Megoldás. Tekintsük külön-külön a páros (2, 4, 6, 8, 10) és páratlan (1, 3, 5, 7, 9) számokat.

Ha mindkét részhalmazra megadjuk a tyű-de-jó rész-részhalmazok számát (ami egyébként megegyezik), akkor a két szám szorzata lesz a válasz, hiszen ha két szám különbsége 2, akkor vagy mindkettő páros, vagy mindkettő páratlan (azaz egy páros tyű-de-jó rész-részhalmazhoz bármilyen páratlan tyű-de-jó rész-részhalmazt tehetünk, a tyű-de-jó tulajdonság továbbra is megmarad).

Nézzük csak a páratlan számokat.

Először legyen a teljes halmaz az $\{1\}$. Ennek 2 részhalmaza van, egyikben benne van az 1, a másikban nincs.

Most legyen a teljes halmaz az $\{1,3\}$. Az $\{1\}$ részhalmazai közül a 3-at ahhoz tehetjük csak hozzá, amiben nincsen benne az 1. Ebből 1 darab van. De ennél a részhalmaznál az is lehet, hogy nem tesszük hozzá a 3-at. Szintén 1 olyan részhalmaz van, amiben benne van az 1, ehhez nem tehetjük hozzá a 3-at. Azaz 2 ($1+1$, azaz az $\{1\}$ részhalmazainak száma) olyan részhalmaz van, amihez nem tettük hozzá a 3-at, és 1 olyan van, amihez hozzátettük (amiben az 1 nem volt). Ezt a logikát folytatva láthatjuk, hogy a halmazt újabb páratlan számmal bővítve a tyű-de-jó részhalmazok száma a Fibonacci számok szerint növekszik. Pl. a következő páratlan számra, az 5-re: ha az $\{1,3,5\}$ esetében az 5 szerepel, akkor nem szerepelhet a 3, csak a kisebbek, jelen esetben az 1. Ha az 5 nincs a kiválasztott rész-részhalmazban, akkor a 3-ra kapott 3 esetet kapjuk. Azaz az $\{1,3,5,7,9\}$ halmaz tyű-de-jó részhalmazainak száma a 3 utáni harmadik Fibonacci szám, a 13.

Szintén 13 darab tyű-de-jó részhalmaza van a $\{2,4,6,8,10\}$ halmaznak. Tehát az $1,2,3,\dots,10$ halmaznak $13\cdot 13=169$ tyű-de-jó részhalmaza van.

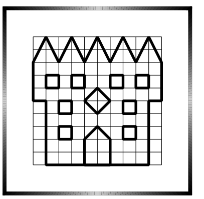
Sebestyén Pál Botond (Budapest, Baár-Madas Református Gimn., 8. évf.)
dolgozata alapján

Megjegyzés: Néhány versenyző azt is megmutatta, hogy ha a_n jelöli az $\{1,2,,3,\dots,n\}$ halmaz tyű-de-jó részhalmazainak számát, akkor

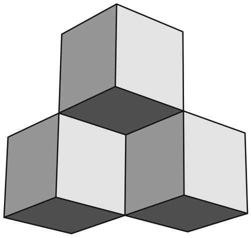
$$a_n=a_{n-2}+a_{n-3}+a_{n-4}.$$

Összesen 73 dolgozat érkezett. 3 pontot kapott 51, 2 pontot 15 versenyző. 1 pontos 3, 0 pontos 4 tanuló dolgozata.

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (604–608.)



K. 604. Adjunk meg öt különböző pozitív egész számot úgy, hogy közülük akárhányat kiválasztva és összeadva a számok összege minden választás esetén különböző legyen. Válasszuk meg ezt az öt számot úgy, hogy az öt szám közül a legnagyobb a lehető legkisebb legyen.

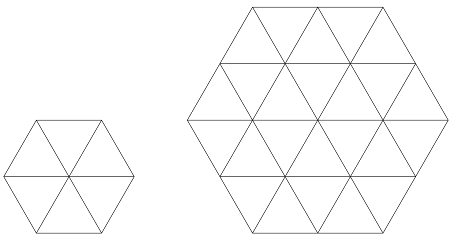


K. 605. Kehelynek nevezünk három kiskockát, ha párosával egy-egy közös élük van (lásd az *ábrát*). Egységnyi élhosszúságú kiskockákból téglatesteket építettünk.

a) Hány kehely található egy $4\times 4\times 2$-es téglatestben?

b) Hány kehely található egy $4\times 4\times 3$-as téglatestben?

K. 606. Egy $ABCDE$ ötszög AB, BC, CD és DE oldala egységnyi hosszúságú, az $ABC\sphericalangle$ és a $CDE\sphericalangle$ is $90°$-os. Mutassuk meg, hogy ilyen ötszögekkel hézagmentesen parkettázható a sík. Mutassuk meg konvex és konkáv esetre is.



K. 607. Egybevágó egyenlő oldalú háromszögekből szabályos hatszögeket építünk az *ábrának* megfelelően. Az első hat, a második huszonnégy háromszögből áll.

a) Hány háromszögből építhetjük meg a hatodik ilyen hatszöget?

b) 2017 háromszögünk van. Ezekből megépítjük a lehető legnagyobb szabályos hatszöget. Hány háromszögünk marad ki?

K. 608. *a*) Mutassuk meg, hogy végtelen sok olyan egész szám van, melynek a négyzete három 4-esre végződik.

b) Van-e olyan egész szám, melynek a négyzete négy 4-esre végződik?

Beküldési határidő: 2019. január 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (1511–1517.)

Feladatok 10. évfolyamig

C. 1511. Az AD szakasz B és C belső pontjaira $AB=CD$ teljesül. Bizonyítsuk be, hogy ha P a sík egy tetszőleges pontja, akkor $PA+PD\geqslant PB+PC$.