Összefoglalva a mérés eredményét megállapíthatjuk, hogy az adott (viszonylag nagy méretű) tojás tehetetlenségi nyomatéka a szimmetriatengelyére vonatkoztatva:

$$\Theta_{\text{tojás}} = (1{,}9 \pm 0{,}1) \cdot 10^{-5}\ \mathrm{kg\,m^2}.$$

A becsült hiba nagyságát azért adtuk meg a statisztikus bizonytalanság kb. kétszereseként, mert a statisztikus hiba mellett a mért mennyiségek (időtartamok, távolságok, a tömeg mérésének leolvasási hibája és a szisztematikus hibák, pl. a tengelysúrlódás és a légellenállás), továbbá emberi tényezők (reakcióidő, tévedések) is felléphetnek.

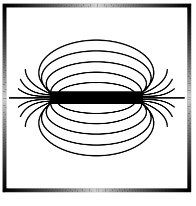
Összehasonlítás egy elméleti értékkel: Ha feltételezzük, hogy a főtt tojás homogén anyageloszlású, tömör test, amelynek az alakja R, R és a féltengelyű forgásellipszoiddal közelíthető, akkor a tehetetlenségi nyomatéka

$$\Theta_{\text{elméleti}} = \frac{2}{5}MR^2 = 1{,}85 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{kg\,m^2}.$$

Ennek az elméleti becslésnek is van (az M és R mennyiségek mérési pontatlansága miatt) hibája, ez kb. 1%-os lehet. Ezt növeli még a tojás alakjára és a tömegeloszlására tett feltevésünk bizonytalansága. Összahasonlítva a *mért* és a *számított* tehetetlenségi nyomatékokat megállapíthatjuk, hogy azok a mérési hibahatáron belül megegyeznek, ez a feltevéseink jogosságát támasztja alá.

Varga Áron (Keszthelyi Vajda János Gimn., 10. évf.)

18 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott Csépányi István, Kondákor Márk, Kozák Áron, Morvai Orsolya, Olosz Adél, Pácsonyi Péter és Varga Áron megoldása. Kicsit hiányos (4–5 pont) 3, hiányos (1–3 pont) 5, hibás 1, nem versenyszerű 2, nem értékelhető 1 dolgozat.



Fizika feladatok megoldása

P. 5025. *Torricelli-kísérletet végzünk egy vastag falú üvegcsővel. A cső belső keresztmetszete* 1 cm^2*, a külső keresztmetszete* 3 cm^2*. A cső tömege* 624 g*, és* 2 cm *mélyen nyúlik a higanyba.*

Mekkora erővel kell tartani a csövet ilyenkor?

(*4 pont*) Közli: *Werner Bence Tamás,* Budapest

Megoldás. A jelöléseket a (nem méretarányos) *ábrán* tüntettük fel.

Az ismert adatok:

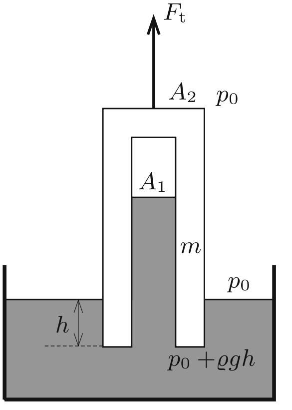
$m = 624\ \mathrm{g} = 0{,}624\ \mathrm{kg}$;
$A_1 = 1\ \mathrm{cm^2} = 1 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m^2}$;
$A_2 = 3\ \mathrm{cm^2} = 3 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m^2}$;

$p_0 = 101\ \mathrm{kPa} = 1{,}01 \cdot 10^5\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$;

$\varrho = 13\,600\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$;

$h = 2\ \mathrm{cm} = 2 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}$;

$g = 9{,}81\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}$.



Az üvegcsőre függőlegesen lefelé a nehézségi erő és a p_0 légnyomás által az A_2 felületre kifejtett erő hat. A csőre függőlegesen felfelé ható erők: az általunk kifejtett F_t tartóerő, valamint az $A_2 - A_1$ felületen a higany felszíne alatt h mélységben fellépő nyomásnak megfelelő erő. Ezek az erők kiegyenlítik egymást:

$$\sum F = -(mg + p_0 A_2) + F_\mathrm{t} + (p_0 + \varrho g h)(A_2 - A_1) = 0,$$

ahonnan a keresett tartóerő:

$$F_\mathrm{t} = mg + p_0 A_2 - (p_0 + \varrho g h)(A_2 - A_1) =$$

$$= \left(0{,}624\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}\right) + \left(1{,}01 \cdot 10^5\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}\right) \cdot (3 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}^2) -$$

$$- \left[\left(1{,}01 \cdot 10^5\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}\right) + \left(13\,600\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right) \cdot \left(9{,}81\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}\right) \cdot (2 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m})\right] \cdot (2 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}^2) =$$

$$= 6{,}1\ \mathrm{N} + 30{,}3\ \mathrm{N} - 20{,}7\ \mathrm{N} = 15{,}7\ \mathrm{N}.$$

Rusvai Miklós (Jászberény, Lehel Vezér Gimn., 10. évf.)
dolgozata alapján

35 dolgozat érkezett. Helyes Guba Zoltán, Kozák András, Mamuzsics Gergő Bence, Molnár Mátyás, Olosz Adél, Rusvai Miklós, Sal Dávid és Vígh Márton megoldása. Kicsit hiányos (3 pont) 5, hiányos (1–2 pont) 20, hibás 2 dolgozat.

P. 5045. *A Holdon egy szabadon eső test teljes esési magassága n-szer nagyobb, mint az utolsó másodpercben megtett útja. Határozzuk meg az esés magasságát és az esés idejét!*

(*4 pont*) *Faragó Andor* (1877–1944) feladata nyomán

Megoldás. Legyen az esés teljes ideje t, az utolsó $t_0 = 1$ másodpercben megtett út pedig h. A test nh magasságból

$$g_H = \frac{1}{6} g_{\mathrm{Föld}} \approx 1{,}6\ \mathrm{m/s}^2$$

gyorsulással mozogva ér a Hold felszínére, fennáll tehát

$$nh = \frac{1}{2} g_H t^2. \tag{1}$$

Az nh magasságból h magasságig $t-t_0$ idő alatt $(n-1)h$ utat tesz meg a test, így

$$(n-1)h=\frac{1}{2}g_H(t-t_0)^2. \tag{2}$$

A (2) egyenletet (1)-gyel elosztva kapjuk, hogy

$$\frac{n-1}{n}=\left(\frac{t-t_0}{t}\right)^2=\left(1-\frac{t_0}{t}\right)^2, \quad \text{ahonnan} \quad \frac{t_0}{t}=1-\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}},$$

azaz

$$t=t_0\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}=\sqrt{n}\big(\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\,\big)t_0=\big(n+\sqrt{n(n-1)}\,\big)\cdot(1\ \mathrm{s})$$

következik. Ezt (1)-be helyettesítve az esés teljes magasságára az

$$nh=\frac{1}{2}g_Ht_0^2\big(n+\sqrt{n(n-1)}\,\big)^2\approx\big(n+\sqrt{n(n-1)}\,\big)^2\cdot(0{,}8\ \mathrm{m})$$

eredmény adódik.

Bokor Endre (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn.)

102 dolgozat érkezett. Helyes 20 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 33, hiányos (1–2 pont) 41, hibás 8 dolgozat.

P. 5054. *Egy M nyugalmi tömegű, kezdetben álló atommag képes elnyelni egy hf energiájú γ-fotont. Határozzuk meg, hogy mekkora az atommag gerjesztési energiája (vagyis a nyugalmi energiájának növekedése) ebben a folyamatban!*

(*5 pont*) Közli: *Légrádi Imre,* Sopron

Megoldás. Alkalmazzuk a folyamatra a relativisztikus energia- és lendület-megmaradás törvényét! A γ-foton energiája és lendülete:

$$E_{\text{foton}}=hf, \qquad I_{\text{foton}}=\frac{hf}{c}.$$

A kezdetben álló, M nyugalmi tömegű atommagra

$$E_{\text{atommag}}=Mc^2, \qquad I_{\text{atommag}}=0.$$

A foton elnyelése során az atommag meglökődik, energiája

$$E'_{\text{atommag}}=Mc^2+hf,$$

lendülete

$$I'_{\text{atommag}}=\frac{hf}{c},$$

nyugalmi tömege pedig $M'>M$ lesz. Mivel a relativisztikus energia, lendület és a nyugalmi tömeg között fennáll az

$$E'_{\text{atommag}}=\sqrt{(M'c^2)^2+(I'_{\text{atommag}}c)^2}$$

összefüggés, a megváltozott nyugalmi tömeg

$$M' = M\sqrt{1+\frac{2hf}{Mc^2}},$$

az atommag nyugalmi energiájának növekedése pedig (ezt nevezhetjük az atommag gerjesztési energiájának)

$$\Delta E = (M'-M)c^2 = Mc^2\left(\sqrt{1+\frac{2hf}{Mc^2}}-1\right).$$

Fülöp Sámuel Sihombing (Pécsi Leőwey Klára Gimn., 11. évf.)
dolgozata alapján

Megjegyzés. Amennyiben $hf \ll Mc^2$, a gerjesztési energia a kicsiny ε-ra érvényes

$$\sqrt{1+\varepsilon} \approx 1+\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon^2}{8}$$

közelítő képlet alapján

$$\Delta E \approx hf - \frac{(hf)^2}{2Mc^2}.$$

Az első tag egy mindvégig mozdulatlan atommag által elnyelt foton energiájának felel meg. A második tag azt veszi figyelembe, hogy a foton hf/c lendületét az atommag veszi át, az tehát kb. $v = hf/Mc$ sebességgel meglökődik. Ekkora sebességű, M tömegű test (nemrelativisztikusan számolt) $Mv^2/2$ mozgási energiáját is a fotonnak kell fedeznie, a mag gerjesztésére tehát hf-nél ennyivel kevesebb energia jut.

11 dolgozat érkezett. Helyes 8 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 2, hiányos (1 pont) 1 dolgozat.

P. 5066. *Egy átlátszó közegben z irányban változik az optikai törésmutató. Erre merőlegesen, az x tengely irányában vékony fénysugarat indítunk, amely a közegben a pozitív z irányba eltérülve parabolaív mentén halad. A törésmutató értéke $z=0$-nál n_0, míg $z=h$-nál $\sqrt{2}\,n_0$. Hogyan függ a törésmutató z-től?*

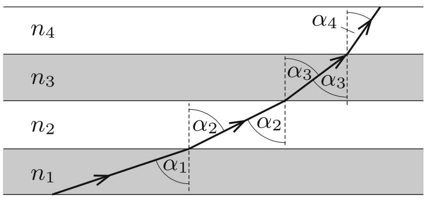
(*6 pont*) Közli: *Vigh Máté,* Budapest

I. megoldás. Ha képzeletben vékony, egyre növekvő törésmutatójú átlátszó plánparalel (két párhuzamos síkkal határolt) lemezeket helyezünk egymásra, és rajtuk keresztül egy vékony fénysugár halad (*1. ábra*), akkor a Snelius–Descartes-törvény szerint

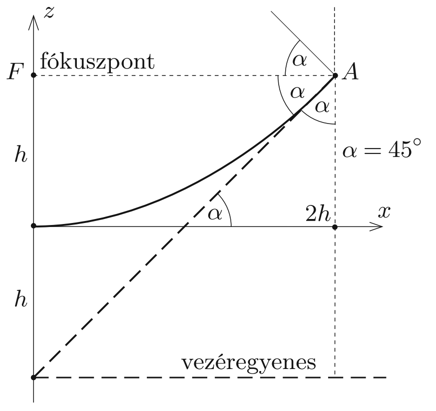
$$\frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1}=\frac{n_1}{n_2},\qquad \frac{\sin\alpha_3}{\sin\alpha_2}=\frac{n_2}{n_3},\qquad \frac{\sin\alpha_4}{\sin\alpha_3}=\frac{n_3}{n_4}\,\ldots,$$

azaz

$$n_1\sin\alpha_1 = n_2\sin\alpha_2 = n_3\sin\alpha_3 = \ldots = \text{állandó}, \tag{1}$$



1. ábra



2. ábra

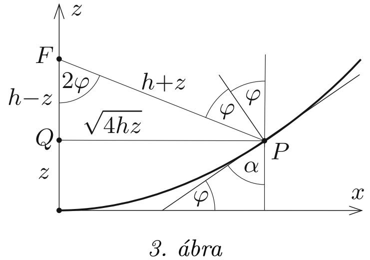
tehát a beesési szög szinusza és az abszolút törésmutató szorzata a helytől függetlenül állandó. A folyamatosan változó törésmutatójú közegre is érvényes ez az összefüggés, hiszen a közeget tekinthetjük úgy, mintha vékony plánparalel lemezekből épülne fel.

Helyezzük a koordináta-rendszer origóját a fénysugár kiindulási pontjához. A feladat szövege szerint a z tengely irányára merőlegesen, az x tengely irányában indítjuk a vékony fénysugarat (*2. ábra*). Az origóban (a parabola csúcspontjában) a beesési szög 90°-os, így az (1)-ben szereplő állandó n_0. A törésmutató egy tetszőleges z koordinátával megadott P pontban

$$n(z) = \frac{n_0}{\sin \alpha(z)},$$

ahol $\alpha(z)$ a parabola P pontbeli érintőjének a z tengellyel bezárt szöge (vagyis az elgörbülő fénysugár ottani „beesési szöge"). Azt is tudjuk, hogy $z = h$-nál a törésmutató $\sqrt{2}n_0$, vagyis ezen a helyen $\sin \alpha(h) = 1/\sqrt{2}$, tehát $\alpha(h) = 45°$.

A parabola ismert tulajdonsága, hogy az érintője felezi azt a szöget, amelyet az érintési pontból a vezéregyenesre emelt merőleges és az érintési pontból a fókusz felé indított félegyenes bezár (lásd pl. *Reiman István Matematika,* Typotex (2014), `https://www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/2011-0001-526_reimann_matematika/ch17s04.html`). (A parabola ezen tulajdonsága tesz lehetővé számos műszaki alkalmazást, pl. a parabolatükrök, fényszórók és antennák működését.)



3. ábra

Alkalmazzuk az érintő irányára vonatkozó ismeretet a parabola $z = h$ „magasan" lévő A pontjára, ebből megkapjuk, hogy az F fókuszpont, valamint a vezéregyenes a csúcsponttól h távolságra van, és a parabola egyenlete:

$$(2) \qquad z(x) = \frac{x^2}{4h}, \qquad \text{azaz} \qquad x(z) = \sqrt{4hz}\,.$$

Határozzuk meg a fénysugár parabola pályájának tetszőleges P pontjában az érintő és az x tengely $\varphi = 90° - \alpha$ szögét (*3. ábra*), majd annak ismeretében olvassuk le a törésmutató $n(z)$ függvényének alakját. A P pont az x tengelytől z, a vezéregyenestól $h + z$ távol van, így a fókuszponttól mért távolsága is $h + z$. Másrészt $FQ = h - z$, tehát

$$\cos(2\varphi) = \frac{h-z}{h+z}, \quad \text{így} \quad \cos\varphi = \sqrt{\frac{1+\cos(2\varphi)}{2}} = \sqrt{\frac{h}{h+z}},$$

a keresett törésmutató pedig

$$n(z) = \frac{n_0}{\sin\alpha(z)} = \frac{n_0}{\cos\varphi(z)} = n_0\sqrt{1+\frac{z}{h}}.$$

Markó Gábor (Győr, Révai Miklós Gimn., 12. évf.)

II. megoldás. A fény terjedését változó törésmutatójú közegben nemcsak a sok-sok vékony rétegre felírt Snelius–Descartes-törvénnyel, hanem a *Fermat-elv* segítségével is le lehet írni. Ez utóbbi azt állítja, hogy helyről helyre változó $n(\boldsymbol{r})$ törésmutató esetén egy vékony fénysugár „mozgása" olyan pálya mentén megy végbe, amelyre az adott kezdő- és végpont közötti terjedés ideje, vagyis a

$$T = \frac{1}{c}\int n(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}s$$

integrál értéke a lehető legkisebb. (Az integrálás a pályagörbe s-sel jelölt ívhossza szerint történik.)

A szokásos kérdésfeltevés az, hogy adott módon változó törésmutatóhoz milyen „fénypályagörbe" tartozik. Jelen esetben azonban a megfordított kérdésre keressük a választ: Milyen módon változó törésmutató eredményez egy megadott pálya (parabolaív) mentén történő fényterjedést?

Hasonló minimumelv a klasszikus mechanikai mozgásokra is megfogalmazható (lásd pl. Solt György: *Variációs elvek a klasszikus és kvantumfizikában* c. cikket lapunk 558. oldalán. – a Szerk.). A Maupertuis-elv szerint egy adott összenergiájú, pontszerű test a tér két adott pontja között olyan pályán mozog, amelyre a

$$W = \int v(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}s$$

integrál minimális, ahol $v(\boldsymbol{r})$ a test sebességének – általában helyről helyre változó – nagysága. Ebben az esetben is az a szokásos kérdés, hogy adott módon változó (például az energiamegmaradás tételéből kiszámítható) sebességnagyság esetén milyen a pályagörbe alakja, de itt is feltehető a megfordított kérdés: Milyen módon változzon a test sebességének nagysága, hogy a mozgás pályagörbéje adott alakú (mondjuk parabolaív) legyen? Természetes módon kínálkozik az a gondolat, hogy a Fermat-elv és a Maupertuis-elv közötti hasonlóságot kihasználjuk. Ha ismerjük az egyik (a mechanikai) probléma megoldását, abból következtethetünk a másik (az optikai) feladat megoldására. Jelen esetben az x tengely mentén elinduló és csak a z koordinátától függő $n(z)$ törésmutatójú közegben haladó fénysugárnak egy olyan mechanikai mozgás felel meg, amelyben a kezdősebesség (egy alkalmasan választott koordináta-rendszerben) vízszintes irányú, és a sebesség nagysága csak a másik koordinátától (z-től) függ (tehát a test függőleges irányú erőtérben mozog). Tudjuk, hogy a mozgás pályagörbéje akkor lesz parabola, ha az erőtér homogén, vagyis a vízszintes hajítás jól ismert esetével van dolgunk.

Egy v_0 kezdősebességgel eldobott test sebességének nagysága (függőlegesen lefelé irányított z tengely mellett) $v(z)=\sqrt{v_0^2+2gz}$. Az analóg optikai feladat megoldása eszerint $n(z)=c_1\sqrt{1+c_2z}$, ahol c_1 és c_2 alkalmasan választott állandók. Mivel ismerjük, hogy $n(0)=n_0$ és $n(h)=\sqrt{2}n_0$, ezekből $c_1=n_0$ és $c_2=1/h$ következik, vagyis a törésmutató z-függése:

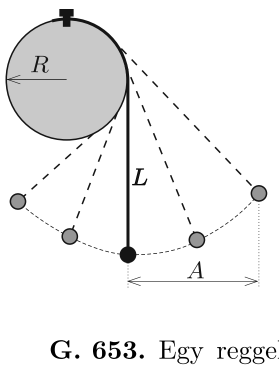
$$n(z)=n_0\sqrt{1+\frac{z}{h}}\,.$$

Elek Péter (Debreceni Ref. Koll. Dóczy Gimn., 12. évf.)
dolgozata alapján

14 dolgozat érkezett. Helyes 12 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 2 dolgozat.

Fizikából kitűzött feladatok

M. 382. Egy vékony, hajlékony, nyújthatatlannak tekinthető fonál egyik végét egy R sugarú, vízszintes tengelyű, rögzített henger „tetejéhez” erősítjük, a másik végére pedig egy kis méretű testet akasztunk. Egyensúlyi állapotban a fonál függőleges darabja $L=3R$ hosszúságú. A testet az *ábrán* látható módon kitérítjük, majd magára hagyjuk. A test mozgásának periódusideje – viszonylag nagy kezdeti kitérésnél – függ az A „amplitúdótól”. Mérjük meg néhány különböző A esetén, hogy hány százalékkal tér el ezen inga (ún. evolvens-inga) $T(A)$ lengésideje az L hosszúságú fonálinga $T_0=2\pi\sqrt{L/g}$ lengésidejétől!



(*6 pont*) *Christiaan Huygens* (1629–1695) nyomán

G. 653. Egy reggel a mozdonyszínből két mozdony indul el ugyanabba az irányba. Az első dízelmozdony, amelynek sebessége 90 km/h, a második pedig villanymozdony, ami másfél perccel később indul 20 m/s sebességgel. A dízelmozdony 10 perccel a kifutása után találkozik a szomszédos sínen szembejövő gyorsvonattal. Mekkora a gyorsvonat sebessége, ha ezután másfél perccel találkozik a villanymozdonnyal?

(*3 pont*)