Variációs elvek a klasszikus és a kvantumfizikában

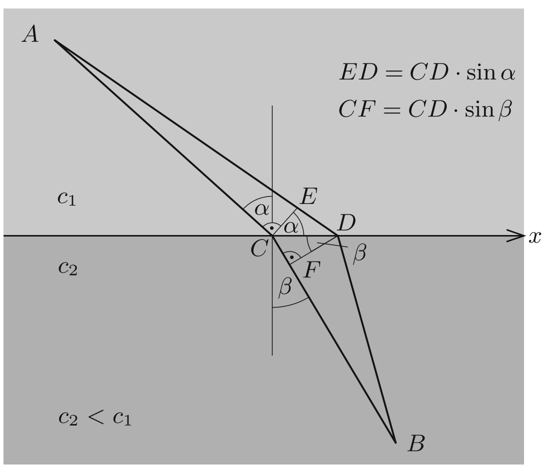
A klasszikus fizika variációs elvei

Az írás I. része a klasszikus mechanika legkisebb hatás (Hamilton-) elvét és egyszerű alkalmazását mutatta be.[1] Az elv idővel a klasszikus fizika más területein (az elektrodinamikában, a relativisztikus mechanikában, a térelméletekben) is alkalmazásra talált, az S hatásfüggvényben szereplő Lagrange-függvény természetesen az adott témakörnek megfelelő dinamikai változókból (például elektromos és mágneses térerősségekből) épül fel. A hatáselvek erőssége, hogy a fizikai probléma megoldásának útját „egyetlen sorban", az S hatásfüggvény felírásával kijelölik. Az elmélet (variációszámítást alkalmazó) részletes kifejtése ezután megadja azokat az összefüggéseket az x_i koordináták és a v_i sebességek között, melyek biztosítják az

$$S = \int L(x_1, v_1 \ldots)\, \mathrm{d}t$$

függvény stacionárius értékét. Ezek az egyenletek (melyek a mechanikában a newtoni fizika egyenletei) már meghatározzák a keresett $x_i(t)$ függvényeket.

De legkisebb hatást, legrövidebb utat vagy időt követelő intuitív variációs elvek már *Euler* (1744) és *Lagrange* (1760) variációszámítása előtt is voltak. A síktükrön való visszaverődés törvényét például *Alexandriai Héron* (i.sz. 10–75) például a „legrövidebb út" elvével indokolta [1].



1. ábra. A Fermat-féle legrövidebb idő elvéből következik a fénytörés Snellius–Descartes-törvénye (a részleteket lásd a cikk szövegében)

[1] Megjelent a KöMaL 2018. évi novemberi számában.

A legrövidebb idő elve

A modern kor első variációs elve, melyről a továbbiakban részletesebben lesz szó, *P. Fermat* (1601–1665) francia matematikustól származik, akinek meggyőződése volt, hogy *„a természet mindig a legrövidebb és legegyszerűbb utakat választja”*. Utakon itt általánosan „utak-módok” értendők, de a fényterjedés esetén Fermat valódi útra gondolt, amikor 1662-ben kimondta: *„A fénysugár azt az utat választja, melynek befutásához a legrövidebb időre van szüksége.”*

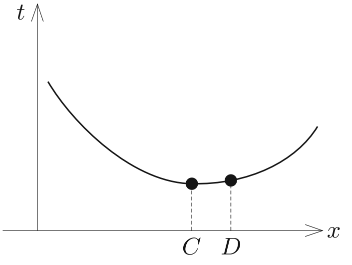
Az *1. ábrán* látható elrendezésben a fény egy „optikailag ritka” közeg A pontjából c_1 sebességgel terjedve egy „optikailag sűrűbb” közegbe hatol, ahol a sebessége $c_2 < c_1$, így jut el a B pontba. A *Fermat-elv* szerint a határfelület C pontjának helyzetét (és ezzel az α beesési szöget, valamint a β törési szöget) az határozza meg, hogy az AB úton eltöltött

$$t = \frac{AC}{c_1} + \frac{CB}{c_2}$$

idő minden más úthoz tartozó időhöz képest a legrövidebb (*2. ábra*). Fermat megmutatta, hogy C ilyen választásakor fennáll a

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c_1}{c_2}$$

összefüggés, ami éppen a Snellius–Descartes-törvény, és ezzel megadta ennek a törvénynek első – fizikailag helyes – magyarázatát [1].



2. ábra. A fény terjedési ideje a határfelületen lévő fénytörési pont helyzetének függvényében

Megfordítva, a Snellius–Descartes-törvényből következik, hogy a t idő a C pont helyzetének függvényében *stacionárius* (ahogy minimum esetén lennie kell). Ez azt jelenti, hogy egy ACB-hez nagyon közeli ADB úton a nagyon kicsi CD távolság első rendjében (első hatványával arányos mértékben) a t idő *nem* változik. Az ED szakasz ugyan ED/c_1 többletidőt igényel, de a CF út kihagyásával nyert CF/c_2 idő ezt éppen kompenzálja. Valóban, az 1. ábrán láthatóan

$$\frac{ED}{CF} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta},$$

ezt c_2/c_1-gyel szorozva a Snellius–Descartes-törvényből $ED/c_1 = CF/c_2$ következik. (Megfontolásunk során kihasználtuk, hogy kicsiny CD esetén $AC \approx AE$ és $BF \approx BD$. A közelítés CD magasabb hatványainak elhanyagolása mellett jogos.)

Ha a fény c sebessége útszakaszonként változik, a teljes út befutásához szükséges

$$t = \sum \frac{\Delta s_i}{c_i}$$

idő, folytonosan változó c esetén pedig az

$$\int \frac{\mathrm{d}s}{c}$$

idő lesz minimális.

Miért működik a Fermat-elv?

A fény hullámtermészete fizikai magyarázatot ad a Fermat által megválaszolatlanul hagyott „hogyan" kérdésre is, arra, hogyan találja meg a fénysugár A és B között a legrövidebb időre vezető C határpontot. Fermat még nem ismerhette a fényterjedés hullámelméletét, aminek első megfogalmazását *C. Huygens* (1629–1695) holland fizikus, matematikus és csillagász írta le 1678-ban, és amelyet *A-J. Fresnel* (1788–1827) francia fizikus fejlesztett tovább 1816-ban.

Az A-ból kiinduló fényhullámok (elektromágneses rezgések) valójában az egész határfelületre érkeznek és terjednek tovább B felé, de az úton eltöltött időtől függően különböző rezgési fázisban (ezáltal különböző amplitúdóval) jutnak el B-be. Mivel a C ponton átmenő sugár esetén a repülés idő stacionárius, a C közvetlen környezetéből B-be érkező hullámok fázisa (és amplitúdója) alig különbözik, ezek egymást erősítő konstruktív interferenciája nagy amplitúdót (ezáltal nagy intenzitást) eredményez. Ugyanakkor a C-től (több hullámhossznyival) távolabbi határpontokból jövő hullámok nagyon különböző fázisban érkeznek B-be, kioltják egymást, és B-ben csak a C-felől jövő fénysugár lesz látható.

Hatáselvek a mechanikában

A mechanikában az első minimumelvnek felfedezője, *P. L. M. Maupertuis* (1698–1759) francia fizikus, matematikus, filozófus a „legkisebb hatás" nevet adta (1744). Maupertuis szerint *„ha a Természetben valami változás történik, a felhasznált hatás a lehető legkisebb marad".* Pontosabban: az anyagi pont, ha teljes energiája megmarad, olyan pályán mozog, hogy (a pálya egyes szakaszait Δs_i-vel jelölve) az mv impulzus „hatása", a

$$W = \sum mv_i \, \Delta s_i$$

összeg ($\int mv \, \mathrm{d}s$ integrál) értéke a lehető legkisebb marad. A pontos bizonyítás L. Eulerre maradt, aki megmutatta, hogy ez a feltétel valóban kijelöli a pálya (például a Nap gravitációs terében keringő bolygóknál az ellipszis) alakját. (A koordináták időfüggése azonban további számításokat igényel.)

Fermat és Maupertuis a minimumelveket intuitív módon a természet egyszerűségre törekvésével, tehát inkább „morális", mint fizikai érveléssel indokolták. Fermat ezt elegendőnek érezte, de Maupertuis a „szép, egyszerű" variációs elvekben metafizikai cél megvalósulását látta: *„Ezek talán az egyedüli törvények, melyeket a dolgok teremtője alkotott, azért, hogy létrehozza látható világunk valamennyi jelenségét."* Ugyanakkor a kortárs Lagrange a saját „modern" legkisebb hatás elve és a newtoni mechanika ekvivalenciájának tudatában a tényeknél maradt: *„Az elvet, melynek kissé pontatlanul a Legkisebb Hatás nevet adtam, nem tekintem metafizikai principiumnak, hanem a mechanika törvényeiből következő egyszerű és általános eredménynek."* (A „pontatlanul" arra utal, hogy a hatásfüggvény stacionárius, de nem feltétlenül minimális értékéről van szó.)

Pálya helyett kvantummechanikai valószínűség

Áttérve a kvantumfizikára, a mikrorészecskék a kvantummechanika jól ismert „határozatlansági relációja" miatt nem jól meghatározott pályán mozognak, hiszen egy adott pillanatban a részecske $x(t)$ helye csak bizonyos valószínűséggel ismerhető meg. A helykoordinátát és annak változását a hullámfüggvény, a $\psi(x,t)$ (komplex) valószínűségi amplitúdó jellemzi, és $\left|\psi(x,t)\right|^2$ adja meg annak valószínűségét (pontosabban valószínűségi sűrűségfüggvényét), hogy a t időpontban a mérés a részecskét az x helyen találja. A részecske mozgásakor a $\psi(x,0)$ kezdeti ($t=0$ pillanatbeli) hullámfüggvény t idő alatt $\psi(x,t)$-re változik. A változás leírásához, tehát a ψ hullámfüggvény időfüggésének számításához az $A(0,x';t,x)$ „időfejlesztő függvényt" kell ismernünk, ez transzformálja a $\psi(x,0)$ hullámfüggvényből a t idővel későbbi $\psi(x,t)$-t. (Az A függvényben x' a kezdeti állapot egy tetszőleges helykoordinátája, mert ez, ahogyan az x koordináta is, valószínűségi változó.)

A hatásfüggvény megjelenik a kvantummechanikában

R. P. Feynman (1918–1988) Nobel-díjas amerikai fizikus 1948-ban látta meg azt a pontos összefüggést, amely a ψ függvény időbeli változása és a klasszikus mechanika legkisebb hatás elve között fennáll. Felismerte, hogy a $\psi(x,0)$-ból $\psi(x,t)$-t generáló $A(0,x';t,x)$ egységnyi abszolút értékű „amplitúdók" összege, melyek egyedül az $S_{\mathcal{P}}/h$ kifejezés periodikus függvényei. Itt $S_{\mathcal{P}}$ az a klasszikus mechanikai hatásfüggvény, amely valamilyen x'-ből x-be vezető, t ideig tartó tetszőleges, $\mathcal{P}$-vel jelölt úthoz tartozik, h pedig a kvantumfizikai hatáskvantum (Planck-állandó).[2]

Célunk eléréséhez tehát „csak" összegezni kell az $A(\mathcal{P})$ részamplitúdókat minden elképzelhető x'-ből x-be vezető (akármilyen hosszú, kanyargós vagy törtvonalú) út tekintetbe vételével. Az összegzendő utak száma azonban (nem megszámlálhatóan) végtelen, az összegzés valójában végtelen dimenziós integrálás. A megoldáshoz a fizikában mindaddig ismeretlen matematikai eljárást kellett találni, Feynman ezért dolgozta ki saját „útintegrálás" (más néven pályaintegrálás) módszerét. (A matematikusok már korábban foglalkoztak ilyen típusú feladatokkal, de Feynman intuitív formuláinak szigorú matematikai megalapozása még a legutóbbi időkben is aktuális kutatási téma volt.)

A legkisebb hatás elve Feynman kvantummechanikájában

Az $A(0,x';x,t)$ függvényt meghatározó összegben minden elképzelhető út, minden lehetséges „történet" szerepel, de nem mindegyik ad jelentős járulékot. Minél nagyobb $S_{\mathcal{P}}/h$, annál érzékenyebben változik az oszcilláló, periodikus $A_{\mathcal{P}}(S_{\mathcal{P}}/h)$ amplitúdó $S_{\mathcal{P}}$ változásakor, ezért még egymáshoz nagyon közeli utakhoz tartozó amplitúdók is általában nagyon különbözők (hiszen a h Planck-állandó már egy néhány cm-nyi utat megtevő elektronnyaláb hatásfüggvényéhez képest is nagyon kicsi), így az interferenciájuk eredménye várhatóan nulla. Csak akkor más a helyzet, ha az $S_{\mathcal{P}}$ hatásfüggvények éppen a stacionárius érték közelében vannak, mert ekkor $S_{\mathcal{P}}/h$, és vele $A_{\mathcal{P}}$ ezeken az utakon közelítőleg állandó, emiatt az amplitúdók egymást erősítve interferálnak. A lényeges utak tehát éppen azok, melyeken

[2] A gondolatmenet a periodikusan változó amplitúdókkal *P. A. M. Dirac* angol fizikus egy korábbi munkájában már szerepel, de ott egy „klasszikus hatásfüggvénnyel analóg" F mennyiségről és ennek stacionárius értékéről van szó. Feynman felismerése, hogy F *azonos* a hatásfüggvénnyel.

a klasszikus Hamilton-elvnek megfelelően S értéke közel stacionárius. (Az érvelés láthatóan ugyanaz, mint a Fermat-elv esetében.)

A Hamilton-elv ily módon a kvantumfizikában is „működik”, csak itt nem az egyetlen megvalósuló tér-idő pályát jelöli ki, hanem a $\psi(x,t)$ hullámfüggvény változását meghatározva valószínűségeket ad meg. Például annak valószínűségét, hogy az A pontból kibocsátott részecske t idővel később valamely B pontban éri el a detektort. Határesetben, a makroszkopikus méretekhez közeledve $S_{\mathcal{P}}/h$ annyira megnövekszik, hogy konstruktívan interferáló amplitúdókat már csak olyan utak adnak, amelyek gyakorlatilag egybeesnek a klasszikus hatáselv egyetlen pályájával; ez már átmenet a klasszikus mechanika területére.

Feynman útintegrálja természetesen csak egy a kvantummechanika módszerei között, technikai eszköz, amelyik esetenként előnyösen alkalmazható a részecskefizika területén. Ezen túl azonban a „hagyományos” kvantumfizika szemléletes, újszerű megfogalmazása is, amelyben a legkisebb hatás elve, a koordináták választásától független hatásfüggvény stacionárius értéke ugyanolyan meghatározó szerepű, mint Lagrange és Hamilton klasszikus mechanikájában.

Irodalom

[1] Simonyi Károly: *A fizika kultúrtörténete, a kezdetektől a huszadik század végéig* (Ötödik, javított, bővített kiadás). Akadémiai Kiadó, Budapest 2011.

Solt György
Svájc, Zug

Mérési feladat megoldása

M. 380. *Mérjük meg egy főtt tojás tehetetlenségi nyomatékát a szimmetriatengelyére vonatkozólag!*

(*6 pont*) Közli: *Simon Péter,* Pécs

Megoldás. *Eszközök:* főtt tojás, tolómérő, stopper, mérőszalag, hústű, állványok, vékony fonál, ragasztószalag, a tojásnál kisebb tömegű súly.

A mérés mente: A tojás hosszanti tengelyén keresztülszúrtam a hústűt. A hústű végeit egy-egy állványra rögzítettem, figyelve arra, hogy a tű vízszintes legyen. A tojásra a közepénél ragasztószalaggal rögzítettem a fonalat, aminek a végére kötöttem a súlyt. A fonalat feltekertem a tojásra (végén a súllyal) majd egy bizonyos h magasságból elengedtem a súlyt, és mértem a leérkezésének t idejét.

Három magasságból indítottam a mozgást és mindegyiknél háromszor mértem az időket. Ezen időtartamok átlagából kiszámítottam a mozgás átlagsebességét, majd a tojás sugarának (R) ismeretében a meghatároztam a tojás tehetetlenségi nyomatékát.