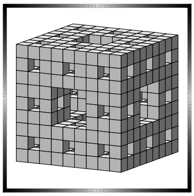


A B pontversenyben kitűzött feladatok (4990–4997.)

B. 4990. Legyen n egynél nagyobb természetes szám. Jelölje n pozitív osztóinak számát $d(n)$, összegét pedig $\sigma(n)$. Mutassuk meg, hogy

$$\sigma(n) > d(n)\sqrt{n}\,.$$

(*3 pont*) Javasolta: *Sárosdi Zsombor* (Veresegyház)

B. 4991. Artúr és Blanka egy kocka éleit felváltva pirosra festik úgy, hogy minden lépésben olyan élt színeznek ki, amely kitérő az utolsó lépésben kifestett élhez. A színezést Artúr kezdi. Az veszít, aki nem tud lépni. Kinek van nyerő stratégiája?

(*3 pont*)

B. 4992. Az $1,2,\ldots,n$ számok mindegyikét pirosra vagy kékre színezzük. Egy lépés azt jelenti, hogy kiválasztunk három különböző számot, amelyek számtani sorozatot alkotnak, és mindhárom szám színét a másik színre változtatjuk. Mely n-ekre lehet az $1,2,\ldots,n$ számok tetszőleges színezéséből kiindulva elérni, hogy mindegyik szám piros legyen?

(*4 pont*) Javasolta: *Róka Sándor* (Nyíregyháza)

B. 4993. Rajzoljunk az ABC derékszögű háromszög BC és CA befogói fölé négyzeteket. A négyzetek C-vel átellenes csúcsai legyenek D és E. Mutassuk meg, hogy az ABC háromszög köré írt kör átmegy a DE szakasz felezőpontján.

(*4 pont*)

B. 4994. Bizonyítsuk be, hogy ha A, B és C olyan valós számok, amelyekre az $x^3+Ax^2+Bx+C=0$ paraméteres harmadfokú egyenletnek három különböző pozitív gyöke van, akkor $A^2+B^2+18C>0$.

(*4 pont*) (*Német feladat*)

B. 4995. Legyenek az ABC hegyesszögű, nem egyenlő szárú háromszög BC, CA és AB oldalainak felezőpontjai rendre D, E és F, a háromszög körülírt körének középpontja O, magasságpontja M. Az ABC háromszög körülírt köréhez az A pontban húzott érintő és az EF egyenes metszéspontja P, a körülírt körhöz a B pontban húzott érintő és FD metszéspontja Q. Mutassuk meg, hogy a PQ egyenes merőleges az OM egyenesre.

(*5 pont*)

B. 4996. Adott egy szakasz és az egyik harmadolópontja. Szerkesszük meg csak vonalzó segítségével a másik harmadolópontot.

(*6 pont*)

B. 4997. Tekintsük egész együtthatós polinomok következő $p_n(x)$ sorozatát: legyen $p_0(x)=0$, $p_1(x)=1$, és minden $n \geqslant 2$ esetén

$$p_n(x)=p_{n-1}(x)+x\cdot p_{n-2}(x).$$

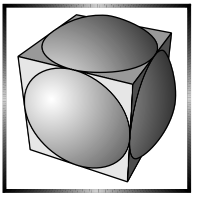
Bizonyítsuk be, hogy ha valamilyen n, m pozitív egészekre egy $f(x)$ polinom osztója a $p_n(x)$ és $p_m(x)$ polinomnak, akkor a $p_{(m,n)}(x)$ polinomnak is osztója.

((n,m) jelöli az n és m legnagyobb közös osztóját. A $P(x)$ polinom osztója a $Q(x)$ polinomnak, ha van olyan $R(x)$ valós együtthatós polinom, amelyre $Q(x)=$ $=P(x)R(x)$.)

(*6 pont*)

Beküldési határidő: 2019. január 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (737–739.)



A. 737. Adott 100 pont a térben úgy, hogy közülük semelyik négy nem esik egy síkba. Tekintsük azokat az öt csúcsú konvex poliédereket, amelyeknek minden csúcsa az adott halmazból való. Igazoljuk, hogy az ilyen poliéderek száma páros.

Javasolta: *Károlyi Gyula* (Budajenő)

A. 738. Igazoljuk, hogy ha $p(x)$ és $q(x)$ valós együtthatós polinomok, amelyek főegyütthaója 1, és $p(x)q(x)=p(x^2-2)$, akkor $q(x)=p(-x)$.

A. 739. Legyen $a_1, a_2, \ldots$ a $[0,1]$ intervallumba eső valós számok egy sorozata. Bizonyítsuk be, hogy van pozitív egészeknek olyan $1 \leqslant n_1 < n_2 < \ldots$ sorozata, amelyre

$$A=\lim_{\substack{i,j\to\infty\\ i\neq j}} a_{n_i+n_j}$$

létezik, azaz minden $\varepsilon>0$ számhoz van olyan N_ε, hogy $\left|a_{n_i+n_j}-A\right|<\varepsilon$ teljesül bármely, egymástól különböző $i, j > N_\varepsilon$ indexek esetén.

CIIM 10, Kolumbia

Beküldési határidő: 2019. január 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518