam, Bartók Imre, Elek Péter, Marozsák Tóbiás és Olosz Adél megoldása. Kicsit hiányos (4 pont) 6, hiányos (2 pont) 9 dolgozat.

P. 5020. *Egy ernyőn lévő kör alakú nyílást az ernyőre merőleges, koherens lézerfénnyel világítunk meg. Az ernyőtől távolabb, az optikai tengelyre merőlegesen egy CCD-érzékelő lemezt helyeztek el. Hány százalékkal csökken az optikai tengelyen lévő pixel megvilágítása (a rá eső fény intenzitása), ha a nyílás* 1/6*-át egy átlátszatlan, körcikk alakú lemezzel eltakarjuk?*

(*5 pont*) *Példatári feladat nyomán*

Megoldás. A *Huygens–Fresnel-elv* értelmében a hullámtér minden pontja elemi hullámok kiindulópontja, és az ernyőn kialakuló eredő hullám ezen elemi hullámok interferenciájaként kapható meg.

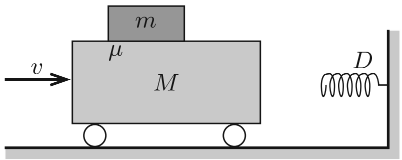
Az elrendezés szimmetriája miatt az egyes körcikkekből érkező hullámok amplitúdója ugyanakkora, és a fázisuk is megegyezik egymással. Ha kezdetben az amplitúdó A_1, akkor a nyílás $\frac{1}{6}$-át eltakarva az optikai tengelyen lévő pixelre eső hullám amplitúdója $A_2 = \frac{5}{6}\,A_1$-re csökken. Az intenzitás az amplitúdó négyzetével arányos:

$$\frac{I_1}{I_2} = \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 = \frac{25}{36} = 0{,}69.$$

Ezek szerint a középső pixelre eső fény intenzitása kb. 30%-kal fog csökkenni.

Csuha Boglárka (Keszthelyi Vajda János Gimn., 12. évf.) dolgozata alapján

8 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott Bartók Imre, Csuha Boglárka, Elek Péter, Markó Gábor, Marozsák Tóbiás és Olosz Adél megoldása. Hiányos (2–3 pont) 2 dolgozat.



P. 5047. *Az ábrán látható M tömegű kiskocsi és a rajta levő lapos, m tömegű hasáb v sebességgel halad a falhoz rögzített, D rugóállandójú nyomórugó felé. A hasáb és a kiskocsi felülete közötti súrlódási együttható μ.*

a) Ütközéskor megcsúszik-e a hasáb?

b) Mennyi ideig tart az ütközés?

Adatok: $M=0{,}2$ kg, $m=0{,}1$ kg, $v=1$ m/s, $D=4{,}4$ N/m, $\mu=0{,}4$.

(*4 pont*) Közli: *Németh László,* Fonyód

Megoldás. Akkor csúszhat meg a test, ha a rendszer (kiskocsi + hasáb) gyorsulása meghaladja a $\mu g\approx 3{,}9\ \mathrm{m/s^2}$ értéket. Ha ez még a rugó legnagyobb összenyomódásakor sem következik be, a hasáb nem csúszik meg.

a) A rugó legnagyobb összenyomódásakor a kiskocsi sebessége nulla. Az energiamegmaradás tételét felhasználva kiszámolhatjuk a maximális benyomódást:

$$\frac{1}{2}(M+m)v^2=\frac{1}{2}Dx^2,$$

ahonnan $x=0{,}26$ m. A rugóerő ekkor $F_{\text{max.}}=Dx=1{,}15$ N, a gyorsulás maximális értéke pedig

$$a_{\text{max.}}=\frac{F_{\text{max.}}}{M+m}=3{,}8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

Ez kisebb, mint a tapadó súrlódás által létrehozni képes μg gyorsulás, tehát a hasáb *nem* csúszik meg a kiskocsin.

b) Az ütközés ideje az az időtartam, ameddig a kiskocsi érintkezik a rugóval. Ez a harmonikus rezgőmozgás periódusidejének fele:

$$\frac{T}{2}=\pi\sqrt{\frac{M+m}{D}}=0{,}82\ \mathrm{s}.$$

Virág Levente (Budapest, Óbudai Árpád Gimn., 10. évf.)

98 dolgozat érkezett. Helyes 36 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 25, hiányos (1–2 pont) 35, hibás 2 dolgozat.

P. 5056. *Egy* 40 N/m *rugóállandójú, elhanyagolható tömegű rugó függőleges helyzetben áll az asztalon. A rugó tetejéhez erősített, ugyancsak elhanyagolható tömegű lemezre egy* 0,2 kg *tömegű, kis méretű testet ejtünk, a lemeztől mérve* 0,4 m *magasságból. Mennyi ideig lesz a kis test a lemezen, ha nem tapad hozzá?*

(*5 pont*) Közli: *Kobzos Ferenc,* Dunaújváros

Megoldás. Jelöljük a rugóállandót D-vel, a kis test tömegét m-mel, az ejtési magasságot pedig h-val. A kis test akkor lenne egyensúlyban, amikor a rugó összenyomódása

$$x_0=\frac{mg}{D}\approx 5\ \mathrm{cm}.$$

A lemezre eső kis test „átszalad" az egyensúlyi helyzetén, és attól A távolsággal mélyebben csökken csak a sebessége nullára. Ezután visszafelé is bejárja ugyanezt az utat, és a rugó nyújtatlan állapotánál válik el a kis test a lemeztől. A test mozgása harmonikus rezgőmozgás (annak egy részlete), a rezgés körfrekvenciája

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = 14{,}1\ \frac{1}{\mathrm{s}}.$$

A rezgés amplitúdóját az energiamegmaradás törvénye segítségével határozhatjuk meg. Az

$$mg(h + x_0 + A) = \frac{1}{2}D(x_0 + A)^2$$

másodfokú egyenlet pozitív gyöke:

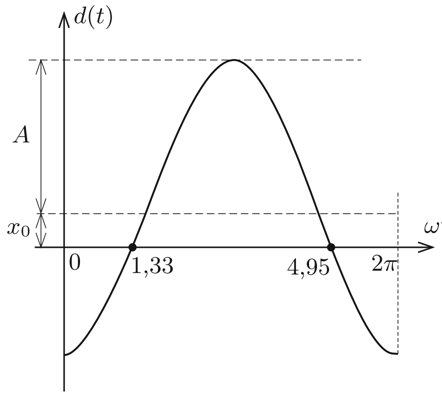
$$A = \sqrt{\frac{2mgh}{D} + \left(\frac{mg}{D}\right)^2} = \sqrt{x_0(x_0 + 2h)} \approx 20\ \mathrm{cm}.$$

A rugó megrövidülését (összenyomódását) a

$$d(t) = x_0 - A\cos(\omega t)$$

kifejezés adja meg (lásd az *ábrát*). A kis test mindaddig nem válik el a lemeztől, amíg $d(t) \geqslant 0$, vagyis

$$\cos(\omega t) \leqslant \frac{x_0}{A} \approx 0{,}24.$$



A fenti egyenlőtlenség az

$$1{,}33\ \mathrm{rad} \leqslant \omega t \leqslant 2\pi - (1{,}33\ \mathrm{rad}) = 4{,}95\ \mathrm{rad}$$

intervallumon áll fenn, ami

$$\Delta t = \frac{3{,}62\ \mathrm{rad}}{\omega} = 0{,}26\ \mathrm{s}$$

időtartamnak felel meg. Ennyi ideig marad tehát a kis test a lemezen.

Megjegyzés. A lemezen való tartózkodás idejét a rezgőmozgást végző test két állapotának fáziskülönbsége határozta meg. Ez a fáziskülönbség nem függ az időmérés kezdőpontjától, vagyis a rezgés kezdeti fázisától. Emiatt írhattuk le a rezgést egy fáziseltolódás nélküli koszinuszfüggvénnyel.

Schrott Márton (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., 12. évf.) dolgozata alapján

77 dolgozat érkezett. Helyes 32 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 3, hiányos (1–3 pont) 27, hibás 11, nem versenyszerű 4 dolgozat.

Fizikából kitűzött feladatok

M. 383. Mérjük meg, hogy mennyi idő alatt pereg le egy lejtőn álló homokóra a lejtő hajlásszögének függvényében!

(*6 pont*) Közli: *Nagy Piroska Mária,* Budapest

G. 657. Egy tető nélküli, négyzet alapú, egyenes hasáb alakú akvárium alját 1 cm vastagságú, négyzet alakú üveglapból készítjük. Az oldallapok szintén ugyanilyen vastag üvegből készülnek. Az akvárium belső magassága 20 cm, aljának belső mérete 30×30 cm.

Az elkészült akváriumba vizet töltünk. A csapból másodpercenként 5 cm^3 víz jut az akváriumba.

a) Hány óra múlva telik meg az akvárium fele vízzel?

b) Mekkora a vízzel félig töltött akvárium súlya?

(A víz sűrűsége 1000 kg/m^3, az üveg sűrűsége 2500 kg/m^3.)

(*3 pont*)

G. 658. Egy testre 6 erő hat egyszerre: $F_1=1$ N, $F_2=2$ N, $F_3=3$ N, $F_4=$ $=4$ N, $F_5=5$ N és $F_6=6$ N. Az erők egy síkban vannak, és az egymást követő erők közötti szög 60° (vagyis az erők egymás utáni elfordulása 60°, mindig ugyanabba a forgásirányba).

a) Mekkora a 6 erő vektori összege?

b) Hogyan változtassuk meg az F_2 erő nagyságát és esetleg az irányát is, hogy a test egyensúlyban legyen?

(*3 pont*)

G. 659. Két 50 W teljesítményű, 230 V-ra tervezett karácsonyfaizzó-füzérünk van. Az egyik füzérben 50, a másikban 100 egyforma izzó van sorba kötve.

a) Melyik füzérben nagyobb az áramerősség?

b) Melyikben nagyobb az egyes izzók ellenállása?

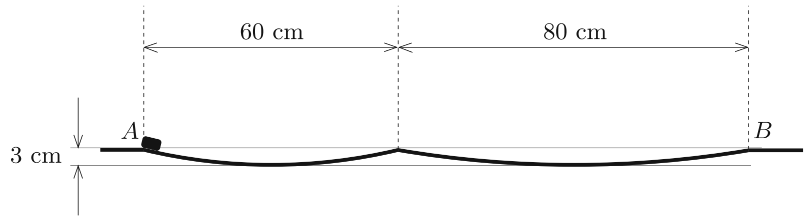
c) Nő vagy csökken a 100 darabos füzér teljesítménye, ha 10 izzóját kicseréljük az 50 darabos füzér 10 izzójára? (Feltételezzük, hogy egyetlen izzó sem ég ki.)

(*3 pont*)

G. 660. Egy falhoz kötött, vízszintesen kifeszített, rugalmas szalagon egy csiga mászik 1 m/h sebességgel. A csiga a faltól indul, a szalag kezdeti hossza 2 m. Az indulástól számított minden óra végén a szalagot a végénél fogva 1 méterrel megnyújtjuk. Az indulás után mennyi idővel érkezik a csiga a szalag végére?

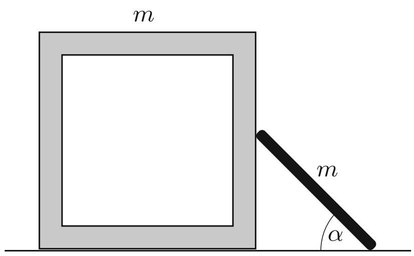
(*4 pont*)

P. 5089. Az *ábrán* látható, súrlódásmentes pálya két körívből áll. A pálya A pontjából nagyon kicsi kezdősebességgel indulva csúszik egy apró test. Mennyi idő alatt jut el a test a görbült pálya jobb oldali végéig (a B pontig)?



(*4 pont*) Közli: *Simon Péter,* Pécs

P. 5090. Vízszintes talajon egy m tömegű, kocka alakú doboz áll. A doboz egyik lapjának közepéhez egy ugyancsak m tömegű, vékony, homogén pálca támaszkodik. Kezdetben mindkét testet rögzítetten tartjuk. A pálca és a talaj által bezárt szög $\alpha = 45°$.



Mekkora gyorsulással indul el a doboz, ha a testeket elengedjük? (A súrlódás mindenhol elhanyagolható.)

(*5 pont*) Közli: *Berke Martin,* Zalaegerszeg, Zrínyi Miklós Gimnázium

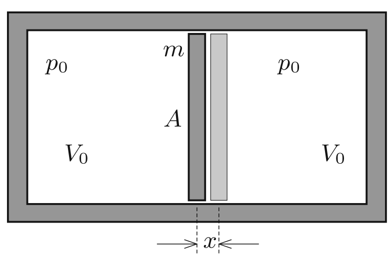
P. 5091. A normál állapotú levegő sűrűsége kb. 0,0013 g/cm^3, a folyékony levegőé kb. 0,87 g/cm^3.

a) Becsüljük meg, hány „levegőmolekula” található 1 cm^3 normál állapotú levegőben, illetve folyékony levegőben!

b) Becsüljük meg egy „levegőmolekula” tömegét!

(*3 pont*) Közli: *Völgyi István,* Budapest

P. 5092. Vízszintes helyzetű, jól hőszigetelt, rögzített hengert egy m tömegű, A keresztmetszetű, könnyen mozgó, rossz hővezető anyagból készült dugattyú két egyenlő, V_0 térfogatú részre oszt. Az egyes részekben azonos mennyiségű, p_0 nyomású héliumgáz van.

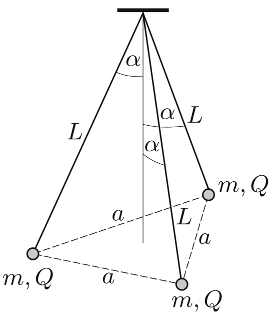


A dugattyút kissé kitérítjük egyensúlyi helyzetéből, majd magára hagyjuk. Mekkora lesz a rezgésidő?

(*5 pont*) Közli: *Németh László,* Fonyód

P. 5093. Egy űrállomáson a súlytalanság állapotában végzett kísérlet kérdése speciális „kozmikus sebességgel” kapcsolatos: Egy $R=10$ cm sugarú, $Q=-10^{-7}$ C töltésű, homogén tölteseloszlású szigetelőgömb felületétől $d=2$ cm-re mekkora az első és a második kozmikus sebesség egy $m=0{,}1$ g tömegű, $q=2\cdot10^{-9}$ C töltésű, pontszerű testre vonatkozóan?

(*4 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest



P. 5094. Három, $L=20$ cm hosszúságú szigetelőfonál egyik végéhez $m=1$ g tömegű, pontszerűnek tekinthető testeket erősítettek, amelyek töltése (egyenként) $Q=3{,}1\cdot10^{-7}$ C. A fonalak másik végét közös pontban rögzítették. Kezdetben a feszes fonalak a függőlegessel $\alpha=30^\circ$-os szöget zárnak be, és a kis testek egy szabályos háromszöget alkotnak. Ezt követően egyszerre elengedjük a testeket.

a) Mekkora szöget zárnak be a fonalak a függőlegessel, amikor a testek sebessége maximális?

b) Mekkora a testek legnagyobb sebessége?

(*5 pont*) Közli: *Zsigri Ferenc,* Budapest

P. 5095. Sorba kötöttünk R_1 és R_2 ellenállást, az eredőjük R_1+R_2. Ebbe az áramkörbe R_1-gyel párhuzamosan és R_2-vel sorosan bekötöttünk egy-egy R nagyságú ellenállást. Van-e olyan R érték, amely esetén az eredő ellenállás továbbra is R_1+R_2 marad?

(*4 pont*) Közli: *Kobzos Ferenc,* Dunaújváros

P. 5096. Egy 4 cm sugarú tömör, homogén üveggömb középpontjától 10 cm-re van egy 2 mm sugarú, világító, kicsiny körlap. A körlap síkja merőleges a kör és a gömb középpontját összekötő egyenesre (az optikai tengelyre). Hol keletkezik és mekkora lesz e körlapnak az üveggömb által előállított képe? (Az üveg törésmutatója 1,5, és a képalkotásban csak az optikai tengelyhez közel haladó fénysugarak vesznek részt.)

(*5 pont*) Közli: *Radnai Gyula,* Budapest

P. 5097. Egy átlátszatlan lapon három vékony rés található, a szomszédos rések távolsága d. A középső rés szélessége $\sqrt{2}$-ször nagyobb, mint a szélső két rés szélessége. A réseket a lap síkjára merőlegesen λ hullámhosszúságú lézernyalábbal világítjuk meg, a diffrakciós képet az L távolságra lévő ernyőn észleljük. A nulladrendű maximumtól milyen távolságra van az ernyőn az első nulla intenzitású hely? (Tegyük fel, hogy $\lambda\ll d\ll L$!)

(*5 pont*) Közli: *Vigh Máté,* Budapest

P. 5098. A csillagok színképvonalai – többek között – a csillag tengely körüli forgása miatt is kiszélesednek. Egy csillag színképében a hidrogén Hδ-val jelölt (a Balmer-sorozatba eső), laboratóriumban 410,174 nm hullámhosszúságú vonalát a 410,171 nm és a 410,177 nm közötti tartományra kiszélesedve észleljük.

a) Mekkora a csillag tengelyforgási periódusa, ha az átmérője $1{,}4\cdot 10^9$ m? Tételezzük fel, hogy a csillag forgástengelye merőleges a látóirányunkra, és a vonalkiszélesedést főként a csillag forgása okozza.

b) Milyen következtetést vonhatnánk le a csillag mozgásáról, ha a vonalat 410,176 nm és 410,182 nm közötti tartományra kiszélesedve észlelnénk?

(*5 pont*) Közli: *Kovács József,* Szombathely

P. 5099. Egy hullámvasút kocsija egy függőleges síkban fekvő, kör alakú pályán halad úgy, hogy a saját motorját és fékjét használva a sebességét állandó értéken tartja. Legalább mekkora sebességet kell tartania ahhoz, hogy az R sugarú pályán megcsúszás nélkül tudjon végighaladni, ha a tapadó súrlódás együtthatója μ? Hol csúszna meg, ha a sebessége ennél kicsit kisebb lenne? A kocsi elég kicsi a pálya sugarához képest.

(*6 pont*) Közli: *Takács László,* Baltimore, USA

Beküldési határidő: 2019. február 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS
(Volume 69. No. 1. January 2019)

Problems in Mathematics

New exercises for practice – competition K (see page 32): **K. 609.** Given that 50 minutes ago the time past 3 p.m. was four times as many minutes as the time to 6 p.m. (in the same afternoon), what time is it now? **K. 610.** We are building a flight of stairs from solid concrete. It leads to a height of 3 metres, and its width is 1 metre. Each step has a height (m) and a so-called depth (l), as shown in the *figure.* It is required that $2m+l=64$ cm, and a stair is not allowed to have a height greater than its depth. What is the minimum possible number of steps? How much concrete is needed for the flight of stairs that has the minimum number of steps? **K. 611.** Is it possible to arrange the integers 1 to 50 in pairs such that the sums of the numbers in the pairs are all distinct primes? **K. 612.** Find all positive integers n for which $n+125$ and $n+201$ are perfect squares. **K. 613.** Two persons are playing the following game: they take turns in writing positive integers not greater than 10 on a blackboard. A number is not allowed if it is a factor of some number that has been written before. The player who is not able to write a new number on the board will lose the game. Which player has a winning strategy? (Proposed by *L. Loránt*)

New exercises for practice – competition C (see page 33): **Exercises up to grade 10: C. 1518.** How many 13-digit positive integers are there which contain only digits of 3, 6, 9, and in which the difference between every pair of consecutive digits is 3? **C. 1519.** The lengths of two sides of a triangle are 31 and 22. The medians drawn to these sides are perpendicular. How long is the third side? **Exercises for everyone: C. 1520.** Determine the last two digits of the number $2^{2019}+2019^2$. **C. 1521.** A circle of half the radius touches a circle of centre O from the inside at point E. A ray drawn from O intersects the large circle at P, and the other intersection with the small circle is R. Prove that the arcs $\widehat{EP}$ and $\widehat{ER}$ have the same length. **C. 1522.** The positive integers are arranged in three rows as follows:

1	4	7	10	13	16...
2	5	8	11	14	17...
3	6	9	12	15	18...

Prove that it is possible to select an infinite geometric sequence out of each row. **Exercises upwards of grade 11: C. 1523.** A convex quadrilateral is divided into triangles by its diagonals. Prove that if there are exactly three different values among the areas of the four triangles then the quadrilateral is a trapezium. **C. 1524.** Let N and M be positive integers, and let p and q denote different primes. Assume that $N+M$ is a five-digit number, N is divisible by p and the number of its divisors is q, while M is divisible by q and the number of its divisors is p. Determine all possible values of N and M.

New exercises – competition B (see page 34): **B. 4998.** A set of small plastic figures used as a visual aid in primary-school mathematics consists of 48 pieces. The figures can be classified according to four different attributes: their size may be large or small, they may have or not have a hole in the middle, their colour may be red, yellow, blue or green, and their shape may be circular, square or triangular. Every possible combination of the four properties (e.g. small, blue circular disc with a hole) occurs exactly once. How many pieces x are there in the set, such that there exists a piece y for which the two conditions below both hold? 1. If x is red or has no hole, then y is a small yellow square. 2. If y is small or blue, then x is a green triangle or some figure without a hole. (*4 points*) (Based on a calculus test problem for freshmen at ELTE, Budapest) **B. 4999.** The incentre of a triangle ABC is O, the points of tangency on the sides are A_1, B_1, C_1. The points of tangency of the excircles are A_2, B_2, C_2 as shown in the *figure*. Show that the area of one of the triangles OA_1A_2, OB_1B_2 and OC_1C_2 equals the sum of the areas of the other two triangles. (*3 points*) (Proposed by: *Sz. Kocsis,* Budapest) **B. 5000.** One of 4999 distinct given integers is 42. Prove that it is possible to select some numbers such that their sum is divisible by 5000. (*4 points*) **B. 5001.** The base of an isosceles triangle is a, its apex angle is smaller than 120°, and the altitude drawn to the base is m. Each vertex of the triangle is reflected in the line of the opposite side. The three reflections form a new isosceles triangle, with a base a' and an altitude m' drawn to the base. Show that $\frac{a'}{a}+\frac{m'}{m}=4$. (*3 points*) (Proposed by *P. Bártfai,* Budapest) **B. 5002.** The graph of the cubic polynomial x^3+ax^2+bx+c and the circle of radius 10 centred at the origin intersect at six distinct points P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6. Express the centre of mass of the system P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 in terms of the coefficients a, b, c. (*5 points*) **B. 5003.** Is it true that if five out of the midpoints of the six edges of a tetrahedron lie on the same sphere, then the sixth midpoint also lies on that sphere? (*5 points*) **B. 5004.** In a set of $2n$ consecutive integers, what is the maximum possible number of elements that are divisible by at least one of the numbers $n+1$, $n+2$, $\dots$, $2n$? (*6 points*) (Proposed by *S. Róka,* Nyíregyháza) **B. 5005.** The feet of the altitudes of an acute-angled triangle ABC drawn to the sides BC, CA, AB are D, E, F, respectively. The orthocentre of triangle ABC is M. Let k_1 denote the circle of diameter AB, and let k_2 be the circumscribed circle of triangle DEM. Let P be an interior point of the arc EM of k_2 that does not contain point D. Let line DP intersect circle k_1 again at point Q, and let the midpoint of line segment PQ be R. Show that lines AQ, MP, FR are concurrent. (*6 points*) (Proposed by *B. Bíró,* Eger)

New problems – competition A (see page 35): Our problem number **A. 738.** was appeared wrongly in December. The solution of the new problem can be accepted together with the January problems. **A. 738.** Consider the following sequence: $a_1=1$,

$a_2=2$, $a_3=3$, and $a_{n+3}=\frac{a_{n+1}^2+a_{n+2}^2-2}{a_n}$ for all integers $n\geqslant 1$. Prove that every term of the sequence is a positive integer. **A. 740.** A $k\times k$ array contains each of the numbers $1,2,\dots,m$ exactly once, with the remaining entries all zero. Suppose that all the row sums and column sums are equal. What is the smallest possible value of m if $k=3^n$ $(n\in\mathbb{N}^+)$? (Proposed by: *Attila Sztranyák* and *Péter Erben,* based on a problem of the 2017 Kalmár competition) **A. 741.** Let f be a function defined on the positive integers with $f(n)\geqslant 0$ and $f(n)\leqslant f(n+1)$ for all n. Prove that if $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^2}$ diverges, there exists a sequence $a_1,a_2,\dots$ such that the sequence $\frac{a_n}{n}$ hits every rational number, while $a_{n+m}\leqslant a_n+a_m+f(n+m)$ holds for every pair n,m. (Based on a problem of the Miklós Schweitzer competition) **A. 742.** Convex quadrilateral $ABCD$ is inscribed in circle Ω. Its sides AD and BC intersect at point E. Let M and N be the midpoints of the circle arcs AB and CD not containing the other vertices, and let I, J, K, L denote the incentres of triangles ABD, ABC, BCD, CDA, respectively. Suppose Ω intersects circles IJM and KLN for the second time at points $U\neq M$ and $V\neq N$. Show that the points E, U, and V are collinear.

Problems in Physics

(see page 58)

M. 383. Place a sand-glass on a slope, and measure how long it takes for the sand to run down through the hole of the sand-glass as a function of the angle of the slope.

G. 557. An aquarium with an open top has a shape of a square-based right prism. Its base and face walls are made of 1 cm thick glass sheet. The inner height of the aquarium is 20 cm, and each of its inner base edge is 30 cm long. The aquarium is filled with water. The water flows into the aquarium from a tap at a rate of 5 cm^3 per second. *a*) How long does it take to fill the half of the aquarium with water? *b*) What is the weight of the halfway filled aquarium? (The density of water is 1000 kg/m^3, and the density of glass is 2500 kg/m^3.) **G. 558.** Six forces are exerted on the same body at the same time: $F_1=1$ N, $F_2=2$ N, $F_3=3$ N, $F_4=4$ N, $F_5=5$ N and $F_6=6$ N. The forces are all in the same plane and the angles between two adjacent forces are 60° (i.e. the consecutive rotations of the forces are always 60° in the same direction). *a*) What is the vector sum of the six forces? *b*) How should the magnitude or maybe as well the direction of force F_2 be changed in order for the object to be in equilibrium? **G. 559.** We have two sets of Christmas lights, both rated at 50 W and 230 V. In one of the sets there are 50 bulbs, whilst in the other there are 100 bulbs connected in series. *a*) In which set is the current greater? *b*) In which set is the resistance of a bulb greater? *c*) Will the power of the set containing 100 bulbs increase or decrease if 10 of its bulbs are changed to ten bulbs from the other set? (Assume that none of the bulbs blow out.) **G. 560.** One end of an initially 2 m long horizontal elastic band is tied to a wall, and a snail is moving along it at a speed of 1 m/h. The snail starts from the wall, and the band is stretched by 1 m from the end of the band at the end of each hour. How much time elapses until the snail reaches the end of the band?

P. 5089. The frictionless trajectory shown in the figure consists of two circular arcs. A tiny object starts to slide from point A along the trajectory with a very small initial speed. How long does it take for the tiny object to reach the right end of the curved path (point B)? **P. 5090.** There is a cube-shaped box of mass m on a horizontal floor. A thin, uniform rod of also mass m is leant against one of the faces of the cube touching it at its centre. Initially both of the objects are fixed. The angle between the ground and the rod is $\alpha=45^\circ$. What is the initial acceleration of the box at which it starts to move when the objects are released? (Friction is negligible everywhere.) **P. 5091.** At STP the density of air is approximately 0.0013 g/cm^3, whilst the density of liquefied air is approximately 0.87 g/cm^3. *a*) Estimate the number of "air molecules" in 1 cm^3 air at STP and at its liquefied state. *b*) Estimate the mass of an "air molecule". **P. 5092.** An easily moveable piston of mass m and cross sectional area A is made of a material which poorly conducts heat. The piston divides a horizontal, fixed, and thermally insulated cylinder into two parts, having the same volume of V_0. There is the same amount of helium gas in the two parts, at the pressure of p_0. The piston is displaced a bit, and then released. What is the period of the resulting oscillation? **P. 5093.** In this problem, the experiment carried out on a space station in weightlessness is about a special "orbital speed" and "escape velocity". A charged sphere, made of some insulating material, has a radius $R = 10$ cm, and charge $Q = -10^{-7}$ C (uniformly distributed). We would like to know the orbital speed of an object of mass $m = 0.1$ g, and of charge $q = 2 \cdot 10^{-9}$ C when it is on a circular orbit 2 cm from the surface of the sphere; and we would also like to find the escape velocity of the same object, when it is launched from a point 2 cm from the surface of the sphere. **P. 5094.** Three point-like objects, each having mass of $m = 1$ g and charge of $Q = 3.1 \cdot 10^{-7}$ C, are attached to one of the ends of three insulating threads of length $L = 20$ cm (one to each thread). The other ends of the threads are fixed at a common point. Initially the threads were tight and the angle between the vertical and a thread was $\alpha = 30^\circ$, and the small objects were at the vertices of an equilateral triangle. Then the small objects were released at the same instant. *a*) What is the angle between the threads and the vertical when the objects have the greatest speed? *b*) What is the greatest speed of the objects? **P. 5095.** Two resistors of resistance values R_1 and R_2 are connected in series and their equivalent resistance is $R_1 + R_2$. Two other resistors of resistance R are connected in the circuit, one of them and R_1 are connected in parallel, whilst the other one and R_2 are connected in series. Is there a value of R such that the equivalent resistance of the whole circuit remains $R_1 + R_2$? **P. 5096.** A small, luminous, circular sheet of radius 2 mm is at a distance of 10 cm from the centre of a uniform, solid glass sphere of radius 4 cm. The plane of the circular sheet is perpendicular to the optical axis, i.e. to the line connecting the centres of the sphere and the circular sheet. Where is the image of the circular sheet formed by the glass sphere and what is the size of the image? (The refractive index of glass is 1.5, and only the rays which are nearly parallel to the optical axis play a role in the image formation.) **P. 5097.** There are three thin slits on an opaque sheet such that the distance between two adjacent slits is d. The width of the slit at the middle is $\sqrt{2}$ times bigger than that of the slits on the sides. A laser beam of wavelength λ is incident on the slits, and perpendicular to the sheet. The diffraction pattern is observed on a screen at a distance of L. What is the distance on the screen between the zero-order maximum and the first zero-intensity point? (Suppose that $\lambda \ll d \ll L$.) **P. 5098.** The broadening of spectral lines of stars have many different reasons, among them one is the rotation of the star. In the spectrum of a star the spectral line of hydrogen named Hδ (belonging to the Balmer series) has a wavelength of 410.174 nm measured under laboratory circumstances, and is observed to be broadened in the interval between 410.171 nm and 410.177 nm. *a*) What is the period of the rotation of the star about its axis, if its diameter is $1.4 \cdot 10^9$ m? Suppose that the axis of rotation is perpendicular to the direction from which the star is observed, and that the broadening is mainly due to the rotation of the star. *b*) What could we deduce about the motion of the star, if the wavelength of the broadened spectral line was observed to be in the interval of 410.176 nm and 410.182 nm? **P. 5099.** A roller coaster car is moving along a vertical circular loop such that it uses its own engine and brakes to keep its speed constant. What should its least speed be in order that it follows the circular loop of radius R without slipping, if the coefficient of static friction is μ? Where would it slip if its speed was a bit smaller than this value? The car is small enough compared to the radius of the loop.