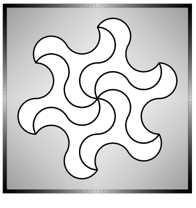
Megjegyzések. 1. A feladat sajnos túl nehéz volt. A megoldók közül sokan csak egy adott konstrukciót adtak a becslésükre, ám abból nem következett, hogy nincs jobb konstrukció. Egyetlen 5 pontos megoldás született, a fentitől különbözik, és a honlapon olvasható. A 2 pontos megoldás adott egy jó konstrukciót 58 főre, de nem látta be, hogy kevesebb nem elég. 1 pontot kaptak, akik 60 főre, vagy 55-57 főre adtak egy jó konstrukciót. Nem kaptak pontot a többiek, illetve akik rossz konstrukciót adtak (ezekben gyakran nem teljesült az a feltétel, hogy bármely két tag legfeljebb egyszer volt jelen azonos ülésen).

2. Sokan követték az alábbi gondolatmenetet, ám nem jutott eszükbe, hogy megpróbáljanak 34 főre megadni egy példát, így – mivel a bizonyítás ugyan helyes, de maga a becslés nagyon alatta van a valódi értéknek – ők is 0 pontot kaptak: „Egy ülésen 10-en vettek részt. 10 emberből $\binom{10}{2}=45$ pár alakítható ki. Ezek a párok már másik ülésen nem ismétlődhetnek és ez igaz a többi ülésre is. Ezért annyi tagnak kell lenni a bizottságban, akikből legalább $12\cdot 45=540$ különböző pár alakítható ki: $\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}\geqslant 540$, vagyis $n^2-n-1080\geqslant 0$. A másodfokú egyenlet pozitív megoldása $n\approx 33,37$, így az egyenlőtlenségé, figyelembe véve, hogy n pozitív egész szám, $n\geqslant 34$. Tehát legalább 34 tagból áll a bizottság."

3. Sokan érveltek a következőképpen: „Az első alkalommal 10 emberrel számolhatunk. A második alkalommal a legkedvezőbb, ha egy ember eljön az első gyűlésről (így többen onnan már nem jöhetnek), azaz a második gyűlésen 9 új ember jelenik meg. A harmadik gyűlésen 2 olyan ember tud megjelenni, aki még nem voltak azonos alkalommal (egyik az első, másik a második gyűlésről; aki mindkettőn részt vett, az a harmadikon már nem vehet részt) – így 8 új ember jelenik majd meg. És így tovább: a negyediken 7, az ötödiken 6, a hatodikon 5, a hetediken 4, a nyolcadikon 3, a kilencediken 2, a tizediken 1, új ember lesz jelen, a tizenegyedik ülésre pedig minden előző ülésről pontosan 1 olyan embert választunk, akik még csak egy gyűlésen voltak, így azon egy új ember sem lesz. A tizenkettedik gyűlésre bárki jön el, aki már volt gyűlésen, az két gyűlés összes tagjának teszi lehetetlenné a részvételt, így összesen maximum 5 olyan ember tud a tizenkettedik gyűlésen részt venni, akik még nem voltak ugyanazon a gyűlésen – ez 5 új embert jelent. Ez összesen 60 fő." Ezzel az érveléssel az a probléma, hogy nem biztos, hogy a legkevesebb embert ilyen módon találhatjuk meg.

130 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott Markó Gábor. 2 pontos 1, 1 pontos 54, 0 pontos 74 dolgozat.



Matematika feladatok megoldása

B. 4937. *A síkon kiválasztunk rácsnégyszögeket úgy, hogy igaz rájuk a következő: akárhogy színezzük a rácspontokat véges sok színnel, mindig van olyan kiválasztott négyszög, amelynek minden csúcsa ugyanolyan színű. Bizonyítsuk be, hogy van végtelen sok olyan kiválasztott négyszög, amelyek közül semelyik kettőnek nincs közös csúcsa.*

(*6 pont*) Javasolta: *Surányi László* (Budapest)

Megoldás. Színezzük ki a sík rácspontjait k színnel. A feladat feltétele szerint van olyan rácsnégyszög, amelynek a csúcsai egyforma színűek. Ez legyen az A négyszög. Ezután készítünk egy új színezést úgy, hogy az A négyszög csúcsainak színezését lecseréljük a $k+1$, $k+2$, $k+3$ és $k+4$ színre. A feladat feltétele alapján ennél a színezésnél is létezik olyan négyszög, amelynek a csúcsai egyforma színűek, legyen ez a B négyszög. Ennek a négyszögnek egyik csúcsa sem fog egybeesni az A négyszög csúcsaival, mert $k+1$-től $k+4$-ig a színekből csak egy-egy darab csúcs van, viszont a B négyszög mind a négy csúcsának ugyanolyan színűnek kell lennie. Tehát a B négyszögnek biztosan nincs közös csúcsa az A négyszöggel. Most a B négyszög csúcsait festjük át $k+5$, $k+6$, $k+7$, $k+8$ színűre. Ekkor is létezik olyan négyszög amelynek csúcsai egyforma színűek (legyen ez a négyszög C), aminek nem lehet közös csúcsa sem A-val, sem B-vel, mert C olyan négyszög, amelynek mindegyik csúcsa egyszínű, viszont az A és B csúcsainak színei csak pontosan egyszer fordulnak elő az újabb színezésben. Az eljárást folytatva, tegyük fel, hogy már n darab páronként diszjunkt rácsnégyszöget kiválasztottunk. Akkor az előző eljárással kiválaszthatunk egy további olyat, amely az eddigiektől teljesen különböző. Végtelen sok olyan négyszöget fogunk kapni, amelyeknek nincs közös csúcsa.

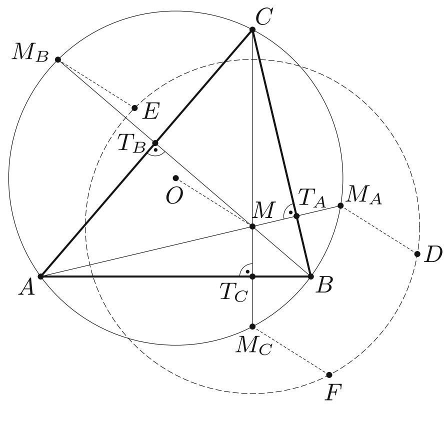
Biczó Benedek (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 9. évf.) dolgozata alapján

Összesen 44 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott 37, 3 pontot 1 tanuló. 2 pontos 2, 0 pontos 4 tanuló dolgozata.

B. 4941. *A hegyesszögű ABC háromszög körülírt körének O középpontját tükrözzük a magasságok talppontjaira. Igazoljuk, hogy e három pont által meghatározott kör ugyanakkora sugarú, mint az ABC háromszög körülírt köre.*

(*4 pont*)

Megoldás. Az *ábra* jelölései szerint legyenek a magasságok talppontjai T_A, T_B, T_C. Az O középpont T_A, T_B és T_C pontokra vonatkozó tükörképei rendre D, E és F, továbbá a magasságpont oldalakra (és így a magasságok talppontjaira) vonatkozó tükörképei pedig M_A, M_B és M_C.



Ismert, hogy a háromszög magasságpontját az oldalakra tükrözve a kapott M_A, M_B, M_C pontok rajta vannak az ABC háromszög körülírt körén.

Tekintsük ezután a D és M_A pontokat. A D pont az O pontnak, az M_A pont pedig M pontnak a T_A talppontra vonatkozó tükörképei, így az MOM_AD négyszög középpontosan szimmetrikus, tehát paralelogramma. Így $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{M_AD}$. Most az O és M pontokat a T_B talppontra tükrözve látjuk azt is, hogy $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{M_BE}$. Végül a T_C-re tükrözve O-t és M-et ismét a paralelogrammma tulajdonságából $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{M_CF}$.

E három vektor azt jelenti, hogy a DEF háromszög az $M_AM_BM_C$ háromszög eltoltja az $\overrightarrow{OM}$ vektorral. A két háromszög egybevágó, a körülírt köreik sugara megegyezik, ráadásul a DEF háromszög körülírt körének középpontja az eredeti ABC háromszög magasságpontja.

Csépányi István (Egri Szilágyi Erzsébet Gimnázium, 11. évf.) dolgozata alapján

Összesen 83 dolgozat érkezett. 4 pontot kapott 78, 2 pontot 2 versenyző. 1 pontos 2, nem értékelünk 1 dolgozatot.

B. 4950. *Jelöljük F_n-nel az n-edik Fibonacci-számot* ($F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$), *és definiáljuk az $a_0, a_1, a_2, \ldots$ sorozatot a következő rekurzióval: legyen $a_0 = 2018$, és minden $k \geqslant 0$-ra legyen $a_{k+1} = a_k + F_n$, ahol F_n a legnagyobb a_k-nál kisebb Fibonacci-szám. Előfordul-e az (a_k) sorozatban Fibonacci-szám?*

(*4 pont*)

Megoldás. Először vizsgáljuk meg, hogy a 2018 Fibonacci szám-e? A Fibonacci-sorozat a második tagtól kezdve szigorúan monoton növekedő, így elegendő a tagjait felsorolni amíg el nem érjük a 2018-at:

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,\ 233,\ 377,\ 610,\ 987,\ 1597,\ 2584,\ \ldots$$

A 2018 nem Fibonacci szám, a sorozat 17-edik és 18-adik tagja közé esik.

A továbbiakban belátjuk, hogy az (a_k) sorozatban nem fordul elő Fibonacci-szám. Ezt teljes indukcióval bizonyítjuk. Az állítás $k = 0$-ra igaz, mert $F_{17} < a_0 < F_{18}$. Tegyük fel, hogy valamely m-re $F_n < a_m < F_{n+1}$, ahol F_n a legnagyobb Fibonacci-szám, amely kisebb a_m-nél. Mivel a Fibonacci-sorozat a második elemétől kezdve szigorúan monoton növekedő, ezért

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} < 2 \cdot F_n < a_m + F_n < F_{n+1} + F_n = F_{n+2}.$$

Az indukciós feltevést és az $a_m + F_n = a_{m+1}$ egyenlőséget felhasználva ebből

$$F_{n+1} < a_{m+1} < F_{n+2}$$

következik.

Az (a_k) sorozatban tehát nem fordul elő Fibonacci-szám.

Kupás Vendel Péter (Gyöngyösi Berze Nagy János Gimn., 12. évf.) dolgozata alapján

Megjegyzés: Több versenyző azt is megmutatta, hogy tetszőleges n természetes számra $a_n = F_{n+18} - 566$. Mivel már az első tag esetén is nagyobb a megfelelő Fibonacci-számok különbsége, mint 566, nem lesz az (a_k) sorozatban Fibonacci-szám.

Összesen 92 dolgozat érkezett. 4 pontot kapott 52, 3 pontot 21 versenyző. 2 pontos 10, 1 pontos 8, 0 pontos 1 tanuló dolgozata.

B. 4957. *Egy pozitív egészekből álló halmazt nevezzünk* tyű-de-jónak, *ha a számok között nincs kettő, melyek különbsége 2. Hány tyű-de-jó részhalmaza van az $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ halmaznak?*

(*3 pont*) Javasolta: *Róka Sándor* (Nyíregyháza)

Megoldás. Tekintsük külön-külön a páros (2, 4, 6, 8, 10) és páratlan (1, 3, 5, 7, 9) számokat.

Ha mindkét részhalmazra megadjuk a tyű-de-jó rész-részhalmazok számát (ami egyébként megegyezik), akkor a két szám szorzata lesz a válasz, hiszen ha két szám különbsége 2, akkor vagy mindkettő páros, vagy mindkettő páratlan (azaz egy páros tyű-de-jó rész-részhalmazhoz bármilyen páratlan tyű-de-jó rész-részhalmazt tehetünk, a tyű-de-jó tulajdonság továbbra is megmarad).

Nézzük csak a páratlan számokat.

Először legyen a teljes halmaz az $\{1\}$. Ennek 2 részhalmaza van, egyikben benne van az 1, a másikban nincs.

Most legyen a teljes halmaz az $\{1, 3\}$. Az $\{1\}$ részhalmazai közül a 3-at ahhoz tehetjük csak hozzá, amiben nincsen benne az 1. Ebből 1 darab van. De ennél a részhalmaznál az is lehet, hogy nem tesszük hozzá a 3-at. Szintén 1 olyan részhalmaz van, amiben benne van az 1, ehhez nem tehetjük hozzá a 3-at. Azaz 2 ($1 + 1$, azaz az $\{1\}$ részhalmazainak száma) olyan részhalmaz van, amihez nem tettük hozzá a 3-at, és 1 olyan van, amihez hozzátettük (amiben az 1 nem volt). Ezt a logikát folytatva láthatjuk, hogy a halmazt újabb páratlan számmal bővítve a tyű-de-jó részhalmazok száma a Fibonacci számok szerint növekszik. Pl. a következő páratlan számra, az 5-re: ha az $\{1, 3, 5\}$ esetében az 5 szerepel, akkor nem szerepelhet a 3, csak a kisebbek, jelen esetben az 1. Ha az 5 nincs a kiválasztott rész-részhalmazban, akkor a 3-ra kapott 3 esetet kapjuk. Azaz az $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ halmaz tyű-de-jó részhalmazainak száma a 3 utáni harmadik Fibonacci szám, a 13.

Szintén 13 darab tyű-de-jó részhalmaza van a $\{2, 4, 6, 8, 10\}$ halmaznak. Tehát az $1, 2, 3, \ldots, 10$ halmaznak $13 \cdot 13 = 169$ tyű-de-jó részhalmaza van.

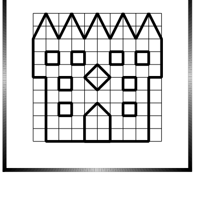
Sebestyén Pál Botond (Budapest, Baár-Madas Református Gimn., 8. évf.) dolgozata alapján

Megjegyzés: Néhány versenyző azt is megmutatta, hogy ha a_n jelöli az $\{1, 2, , 3, \ldots, n\}$ halmaz tyű-de-jó részhalmazainak számát, akkor

$$a_n = a_{n-2} + a_{n-3} + a_{n-4}.$$

Összesen 73 dolgozat érkezett. 3 pontot kapott 51, 2 pontot 15 versenyző. 1 pontos 3, 0 pontos 4 tanuló dolgozata.

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (604–608.)



K. 604. Adjunk meg öt különböző pozitív egész számot úgy, hogy közülük akárhányat kiválasztva és összeadva a számok összege minden választás esetén különböző legyen. Válasszuk meg ezt az öt számot úgy, hogy az öt szám közül a legnagyobb a lehető legkisebb legyen.