hipersík δ távolsággal „beljebb” kerül a féltérbe, és jelöljük az így kapott félteret $F'_{\mathbf{w}}$-vel (*2. ábra*). Ekkor a δ sugarú gömbök uniója az $F'_{\mathbf{w}}$ féltér komplementerében van, és így nem tartalmazza a $\mathbf{w}/|\mathbf{w}| \in \mathbf{B}$ pontot. Tehát $\mathbf{w}/|\mathbf{w}|$ minden $\mathbf{v}_i$-től legalább δ távol van, ami ellentmond annak, hogy a pakolásunk maximális. Megkaptuk tehát, hogy a $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ pontok konvex burka tartalmazza a $\mathbf{B}(\rho)$ gömböt.

Végül (8) garantálja a (7) képlet helyességét, mert $\delta = 1 - \rho$, amivel a 4.1. tételt beláttuk.

Zárásul egy kis számolás, amely összehasonlítja a két tételt. Tíz dimenzióban milyen nagy n-nel garantálja a 4.1. tétel olyan $\mathbf{B}$-beli legfeljebb n-csúcsú konvex politóp, P létezését, amelynek térfogata legalább $\operatorname{vol}(\mathbf{B})/2$? Abból, hogy $\mathbf{B}(\rho) \subseteq P$, csak annyi következik, hogy $\rho^d \operatorname{vol}(\mathbf{B}) \leqslant \operatorname{vol}(P)$. Tehát a $\rho = \sqrt[10]{1/2} \approx 0{,}933$ sugarú gömböt kell tartalmaznia P-nek, amit kb. $n = 7{,}8 \cdot 10^{14}$ csúccsal tud elérni a tétel. Mindeközben a 3.1. tétel szerint n legalább 512. A két korlát között van némi hézag. Szerencsére a bemutatottaknál erősebb tételek is ismertek, de az ízüket ez a kettő is remekül visszaadja.

Az érdeklődő Olvasónak a magasdimenziós geometriáról a [2] remek könyveket javaslom.

A cikk megírásában, a gondolatmenetek tisztázásában sokat segített *Surányi László* és *Lakos Gyula.* Köszönöm nekik!

A cikk az Emberi Erőforrások Minisztériuma ÚNKP-17-4 kódszámú Új Nemzeti Kiválóság Programjának támogatásával készült.

Hivatkozások

[1] Borsányi Ákos: *Miért lehet a Fermat-prím oldalú szabályos sokszögeket megszerkeszteni?* KöMaL 1994/január: 1. rész; KöMaL 1994/március: 2. rész.

[2] J. Pach – P. Agarwal: *Combinatorial Geometry* (Wiley); J. Matoušek: *Lectures on Discrete Geometry* (Springer); G. Horváth Á. – Lángi Zs.: *Kombinatorikus Geometria* (Polygon).

Naszódi Márton

Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

I. rész

1. *a*) Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\log_{2^x+1}\left(2^{x+1}+5\right) = 2. \qquad (6\ pont)$$

b) A LOTTÓ (90 számból 5 húzása) megváltoztatására készülnek. Két javaslat van. Az egyik 90-ből 4 szám húzását javasolva a régi módon, a másik meg 45 számból

4 húzását javasolja a sorrend figyelembe vételével, de ez lehetővé tenné, hogy ugyanazt a számot többször is ki lehessen húzni, azaz a már húzott számot ismét visszatennék. Azt akarnák elfogadni, amelyik játék esetében kevesebb az esély a telitalálatra. Zsebszámológép nélkül (!) határozzuk meg, hogy melyiket válasszák. (*6 pont*)

2. *a*) Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet, ahol p valós paraméter:

$$3x + 2p = 5\sqrt{px}.$$ (*7 pont*)

b) Egy négyszögnek, mely egyidejűleg érintő és húrnégyszög is, az egyik oldala 5 cm és valamelyik oldaltól kezdve pozitív körbejárás szerint véve az oldalakat mértani sorozat elemeit kapjuk. Mekkora a másik három oldal és milyen négyszögről van szó? (*6 pont*)

3. *a*) Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} - 1 = 1 - \dfrac{y}{x}, \\ x^8 + 2y^6 = x^6 + 2y^8. \end{cases}$$ (*6 pont*)

b) Adjuk meg az összes p pozitív prímszámot, melyre a

$$4x^2 - 4(2p+1)x + (4p^2 - p) = 0$$

egyenlet gyökeinek különbsége egész szám. (*7 pont*)

4. *a*) Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

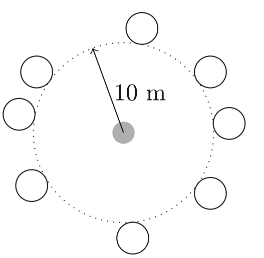
$$\sin x + \sqrt{3} \cdot \cos x = 4 \cdot \sin x \cdot \cos x.$$ (*7 pont*)

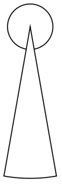
b) Mekkora területet zárnak be az $y = x$ egyenes és a $y = x^3 - 9x^2 + 9x$ görbe? (*6 pont*)

II. rész

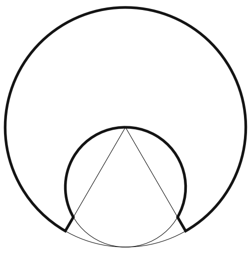
5. Az $y = x^3 - 6x^2 + 15x + c$ függvény egyik érintőjének egyenlete $y = 6x - 5$. Mekkora a c értéke? (*16 pont*)

6. A *rajz* szerint egy 10 m sugarú kör közepén állunk puskával a kézben, amit 8 darab, 1 m sugarú tölgyfa vesz körbe nem egyenletesen elhelyezkedve (a rajz nem a valós elhelyezkedést mutatja). Véletlenszerűen 5 lövést leadva mekkora annak a valószínűsége, hogy legalább 3 lövés kijut a „fa ketrecből”? (*16 pont*)





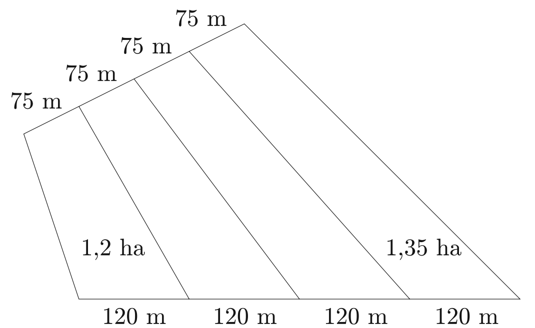
7. Kugli játékhoz könnyen boruló bábut terveztünk. A *rajz* a keresztmetszeti képét ábrázolja. Veszünk egy $R = 30$ cm sugarú gömböt, amiből kivágunk egy a gömb középpontjából induló kúpot úgy, hogy a gömb felületén egy 225π cm^2 felületdarabot vágunk ki. Ezután egy $r = 5$ cm sugarú gömböt teszünk a csúcsra úgy, hogy a kis gümb középpontja pont a csúcsra illeszkedjék (persze, előtte a szükséges lyukat kivágjuk). Mekkora az így kapott test térfogata? (*16 pont*)



8. Egy nyakláncra medált terveztünk, melyet a rajz mutat, ahol a medált a vastag vonalak határolják. A nagy kör sugara $R = 4$ cm, a kicsi kör belülről érinti a nagy kört és sugara $r = 2$ cm, amit kivágunk. Hogy ne legyen hegyes a medál, ezért a nagy kör középpontjából szimmetrikusan $60°$ szög szögtartományában levő részeket is levágjuk. Mekkora a keletkezett medál kerülete, területe?

(*16 pont*)

9. Az *ábra* egy földterület rajzát adja, amelyen 4 tulajdonos osztozik. A nyilvántartásban a középső két terület nagysága olvashatatlan. Mekkora a hiányzó két terület nagysága?



(*16 pont*)

Szoldatics József
Budapest

Megoldásvázlatok a 2018/8. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *a*) *Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet:*

$$\sqrt{x} = 6 - x.$$ (*5 pont*)