KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK
INFORMATIKA ROVATTAL BŐVÍTVE
ALAPÍTOTTA: **ARANY DÁNIEL** 1894-ben

68. évfolyam 9. szám — Budapest, 2018. december

Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta 64 oldalon. ÁRA: 950 Ft

TARTALOMJEGYZÉK

A szerkesztőség címe: 1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1.A, II. emelet 2.76.; Telefon: 372-2500/6541; 372-2850
A lap megrendelhető az Interneten: `www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.h.shtml`.
Előfizetési díj egy évre: 8100 Ft

E-mail: `szerk@komal.hu`
Internet: `http://www.komal.hu`
This journal can be ordered from the Editorial office: Pázmány Péter sétány 1.A, II. emelet 2.76., 1117–Budapest, Hungary telephone: +36 (1) 372-2850 or on the Postal address H–1518 Budapest 112, P.O.B. 32, Hungary, or on the Internet: `www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.e.shtml`.

125 éves a KöMaL 1.[*]

Az elindulás (1894–1914)

125 éve, 1893 decemberében jelent meg az első, úgynevezett mutatványszám *Arany Dániel* (1863–1945) győri állami főreáliskolai tanár szerkesztésében. A lap célját a következőkben jelölte meg: Tartalomban gazdag példatárat adni tanárok és tanulók kezébe.

A lapnak 4 rovata szolgálta ezt a célt. Az első és a negyedik a kitűzött feladatok szövegét, illetve megoldásait tartalmazta. A megoldások a tanulók által beküldött legjobb dolgozatokból kerültek ki. A második rovat a tananyaghoz csatlakozó matematikai tételeket, s azok szép, egyszerű, a szokásostól eltérő bizonyításait tartalmazta. A harmadik rovat különböző iskolák érettségi feladatsorait mutatta be.

Abban az időben a szerkesztő egyben kiadója is volt a lapnak, s az előállítás költségeit az előfizetésekből fedezte.

Arany Dániel alkotó matematikus volt. Ifjúkorában a determinánselmélet terén ért el eredményeket. Később háromszög-geometriai és valószínűségszámítási kérdésekkel foglalkozott. Ezekről cikkei is jelentek meg. Az egyik valószínűségszámítási feladat, amivel foglalkozott, Pólya Györgytől származott. A probléma egy egyszerű esetben így hangzott: „Valaki bizonyos sebességgel elindul egy útvesztőben, ahol minden útirány egyenlően jogosult. Mi a valószínűsége, hogy t idő múlva k távolságra lesz a kinduló ponttól?”

Arany Dániel jól beszélt németül, angolul és franciául, több matematikai folyóirattal állt levelezésben. Ha érdekes cikket talált, rögtön írt a szerzőjének. Közvetlen stílusa révén könnyen tudott kapcsolatot teremteni.

Munkakörébe vágó értékes szakkönyvtárat gyűjtött, amelyet 1944-ben (helyhiány miatt) az Eötvös Loránd Matematikai és Fizikai Társulatnak adományozott. Ma a Műegyetem 1. sz. matematika tanszékének birtokában van, külön kezelésben.

1896-tól *Rátz László* budapesti főgimnáziumi tanár vette át a lapszerkesztés feladatát. Arany továbbra is támogatta a munkát. 1907-től *Antal Márk* felsőkereskedelmi iskolai tanár társszerkesztőként csatlakozott hozzájuk. A lap 21 évfolyamot ért meg, 1914-ben a háború miatt megszűnt.

Rátz László (1863–1930) főiskolai tanulmányait Budapesten kezdte, majd Berlinben és Strassburgban egészítette ki. 1890-ben a budapesti Ágostai Hitvallású Evangélikus Főgimnázium tanára lett, és itt működött 35 éven át.

Kiváló pedagógiai érzékű és nagy tudományos felkészültségű tanár volt. Arra törekedett, hogy minden diákja megértse és megszeresse a matematikát. Tanításának érdekességével, lenyűgöző előadásmódjával ezt el is érte. Jól megválasztott feladatokkal a matematikai gondolkodást is fejlesztette.

---

[*] Az itt megjelent cikk lényegében az 1993. évi decemberi számban megjelent írás ismétlése.

A tanári hivatást mindennél fontosabbnak tartotta. 1909-től 1914-ig a gimnázium igazgatója is volt, de az igazgatással járó sok adminisztráció pedagógiai munkáját akadályozta, ezért lemondott, és visszatért a katedrához.

A tehetséges diákokkal külön is foglalkozott, ellátta őket feladatokkal, útbaigazításokkal, megfelelő könyvekkel. A Középiskolai Matematikai Lapok első tíz évfolyamának érdekes feladataiból kétkötetes gyakorlókönyvet szerkesztett. Fontos szerepe volt a korabeli matematikai tantervreform előkészítésében is. Rátz László megérte a háború miatt megszűnt lap újraéledését, s ez nagy örömmel töltötte el; melegen érdeklődött a lap iránt, és növendékeit is buzdította a munkára.

Az újrakezdés (1925–1939)

A két világháború között 1925 februárjától 1939 júniusáig *Faragó Andor* [2, 3, 4], a budapesti magyar királyi állami Zrínyi Miklós reálgimnázium tanára szerkesztésében újra megjelent a lap, amelynek címe: Középiskolai Mathematikai és Fizikai Lapok. A lap célját az előd hagyományait követve a következőkben jelölte meg: „A folyóirat célja a mathematikai gondolkodás fejlesztése, a természettani ismeretek gyarapítása. A mathematikai rész fel fogja ölelni mindazokat a fejezeteket, amelyek a középiskolák részére kiszabott anyagba felvétettek. A fizika rész – az iskolai anyagban betanult törvényeknek számításban való alkalmazása mellett – ki fog terjeszkedni elméleti kérdések és kísérleti módszerek, mérések ismertetésére is."

A negyedik számtól (1925. május) a lap ábrázoló geometria résszel bővült, amelynek rovatvezetője *Kresznerics Károly,* majd 1931-től *Vigassy Lajos,* aki később, a háború után, szerkesztőbizottsági tag is volt.

Faragó Andor kezdte el a szorgalmas megoldók évi arcképes tablójának közlését, mellyel az addig elért eredményeket elismerte, és további munkára kívánta ösztönözni a diákokat.

Faragó Andor életéről kevés írott anyag maradt. Tanítványai visszaemlékezéseiből tudjuk, hogy kiváló pedagógus, nagy tudású, széles látókörű tanár volt. Az ő szerkesztésében élte a lap fénykorát. A feladatmegoldók között olvasható többek között: Bakos Tibor, Bodó Zalán, Budó Ágoston, Erdős Pál, Hajós György, Hódi Endre, Hoffman Tibor, Kárteszi Ferenc, Klein Eszter, Nagy Elemér, Surányi János, Szekeres György, Turán Pál, Wachsberger (Svéd) Márta, Weiszfeld (Vázsonyi) Endre neve.

Faragó Andor nemcsak szerkesztette a lapot, de kiadója is volt. Sokszor anyagi gondokkal is küszködve, támogatókat keresve és találva biztosította a lap megjelenését.

Származása miatt üldöztetést szenvedett, és a fasizmus áldozataként meghalt. Halálának sem körülményei, sem időpontja nem ismeretes számunkra.

További ajánlott olvasmányok

[1] Kántor Sándorné: A 125 éves KöMaL-ról, *Érintő* (2018. december), `http://ematlap.hu/index.php/tudomany-tortenet-2018-12/802-a-125-eves-komal-rol`.

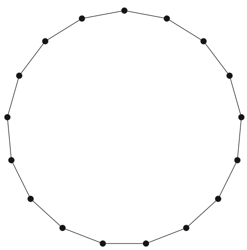
[2] Radnai Gyula: Faragó Andorról – két tételben I. Felkészülés a tanári pályára a XIX. század végén, *Érintő* (2016. december), `http://ematlap.hu/index.php/interju-`

portre-2016-12/365-farago-andorrol-ket-tetelben-i-felkeszules-a-tanari-palyara-a-xix-szazad-vegen.

[3] Radnai Gyula: Faragó Andorról – két tételben II. Tanár és lapszerkesztő a XX. században, *Érintő* (2017. március), http://ematlap.hu/index.php/interju-portre-2017-03/405-farago-andorrol-ket-tetelben-2-tanar-es-lapszerkeszto-a-xx-szazadban.

[4] Oláh Vera: Arckép helyett, *Érintő* (2017. december), http://ematlap.hu/index.php/interju-portre-2017-12/627-arckep-helyett.

Politópok és a gömb d-dimenzióban



1. ábra. Szabályos 17-szög

Gauss tizenkilenc éves korában igazolta, hogy a szabályos 17-szög (magyarul heptadekagon) megszerkeszthető körző és vonalzó használatával [1]. Eredményére annyira büszke volt, hogy úgy rendelkezett, hogy a sírkövére véssenek egy szabályos 17-szöget. A sírkőfaragók erre nem voltak hajlandók, mert *a szabályos 17-szög lényegében egy kör.* Ebben a cikkben nem Gauss munkájával foglalkozunk, hanem a sírkőfaragók fenti igazságával.

A modern sírkőfaragók már nemcsak síkbeli ábrákkal dolgoznak, hanem térbeliekkel is, ők a szobrászok és a hologram-készítők. És az igazán modern sírkőfaragók magasabb dimenziós ábrákkal is dolgoznak, ők a matematikusok, sőt, mára már a fizikusok, közgazdászok, és a biológusok is.

Azt fogjuk körüljárni, mennyire lehet egy d-dimenziós konvex testet egy politóppal (a sokszög magasdimenziós megfelelője) közelíteni. Ehhez persze tisztázni kell, hogy mi az a d-dimenziós konvex test, mi az, hogy politóp, és mit jelent az, hogy egy politóp közel van egy konvex testhez.

1. Ha a négy dimenzió a téridő, akkor a hat dimenzió az a „téridőhőmérsékletpáratartalom"?

Lényegében igen. Kicsit pontosabban: megtanultuk, hogy a síkban, miután felvettünk egy koordinátarendszert, a pontok helyett beszélhetünk valós számpárokról, $(x;y)$. A koordináták nyelvén nem csak pontokról, hanem ponthalmazokról is tudunk beszélni. Felírhatjuk például a $(2;7)$ középpontú, 3 sugarú kör egyenletét: $(x-2)^2+(y-7)^2=9$, vagy egy egyenes egyenletét: $15x-3y+8=0$. Innen kis lépés a tér pontjait valós számokból álló hármasokkal, $(x;y;z)$ azonosítani. Aztán felírhatjuk bizonyos térbeli alakzatok egyenleteit is. Például a $(2;7;-8)$ középpontú, 3 sugarú gömbhéj egyenlete $(x-2)^2+(y-7)^2+(z+8)^2=9$, vagy egy sík egyenlete $15x-3y+15z+8=0$. Most egy nagyon bátor lépés következik: írjunk egy zárójelen belülre 6 számot egymástól pontosvesszővel gondosan elválasztva:

$(x_1; x_2; x_3; x_4; x_5; x_6)$. Így például $(-2; -3; 22,5; 9; 11; 8)$ egy pont a hatdimenziós térben, amelyet – mivel valós számhatosok alkotják – $\mathbb{R}^6$-tal jelölünk (és mondjuk „err ad hat"-nak olvashatunk).

De mi ennek az értelme? Amit hat valós számmal lehet leírni, arról beszélhetek úgy, mint $\mathbb{R}^6$ egy pontjáról. Ha mondjuk megmérjük egy hangya 6 lábának a hosszát, akkor kapunk egy pontot $(x_1; x_2; \ldots; x_6) \in \mathbb{R}^6$. Egy másik hangya ad egy másik pontot $(x'_1; x'_2; \ldots; x'_6) \in \mathbb{R}^6$. Hogyan fejezzük ki azt, hogy a két hangya mennyire hasonló? Vegyük a két $\mathbb{R}^6$-beli pont *távolságát,* amelyet, a két- és háromdimenziós eset kiterjesztéseként definiálhatunk így:

$$d\big((x_1; x_2; \ldots; x_6), (x'_1; x'_2; \ldots; x'_6)\big) := \\ := \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + \ldots + (x_6 - x'_6)^2}. \tag{1}$$

Hogyan lehet elképzelni a hatdimenziós teret? Erre nincs kanonikus válasz, én úgy képzelem el, mint a háromdimenziósat, persze tudva, hogy ez a kép valamennyire pontatlan. Például az $5x_1 - 3x_2 + 8x_3 - 12x_4 + 2x_5 + 3x_6 + 8 = 0$ egyenlet egy *hipersíkot* ír le, amelyet ugyanúgy lehet elképzelni, mint egy síkot a térben. És ez a kép jó is, például éppen úgy két *féltérre* osztja $\mathbb{R}^6$-ot, ahogyan egy sík is $\mathbb{R}^3$-at: vannak olyan pontok $\mathbb{R}^6$-ban, melyekre $5x_1 - 3x_2 + 8x_3 - 12x_4 + 2x_5 + 3x_6 + 8 \geqslant 0$, és vannak olyanok, melyekre $5x_1 - 3x_2 + 8x_3 - 12x_4 + 2x_5 + 3x_6 + 8 \leqslant 0$. De vigyázni kell ezzel a képpel, mert míg két általános helyzetű sík metszete egy egyenes, hárome pedig egy pont $\mathbb{R}^3$-ban, addig $\mathbb{R}^6$-ban két általános helyzetű hipersík metszete egy 4-dimenziós ponthalmaz, három általános helyzetű hipersík metszete pedig egy 3-dimenziós ponthalmaz $\mathbb{R}^6$-ban (most a dimenziót és az általános helyzetet nem definiálom).

2. $\mathbb{R}^d$ geometriája

Legyen mostantól d egy pozitív egész szám. Az eddigiek alapján a d koordinátából álló pontok terét $\mathbb{R}^d$-vel jelöljük, és elemeit hol vektoroknak, hol pontoknak hívjuk. Megvan tehát a terünk ponthalmaza, kell még néhány mennyiség, struktúra, amelyektől ennek a térnek geometriája is lesz. Erről szól ez a fejezet.

2.1. Távolság, szög. A távolság és a szög definíciójához is a skaláris szorzáson keresztül jutunk majd el, ez a központi fogalom. Két d-dimenziós vektornak, $\mathbf{u} = (u_1; u_2; \ldots; u_d)$-nak, illetve $\mathbf{v} = (v_1; v_2; \ldots; v_d)$-nek a *skaláris szorzatát* az

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle := u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_d v_d \tag{2}$$

képlettel definiáljuk. Ennek segítségével definiálhatjuk egy *vektor hosszát,* $|\mathbf{v}| := \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$. Vegyük észre, hogy ez éppen a két- és háromdimenziós definíció általánosítása: a koordináták négyzetösszegének gyöke. Ebből kapjuk két pont *távolságát,* $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := |\mathbf{u} - \mathbf{v}|$, ami persze éppen az (1) egyenlet átírva d koordinátára. Így már tudjuk, mi az origó középpontú $\rho > 0$ sugarú (tömör) *gömb:* azon $(x_1; x_2; \ldots; x_d) \in \mathbb{R}^d$ pontok halmaza, melyekre teljesül az $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_d^2 \leqslant \rho^2$ egyenlőtlenség. Ezt $\mathbf{B}(\rho)$-val fogjuk jelölni, és ha $\rho = 1$, akkor elhagyjuk, és egyszerűen $\mathbf{B}$-t írunk. Azt is meg tudjuk fogalmazni, hogy egy alakzat „nem nyúlik a végtelenbe": a $H \subseteq \mathbb{R}^d$ halmazt *korlátosnak* hívjuk, ha van olyan $\rho > 0$ valós szám, amelyre H benne van $\mathbf{B}(\rho)$-ban.

A skaláris szorzatot középiskolában a sík, illetve a tér két, α szöget bezáró vektorára az $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle := |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \cos\alpha$ képlettel szoktuk definiálni, aztán belátjuk a (2) képletet. Most (2) a definíció, és belátható (ezt nem tesszük meg), hogy a síkon, illetve a térben igaz a koszinuszos képlet. A szöget d-dimenzióban egyszerűen a skaláris szorzásból definiáljuk, amit egy kicsit elő kell készíteni.

A *Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség* szerint bármely $u_1, \ldots, u_d$ és $v_1, \ldots, v_d$ valós számokra teljesül, hogy

$$\left| \sum_{i=1}^{d} u_i v_i \right| \leqslant \left| \sum_{i=1}^{d} u_i^2 \right|^{1/2} \left| \sum_{i=1}^{d} v_i^2 \right|^{1/2},$$

(ezt most nem bizonyítjuk), ami másképp így írható: $\big|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle\big| \leqslant |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|$.

Definiáljuk ezért az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektorok *szögét* úgy, mint az az $\alpha \in [0, \pi]$ valós szám, melyre

$$\cos\alpha = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{u}|}.$$

Feladat: Lássuk be, hogy a távolságra teljesül a *háromszög-egyenlőtlenség,* azaz tetszőleges három $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^d$ pontra igaz, hogy $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + d(\mathbf{v}, \mathbf{z}) \geqslant d(\mathbf{u}, \mathbf{z})$.

Ez az állítás és sok hasonló több-kevesebb számolást igényel, azonban mind hihetőbbé válnak, ha magunkévá tesszük azt a geometriai képet, hogy bármely 3 pont egy (kétdimenziós) síkban van, és az $\mathbb{R}^d$-beli távolság ebben a síkban pontosan a sík szokásos geometriáját adja meg.

2.2. Konvex halmazok. Ahhoz, hogy konvex halmazokról beszélhessünk, tudnunk kell, mi az a *szakasz.* Adott két vektor, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$. Hogy kapjuk meg a szakaszuk felezőpontját? Az $\frac{1}{2}\mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{v}$ képlettel. És az $\mathbf{u}$-hoz közelebbi harmadolópontját? A $\frac{2}{3}\mathbf{u} + \frac{1}{3}\mathbf{v}$ képlettel (ezt gondoljuk végig a síkon vagy a térben). Így nem meglepő, hogy általában a szakasz tetszőleges pontját $\lambda_1\mathbf{u} + \lambda_2\mathbf{v}$ alakban kapjuk meg, ahol λ_1, λ_2 nemnegatív valós számok, melyek összege 1. A szakaszra egy jelölést is bevezetünk: $[\mathbf{u}, \mathbf{v}] := \{\lambda_1\mathbf{u} + \lambda_2\mathbf{v} :\, \lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0,\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1\}$.

Egy $K \subseteq \mathbb{R}^d$ halmazt akkor hívunk *konvexnek,* ha tetszőleges $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in K$ pontokra $[\mathbf{u}, \mathbf{v}] \subseteq K$ fennáll.

Hogyan „egészítünk ki" egy halmazt konvex halmazzá? Azt mondjuk, hogy az $\mathbb{R}^d$-beli H halmaznak a K halmaz a *konvex burka,* ha K konvex, tartalmazza H-t, és a legkisebb ilyen halmaz, azaz bármely L konvex halmazra, amely tartalmazza H-t igaz, hogy $K \subseteq L$. Belátható, hogy minden halmaznak pontosan egy konvex burka van.

Többször használjuk majd a fenti definíció egy következményét: ha az $A \subset \mathbb{R}^d$ véges halmaz benne van az L konvex halmazban, akkor A konvex burka is benne van L-ben.

Egy kétpontú halmaz konvex burka a szakaszuk. Három pontra mi a helyzet? A konvex burkuk nyilván a háromszöglemez, melynek ők a csúcsai. Hogyan kapjuk meg a síkon egy $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ csúcsú háromszöglemez pontjait? A súlypontját például az $(\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w})/3$ képlettel (lássuk be). Kicsit általánosabban: ha veszünk $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geqslant 0$ súlyokat, melyek összege 1, akkor a $\lambda_1\mathbf{u}+\lambda_2\mathbf{v}+\lambda_3\mathbf{w}$ helyvektorú pont a háromszöglemez egy pontja (ezt próbáljuk ki, és lássuk is be).

Mindezt ennél kicsit általánosabban is elmondhatjuk: adott véges sok $\mathbb{R}^d$-beli vektor, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$. Ekkor egy

$$\lambda_1\mathbf{u}_1+\lambda_2\mathbf{u}_2+\ldots+\lambda_k\mathbf{u}_k$$

alakú kifejezést, ahol $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \geqslant 0$ és $\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_k=1$, *konvex kombinációnak* hívunk. Az eddigiek szerint, ha rögzítünk két pontot a térben, és vesszük az összes konvex kombinációjukat, akkor pontosan a szakaszuk pontjait kapjuk. Ha pedig rögzítünk három nem egy egyenesre eső pontot, és vesszük az összes konvex kombinációjukat, akkor pontosan annak a háromszöglemeznek a pontjait kapjuk, melynek ők a csúcsai.

Igazolható, hogy ha egy $H \subseteq \mathbb{R}^d$ halmaz összes véges részhalmazának vesszük az összes konvex kombinációját, akkor éppen H konvex burkát kapjuk.

Feladat: Mutassuk meg, hogy H pontosan akkor konvex, ha tetszőlegesen választva véges sok pontot H-ból, az ő konvex burkuk H részhalmaza.

2.3. Konvex politópok. Emlékezzünk vissza arra, hogy mi is egy *hipersík* $\mathbb{R}^d$-ben: Adottak az $a_1, a_2, \ldots, a_d$ számok, melyek közül legalább egy nem nulla, és még egy a_{d+1} szám. Ekkor az $a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_dx_d+a_{d+1}=0$ egyenletet kielégítő $(x_1; \ldots; x_d)$ pontok halmaza egy hipersík.

Konvex testnek nevezünk egy olyan korlátos konvex halmazt, amely nem része semmilyen hipersíknak (azaz nem „lapos").

Definiáljuk a síkbeli konvex sokszög és a térbeli konvex poliéder általánosítását, a *d-dimenziós konvex politópot* úgy, mint véges sok $\mathbb{R}^d$-beli pont konvex burka. Ez a definíció nem tökéletes: a térben, $\mathbb{R}^3$-ban, például megengedi, hogy vegyük három nem egy egyenesre eső pont konvex burkát, azaz egy háromszöget. Ezt nem szeretnénk 3-dimenziós politópnak hívni, ezért a definíciót kiegészítjük: véges sok, nem egy hipersíkba eső $\mathbb{R}^d$-beli pont konvex burkát *d-dimenziós konvex politópnak* hívjuk. Így minden konvex politóp egy konvex test (ehhez lássuk be, hogy valóban korlátos halmaz).

A *csúcs* fogalmát nem definiálom, mert hosszadalmas lenne, szemléletesen meg úgyis érthető. De használni fogom azt a tényt, hogy, ha egy konvex politóp előáll n pont konvex burkaként, akkor csúcsainak halmaza ezen n pont részhalmaza, és így persze legfeljebb n csúcsa van. Miért nem mondom, hogy mind az n pont csúcs? Vegyük például egy kocka 8 csúcsát és a középpontját. A kocka ezen 9 pontnak a konvex burka, mégse szeretném a középpontot is egy csúcsnak hívni.

A síkban két pont mindig egy egyenesre esik. Ha veszünk három, nem egy egyenesre eső pontot, a konvex burkuk egy háromszög. A térben három pont mindig egy síkba esik. Ha veszünk négy, nem egy síkba eső pontot, a konvex burkuk egy tetraéder. Belátható, hogy d dimenzióban tetszőleges d pont egy hipersíkba esik (ez a hipersík nem feltétlenül egyértelmű). Aki meg tud oldani sokismeretlenes lineáris egyenletrendszereket, akkor ezt lássa is be. Ha nem, akkor elhihetjük a térbeli eset alapján.

Gondolkodnivaló: $\mathbb{R}^d$-ben $d+1$ nem egy hipersíkra eső pont konvex burkának a neve *szimplex,* ez talán a legegyszerűbb d-dimenziós konvex politóp. A szimplexnek persze $d+1$ csúcsa, tehát 0-dimenziós lapja van, és $d+1$ hiperlapja, tehát $(d-1)$-dimenziós lapja. Ha $0 \leqslant k \leqslant d$, akkor hány k-dimenziós lapja van? Ehhez a kérdéshez az lenne tisztességes, ha definiálnám egy konvex politóp k-dimenziós lapjait, de nem leszek tisztességes, és a lap értelmezését az Olvasó képzeletére bízom.

2.4. Térfogat. Szinte minden készen áll arra, hogy $\mathbb{R}^d$-ben geometriával foglalkozzunk, kivéve egy mennyiséget, amelyet a geométerek nagyon kedvelnek, a térfogatot. A területet középiskolában valahogy így vezetik be: egy a oldalhosszú négyzet területe a^2. Ha adott egy korlátos konvex síkidom, K, akkor vehetünk véges sok átfedés nélküli, a koordinátatengelyekkel párhuzamos oldalú négyzetet K-ban, és kiszámolhatjuk az összterületüket. Az így megkapható összterületek *szuprémuma* K területe. A szuprémum majdnem ugyanazt jelenti, mint a maximum. Pontosabban: K területe 5, ha nem tudok K-ba úgy véges sok átfedés nélküli, a koordinátatengelyekkel párhuzamos oldalú négyzetet rajzolni, hogy az összterületük nagyobb legyen, mint 5, de bármilyen 5-nél kisebb t számhoz tudok olyan négyzeteket rajzolni, amelyek összterülete legalább t.

A háromdimenziós térben hasonlóan definiáljuk egy konvex test térfogatát, így a következő definíció nem meglepő. Legyenek adottak az $a_1, a_2, \ldots, a_d$ és a $b_1, b_2, \ldots, b_d$ valós számok, melyekre teljesül, hogy $a_i < b_i$ minden i-re. Ekkor az

$$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_d, b_d] := \big\{(x_1; x_2; \ldots; x_d) \in \mathbb{R}^d : \, x_i \in [a_i, b_i]\big\}$$

$\mathbb{R}^d$-beli halmazt tengely-párhuzamos téglának hívjuk, melynek térfogata

$$(b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_d - a_d),$$

ami éppen a két- és háromdimenziós eset általánosítása. Legyen adott $\mathbb{R}^d$-ben egy korlátos konvex halmaz, K. Vegyünk véges sok átfedés nélküli, tengely-párhuzamos téglát K-ban, és számoljuk ki az össztérfogatukat. Az így megkapható össztérfogatok *szuprémuma K térfogata,* amelyet $\mathrm{vol}\,(K)$-val jelölünk.

Feladat: Az $\mathbb{R}^d$-beli K konvex testet nagyítsuk, vagy kicsinyítsük az origóból $\lambda > 0$ aránnyal: $\lambda K := \{\lambda \mathbf{v} : \, \mathbf{v} \in K\}$. Igazoljuk, hogy térfogata így változik:

$$\mathrm{vol}\,(\lambda K) = \lambda^d \,\mathrm{vol}\,(K). \tag{3}$$

Ez éppen a síkban, illetve a térben ismert képlet általánosítása. A térfogatnak még sok szép tulajdonsága van, de azokat nem használom, így most nem sorolom fel.

Tanács: Mindenhez, amiről eddig szó volt, illetve ezután szó esik, bátran készítsünk síkbeli ábrát, esetleg próbáljuk meg elképzelni három dimenzióban, ez hasznos lesz, és az így kapott kép alig csal.

3. Elekes tétele: gömböt a legnehezebb közelíteni

Tegyük fel, hogy a K konvex test tartalmazza a P konvex politópot. Hogyan mérjük, hogy P mennyire van közel K-hoz? Egy természetes válasz az, hogy nézzük meg a különbségük térfogatát. Bizonyítás nélkül kimondom Macbeath 1951-ben belátott tételét: *Legyen K egy $\mathbb{R}^d$-beli konvex test, amelynek a térfogata egyenlő az* 1 *sugarú gömb,* $\mathbf{B}$ *térfogatával. Ekkor tetszőleges $n \geqslant d+1$ természetes számra K tartalmaz olyan n-csúcsú konvex politópot, melynek a térfogata legalább akkora, mint a $\mathbf{B}$-ben tartalmazott legnagyobb térfogatú n-csúcsú konvex politóp térfogata.* Gondoljuk meg, hogy ez éppen azt jelenti, hogy nincs a gömbnél nehezebben közelíthető konvex K test.

Mennyire rosszul közelíthető a gömb? Elekes következő tétele szerint igen rosszul.

3.1. tétel (Elekes, 1986)**.** *Legyen P egy n csúcsú konvex politóp a $\mathbf{B}$ gömbben. Ekkor* $\operatorname{vol}(P) \leqslant \frac{n}{2^d} \operatorname{vol}(\mathbf{B})$.

A tétel d nagy értékére érdekes. Azt mondja, hogy, ha olyan politópot keresek a gömbben, amelynek térfogata a gömb térfogatának mondjuk fele, akkor sok, legalább 2^{d-1} csúcsra van szükségem. Például egy hatdimenziós gömb fél térfogatának a „körbekerítéséhez" legalább 32 csúcs kell. Azt nem állítja a tétel, hogy ennyi elég is.

Mielőtt d dimenzióban tárgyalnánk Elekes csodálatosan egyszerű, elemi bizonyítását, bizonyítsuk be a következő sík-, illetve térbeli állítást, aminek d-dimenziós általánosítása bizonyításának lényege:

Feladat: Adott egy $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ konvex poligon a síkon, ahol jelölje $\mathbf{o}$ az origót. Mutassuk meg, hogy az $[\mathbf{o}, \mathbf{v}_i]$ szakaszok mint átmérők fölé rajzolt körök teljesen lefedik a poligont.

Ugyanez térben: adott egy P konvex poliéder a háromdimenziós térben, melynek csúcsai $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$. Igazoljuk, hogy az $[\mathbf{o}, \mathbf{v}_i]$ szakaszok mint átmérők fölé rajzolt gömbök teljesen lefedik a poliédert.

Ha ezt a két feladatot megoldottuk, akkor nyilván meg tudjuk fogalmazni, és talán be is tudjuk bizonyítani a d dimenziós megfelelőjét. Abból pedig Elekes tétele már könnyen kijön. Most ezt vesszük végig.

Elekes gyönyörű igazolása a következő. Jelölje P csúcsait $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$. Tekintsük minden egyes $\mathbf{v}_i$ csúcsra azt a $\mathbf{B}_i$ gömböt, melynek az $[\mathbf{o}, \mathbf{v}_i]$ szakasz egy átmérője, ahol $\mathbf{o}$ jelöli az origót. A kulcsállítás az, hogy ezen gömbök fedik P-t, azaz

$$P \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathbf{B}_i. \tag{4}$$

Tegyük fel, hogy egy $\mathbf{w}$ pont nincs benne a gömbök uniójában. Ekkor, a Thalesz-tétel megfordítását használva az $\sphericalangle \mathbf{o}\mathbf{w}\mathbf{v}_i$ szögre kapjuk, hogy

$$\sphericalangle \mathbf{o}\mathbf{w}\mathbf{v}_i < \pi/2 \tag{5}$$

minden i-re. (Itt csöndben felhasználtuk, hogy két vektor síkjában az általunk skaláris szorzás segítségével definiált szög megegyezik az iskolában tanult szögfogalommal.) Tekintsük azt a H hipersíkot, mely illeszkedik $\mathbf{w}$-re és merőleges a $\mathbf{w}$ vektorra, azaz $H := \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \langle \mathbf{x}, \mathbf{w} \rangle = |\mathbf{w}|^2\right\}$ (érdemes meggondolni, hogy valóban ez H egyenlete). A H hipersík két félteret határol, jelölje H^- azt a nyílt (tehát H-t nem tartalmazó) félteret, amely az origót tartalmazza, azaz $H^- := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \langle \mathbf{x}, \mathbf{w} \rangle < |\mathbf{w}|^2\}$. Nyilvánvalóan H^- egy konvex halmaz (ez is belátandó). Noha H^- támaszkodik a $\mathbf{w}$ pontra, $\mathbf{w} \notin H^-$.

Feladat: Mutassuk meg, hogy (5) következményeként megkapjuk, hogy $\mathbf{v}_i \in H^-$ minden i-re.

Így viszont P benne van a H^- konvex halmazban, mert H^--beli pontok konvex burka. Ebből következően $\mathbf{w} \notin P$. Ezzel a (4) képletet beláttuk.

Azt, hogy $\mathbf{v}_i \in H^-$, számolással is igazolhatjuk, amit le is írok; ebből látszik majd, hogy a Thálesz-tétel megfordítására sem kell hivatkozni a gondolatmenetben. Mivel $\mathbf{w}$ nincs benne a gömbök uniójában, azért minden i-re $|\mathbf{v}_i/2 - \mathbf{w}| > |\mathbf{v}_i|/2$, amiből négyzetreemeléssel kapjuk, hogy

$$\langle \mathbf{v}_i/2 - \mathbf{w}, \mathbf{v}_i/2 - \mathbf{w} \rangle = |\mathbf{v}_i|^2/4 + |\mathbf{w}|^2 - \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{w} \rangle > |\mathbf{v}_i|^2/4.$$

Így $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{w} \rangle < |\mathbf{w}|^2$, azaz $\mathbf{v}_i \in H^-$.

Végül mivel $\mathbf{B}_i$ sugara legfeljebb $1/2$, így (3) szerint $\operatorname{vol}(\mathbf{B}_i) \leqslant \operatorname{vol}(\mathbf{B})/2^d$. Ugyanakkor (4) szerint $\operatorname{vol}(P) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \operatorname{vol}(\mathbf{B}_i)$, amivel Elekes tételét beláttuk.

Feladat: Bizonyítsuk be Thalész tételét d dimenzióban, a következő formában: adottak az $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$ pontok $\mathbb{R}^d$-ben. Ekkor pontosan azon $\mathbf{w}$ pontokra lesz az $\sphericalangle\mathbf{uwv}$ szög derékszög, amelyeknek az $(\mathbf{u}+\mathbf{v})/2$ ponttól vett távolsága $|\mathbf{u}-\mathbf{v}|/2$. Amelyek távolsága kisebb, azokra az $\sphericalangle\mathbf{uwv}$ szög nagyobb, mint derékszög, amelyek távolsága nagyobb, azokra a szög kisebb, mint derékszög.

4. Gömb közelítése maximális pakolással

Végül térjünk vissza a sírkőfaragók bevezetőben említett igazságához: belátjuk, hogy egy elegendően sok csúccsal rendelkező politóp tudja a gömböt jól közelíteni. Ezúttal gömb és politóp közelségét nem a különbség térfogatával mérjük, hanem egy másik, szintén természetes módon. Ha a P konvex politópra teljesül, hogy

$$\mathbf{B}(\rho) \subseteq P \subseteq \mathbf{B}, \tag{6}$$

ahol $0 < \rho < 1$ egy 1-hez közeli szám, akkor jogosan mondhatjuk, hogy P közel van a gömbhöz.

4.1. tétel. *Tetszőleges d dimenzióra és $0 < \rho < 1$ számra van olyan n csúcsú P politóp, melyre (6) teljesül, ahol*

$$n \leqslant \left(\frac{3-\rho}{1-\rho}\right)^d. \tag{7}$$

Tételünk belátásához szükségünk lesz egy alapvető állításra a konvexitás területéről, amely szemléletesen egyáltalán nem meglepő, de pontos bizonyítása mégis meglepően hosszadalmas, ezért mellőzzük.

Rögzítsünk egy $0 < \rho < 1$ számot. Tetszőleges $\mathbf{w}$ pontra a $\mathbf{B}(\rho)$ gömb határán, azaz olyan pontra, melyre $|\mathbf{w}| = \rho$, jelölje $H_{\mathbf{w}}$ azt a hipersíkot, mely $\mathbf{w}$-ben érinti $\mathbf{B}(\rho)$-t, azaz amelynek pontosan egy közös pontja van $\mathbf{B}(\rho)$-val. Belátható, hogy ennek egyenlete $H = \left\{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d : \langle \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle = \rho^2\right\}$. Jelölje továbbá $F_{\mathbf{w}}$ azt a $H_{\mathbf{w}}$ által határolt félteret (H-t is beleértve), amely nem tartalmazza az origót.

4.2. állítás. *Legyen P a $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ pontok konvex burka. Ekkor P akkor és csak akkor fedi az origó középpontú ρ sugarú gömböt, ha a gömb határának bármely $\mathbf{w}$ pontjában húzott érintő hipersíknak az origóval átellenes oldalán is van legalább egy $\mathbf{v}_i$. Formálisan: $\mathbf{B}(\rho) \subset P$ akkor, és csak akkor, ha minden $\mathbf{w}$ pontra, amelyre $|\mathbf{w}| = \rho$, van olyan $i \in \{1, \dots, n\}$, amelyre $\mathbf{v}_i \in F_{\mathbf{w}}$.*

Illusztrációként érdemes belátni az állítást a síkon.

Ezután bebizonyítjuk a 4.1. tételt. Egy olyan politópot akarunk találni, amely n pont konvex burkaként áll elő, ahol ezek a pontok egymáshoz nincsenek túl közel, így „egyenletesen oszlanak el” a gömbben. Rögzítünk ezért egy $\delta > 0$ számot, amelyet majd később választunk meg, és keresünk a $\mathbf{B}$ gömbben egy olyan ponthalmazt, amelyben bármely két pont távolsága legalább δ, vagy másképpen, a pontok körüli $\delta/2$ sugarú gömbök átfedés nélküliek. Így persze a $\delta/2$ sugarú gömbök uniója benne van a $\mathbf{B}(1 + \delta/2)$ gömbben. Ezt úgy hívják, hogy $\delta/2$ sugarú gömbök *pakolása* $\mathbf{B}(1 + \delta/2)$-ben.

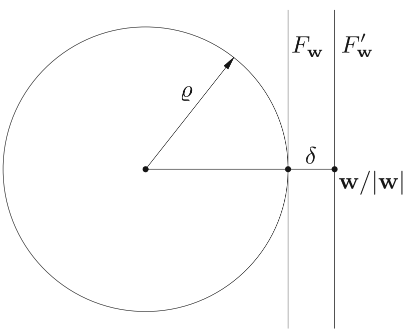
Akárhány gömböt nem vehetünk, mivel egy $\delta/2$ sugarú gömb térfogata $(\delta/2)^d \operatorname{vol}(\mathbf{B})$, míg az őket tartalmazó $\mathbf{B}(1 + \delta/2)$-é $(1 + \delta/2)^d \operatorname{vol}(\mathbf{B})$, lásd (3). Ezért

$$n \leqslant (1 + \delta/2)^d / (\delta/2)^d. \tag{8}$$

Szeretnénk, ha ezek a kis gömbök, amennyire lehet, „kitöltenék” $\mathbf{B}$-t, ezért egy *maximális pakolást* veszünk, azaz olyan $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ ponthalmazt $\mathbf{B}$-ben, amelyhez már nem vehető hozzá újabb pont úgy, hogy az mindegyik $\mathbf{v}_i$-től legalább δ távol legyen. Azaz a $\mathbf{v}_i$-k körüli δ sugarú gömbök fedik $\mathbf{B}$-t.

Most belátjuk, hogy $\delta = 1 - \rho$ választással minden $\mathbf{w}$ pontra, amelyre $|\mathbf{w}| = \rho$, van olyan $i \in \{1, \dots, n\}$, amelyre $\mathbf{v}_i \in F_{\mathbf{w}}$. Ez, a 4.2. állítás szerint elegendő ahhoz, hogy a $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ pontok konvex burka tartalmazza $\mathbf{B}(\rho)$-t.

Tekintsünk egy $\mathbf{w}$ vektort, melynek hossza ρ, és tegyük fel, hogy az $F_{\mathbf{w}}$ féltérben nincs $\mathbf{v}_i$. Ez esetben a δ sugarú gömbök mindegyikének a középpontja az $F_{\mathbf{w}}$ féltér komplementer félterében van. Toljuk el az $F_{\mathbf{w}}$ félteret úgy, hogy a határoló



2. ábra. $\mathbf{B}(\rho)$ külső érintőféltere $F_{\mathbf{w}}$

hipersík δ távolsággal „beljebb” kerül a féltérbe, és jelöljük az így kapott félteret $F'_{\mathbf{w}}$-vel (*2. ábra*). Ekkor a δ sugarú gömbök uniója az $F'_{\mathbf{w}}$ féltér komplementerében van, és így nem tartalmazza a $\mathbf{w}/|\mathbf{w}| \in \mathbf{B}$ pontot. Tehát $\mathbf{w}/|\mathbf{w}|$ minden $\mathbf{v}_i$-től legalább δ távol van, ami ellentmond annak, hogy a pakolásunk maximális. Megkaptuk tehát, hogy a $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ pontok konvex burka tartalmazza a $\mathbf{B}(\rho)$ gömböt.

Végül (8) garantálja a (7) képlet helyességét, mert $\delta = 1 - \rho$, amivel a 4.1. tételt beláttuk.

Zárásul egy kis számolás, amely összehasonlítja a két tételt. Tíz dimenzióban milyen nagy n-nel garantálja a 4.1. tétel olyan $\mathbf{B}$-beli legfeljebb n-csúcsú konvex politóp, P létezését, amelynek térfogata legalább $\mathrm{vol}\,(\mathbf{B})/2$? Abból, hogy $\mathbf{B}(\rho) \subseteq P$, csak annyi következik, hogy $\rho^d\,\mathrm{vol}\,(\mathbf{B}) \leqslant \mathrm{vol}\,(P)$. Tehát a $\rho = \sqrt[10]{1/2} \approx 0{,}933$ sugarú gömböt kell tartalmaznia P-nek, amit kb. $n = 7{,}8 \cdot 10^{14}$ csúccsal tud elérni a tétel. Mindeközben a 3.1. tétel szerint n legalább 512. A két korlát között van némi hézag. Szerencsére a bemutatottaknál erősebb tételek is ismertek, de az ízüket ez a kettő is remekül visszaadja.

Az érdeklődő Olvasónak a magasdimenziós geometriáról a [2] remek könyveket javaslom.

A cikk megírásában, a gondolatmenetek tisztázásában sokat segített *Surányi László* és *Lakos Gyula.* Köszönöm nekik!

A cikk az Emberi Erőforrások Minisztériuma ÚNKP-17-4 kódszámú Új Nemzeti Kiválóság Programjának támogatásával készült.

Hivatkozások

[1] Borsányi Ákos: *Miért lehet a Fermat-prím oldalú szabályos sokszögeket megszerkeszteni?* KöMaL 1994/január: 1. rész; KöMaL 1994/március: 2. rész.

[2] J. Pach – P. Agarwal: *Combinatorial Geometry* (Wiley); J. Matoušek: *Lectures on Discrete Geometry* (Springer); G. Horváth Á. – Lángi Zs.: *Kombinatorikus Geometria* (Polygon).

Naszódi Márton

Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

I. rész

1. *a*) Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\log_{2^x+1}\left(2^{x+1}+5\right) = 2. \qquad (\textit{6 pont})$$

b) A LOTTÓ (90 számból 5 húzása) megváltoztatására készülnek. Két javaslat van. Az egyik 90-ből 4 szám húzását javasolva a régi módon, a másik meg 45 számból

4 húzását javasolja a sorrend figyelembe vételével, de ez lehetővé tenné, hogy ugyanazt a számot többször is ki lehessen húzni, azaz a már húzott számot ismét visszatennék. Azt akarnák elfogadni, amelyik játék esetében kevesebb az esély a telitalálatra. Zsebszámológép nélkül (!) határozzuk meg, hogy melyiket válasszák. (*6 pont*)

2. *a*) Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet, ahol p valós paraméter:

$$3x + 2p = 5\sqrt{px}. \qquad (7\ pont)$$

b) Egy négyszögnek, mely egyidejűleg érintő és húrnégyszög is, az egyik oldala 5 cm és valamelyik oldaltól kezdve pozitív körbejárás szerint véve az oldalakat mértani sorozat elemeit kapjuk. Mekkora a másik három oldal és milyen négyszögről van szó? (*6 pont*)

3. *a*) Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} - 1 = 1 - \dfrac{y}{x}, \\ x^8 + 2y^6 = x^6 + 2y^8. \end{cases} \qquad (6\ pont)$$

b) Adjuk meg az összes p pozitív prímszámot, melyre a

$$4x^2 - 4(2p+1)x + (4p^2 - p) = 0$$

egyenlet gyökeinek különbsége egész szám. (*7 pont*)

4. *a*) Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

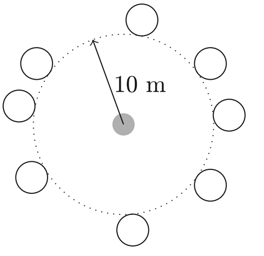
$$\sin x + \sqrt{3} \cdot \cos x = 4 \cdot \sin x \cdot \cos x. \qquad (7\ pont)$$

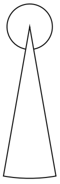
b) Mekkora területet zárnak be az $y = x$ egyenes és a $y = x^3 - 9x^2 + 9x$ görbe? (*6 pont*)

II. rész

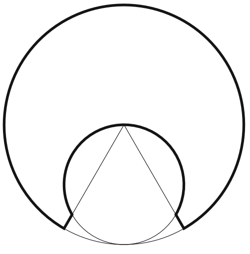
5. Az $y = x^3 - 6x^2 + 15x + c$ függvény egyik érintőjének egyenlete $y = 6x - 5$. Mekkora a c értéke? (*16 pont*)

6. A *rajz* szerint egy 10 m sugarú kör közepén állunk puskával a kézben, amit 8 darab, 1 m sugarú tölgyfa vesz körbe nem egyenletesen elhelyezkedve (a rajz nem a valós elhelyezkedést mutatja). Véletlenszerűen 5 lövést leadva mekkora annak a valószínűsége, hogy legalább 3 lövés kijut a „fa ketrecből”? (*16 pont*)





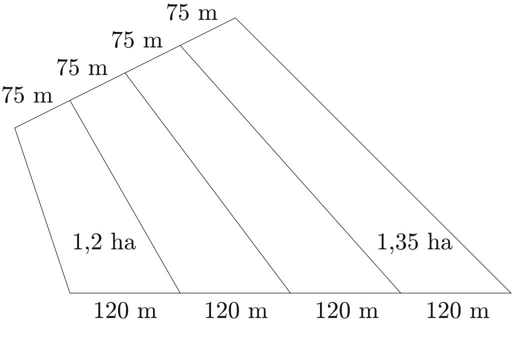
7. Kugli játékhoz könnyen boruló bábut terveztünk. A *rajz* a keresztmetszeti képét ábrázolja. Veszünk egy $R = 30$ cm sugarú gömböt, amiből kivágunk egy a gömb középpontjából induló kúpot úgy, hogy a gömb felületén egy 225π cm^2 felületdarabot vágunk ki. Ezután egy $r = 5$ cm sugarú gömböt teszünk a csúcsra úgy, hogy a kis gümb középpontja pont a csúcsra illeszkedjék (persze, előtte a szükséges lyukat kivágjuk). Mekkora az így kapott test térfogata? (*16 pont*)



8. Egy nyakláncra medált terveztünk, melyet a rajz mutat, ahol a medált a vastag vonalak határolják. A nagy kör sugara $R = 4$ cm, a kicsi kör belülről érinti a nagy kört és sugara $r = 2$ cm, amit kivágunk. Hogy ne legyen hegyes a medál, ezért a nagy kör középpontjából szimmetrikusan 60° szög szögtartományában levő részeket is levágjuk. Mekkora a keletkezett medál kerülete, területe?

(*16 pont*)

9. Az *ábra* egy földterület rajzát adja, amelyen 4 tulajdonos osztozik. A nyilvántartásban a középső két terület nagysága olvashatatlan. Mekkora a hiányzó két terület nagysága?



(*16 pont*)

Szoldatics József
Budapest

Megoldásvázlatok a 2018/8. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *a*) *Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet:*

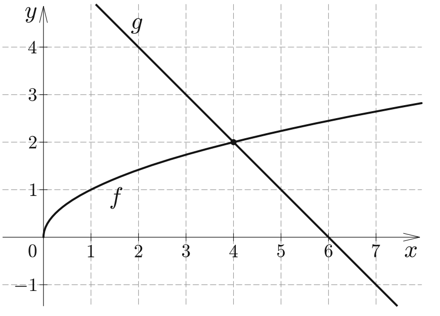
$$\sqrt{x} = 6 - x.$$ (*5 pont*)

b) Oldjuk meg a $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$ *intervallumon az alábbi egyenletet:*

$$\sin^2 x + \cos x = -1. \qquad \textit{(6 pont)}$$

Megoldás. *a) I. megoldás.* A négyzetgyök függvény értelmezési tartománya miatt $x \geqslant 0$, értékkészlete miatt $x \leqslant 6$, ezért az egyenlet gyökei csak a $[0;6]$ halmaz elemei lehetnek. Az egyenlet mindkét oldalát négyzetre emelve és rendezve: $x^2 - 13x + 36 = 0$, melynek gyökei $x_1 = 4$ és $x_2 = 9$. Utóbbi nem eleme a $[0;6]$ intervallumnak, ezért nem lehet az eredeti egyenlet gyöke. A $[0;6]$ intervallumon ekvivalens átalakításokat végeztünk, így csak $x_1 = 4$ gyöke az eredeti egyenletnek.

II. megoldás. Tekintsük az egyenlet két oldalát, mint függvények hozzárendelési szabályát. A bal és jobb oldal függvényei: $f(x) = \sqrt{x}$ és $g(x) = 6 - x$. Ábrázoljuk a függvényeket ugyanabban a derékszögű koordináta-rendszerben.



A grafikonoknak egy közös pontja van, annak első koordinátáját leolvasva: $x_1 = 4$. Mivel $f(4) = g(4) = 2$, ezért $x_1 = 4$ valóban megoldás.

b) A $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ azonosság alapján $1 - \cos^2 x + \cos x = 1$, melyet rendezve és szorzattá alakítva $\cos x(\cos x - 1) = 0$.

Egy szorzat pontosan akkor 0, ha valamelyik tényezője 0, ezért az előbbi egyenlet a megadott intervallumon akkor teljesül, ha $x_1 = 0$ vagy $x_2 = -\frac{\pi}{2}$, melyet behelyettesítéssel történő ellenőrzés, vagy ekvivalens átalakításokra történő hivatkozás igazol.

2. *A májusban megírt emelt szintű matematika érettségi dolgozatok* 1. *feladatának eredményessége látható az alábbi táblázatban:*

A vizsgált év	2013	2014	2015	2016	2017
Eredményesség (%)	84	88	79	86	83

a) Határozzuk meg az eredményességek terjedelmét, átlagát és szórását.

(4 pont)

Csaba érettségi bizonyítványában az alábbi osztályzatok szerepelnek: 3; 4; 5; 4; 3; 4.

b) Legkevesebb hány osztályzatot kellene törölni a bizonyítványából, hogy az osztályzatok mediánja megváltozzon? *(4 pont)*

Csaba 12. *osztályos év végi bizonyítványában* 7 db 4-*es és* 5 db 5-*ös osztályzat szerepel, melyek közül véletlenszerűen kiválasztunk* 3 *osztályzatot.*

c) Igazoljuk, hogy ha az osztályzatokat visszatevés nélkül *választjuk ki, akkor annak a valószínűsége, hogy* 2 db 4-*est és* 1 db 5-*öst választottunk* $\frac{21}{44}$. *(4 pont)*

Megoldás. *a*) A keresett terjedelem $(88-79=)9$, az átlag $\left(\frac{420}{5}=\right)84$, a szórás pedig

$$\sqrt{\frac{0^2+4^2+5^2+2^2+1^2}{5}}=\sqrt{9{,}2}\approx 3{,}03.$$

b) Az osztályzatok mediánja 4.

Ha a jegyek közül egyet törlünk ki (1 db 3-ast vagy 1 db 4-est vagy 1 db 5-öst), akkor a medián ugyanúgy 4 marad.

Ha a jegyek közül kettőt törlünk ki, akkor a medián csak úgy változhat meg, ha a két középső osztályzat átlaga nem 4 lesz, ami 2 esetben is teljesül (3; 3; 4; 5 vagy 3; 3; 4; 4).

Ezért legkevesebb 2 osztályzatot kell kitörölni, hogy a medián megváltozzon.

c) A 12 osztályzat közül hármat $\binom{12}{3}(=220)$-féleképpen választhatunk ki. Ez az összes eset száma.

A 7 db 4-esből 2-őt és az 5 db 5-ösből 1-et $\binom{7}{2}\cdot\binom{5}{1}(=105)$-féleképpen választhatunk ki. Ez a kedvező esetek száma. A keresett valószínűség:

$$\frac{\binom{7}{2}\cdot\binom{5}{1}}{\binom{12}{3}}=\frac{21}{44}.$$

3. *Egy paralelogrammában az átlóhosszak négyzetének összege* 74,45, *az átlóhosszak négyzetének különbsége* 32,13.

a) *Számítsuk ki a paralelogramma átlóinak hosszát.* (*4 pont*)

b) *Igaz-e, hogy a paralelogramma átlóinak felezőpontján átmenő, annak hosszabbik oldalával párhuzamos egyenes két egyenlő területű részre osztja a paralelogrammát?* (*4 pont*)

c) *Határozzuk meg a paralelogramma szomszédos oldalhosszainak négyzetösszegét.* (*6 pont*)

Megoldás. *a*) *I. megoldás.* Jelölje a paralelogramma átlóit e és f, ekkor a feladat szövege alapján megoldandó az alábbi egyenletrendszer:

$$\left.\begin{aligned}e^2+f^2&=74{,}45,\\ e^2-f^2&=32{,}13.\end{aligned}\right\}$$

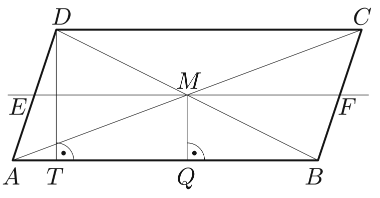
A két egyenletet összeadva: $2e^2=106{,}58$. Ebből $e=7{,}3$, majd $f=4{,}6$.

II. megoldás. Jelölje a paralelogramma átlóit e és f, ekkor a feladat szövege alapján megoldandó az alábbi egyenletrendszer:

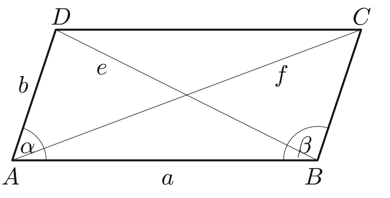
$$\left.\begin{aligned}e^2+f^2&=74{,}45,\\ e^2-f^2&=32{,}13.\end{aligned}\right\}$$

Az első egyenletből $f^2=74{,}45-e^2$, ezt a második egyenletbe helyettesítve: $2e^2=$ $=106{,}58$. Ebből $e=7{,}3$, majd $f=4{,}6$.

b) A paralelogramma átlói felezik egymást, ezért a BDT háromszög a BMQ háromszögnek B középpontú, 2-szeres nagyítású képe. Ezért az $ABFE$ paralelogramma magassága ugyanakkora, mint az $EFCD$ paralelogramma magassága. Mivel $AB = EF$, így igaz, hogy $T_{ABEF} = T_{EFCD}$.



b)



c)

c) Az *ábra* jelöléseit használva írjuk fel az ABD és ABC háromszögekre a koszinusztételt:
az ABD háromszögben: $e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$,
az ABC háromszögben: $f^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta$.

Mivel $ABCD$ paralelogramma, ezért $\cos\beta = \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$. Ezért $f^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha$. Így $e^2 + f^2 = 2a^2 + 2b^2$, ahonnan $a^2 + b^2 = \frac{e^2+f^2}{2} = 37{,}225$.

4. *Egy konyhai papírtörlő tekercs* 80 *darab* 0,5 mm *vastag téglalap alakú lapból áll. Egy papírlap* 240 mm *hosszú és* 230 mm *széles téglalap, melyek a szélességüknél perforációs (tépést megkönnyítő) résszel kapcsolódnak egymáshoz. A tekercs közepén lévő üres henger átmérője* 40 mm.

a) *Hány teljes fordulatot tesz meg az üres henger, ha az egész papírtekercset körbe letekerjük? (A perforációs részek méretétől tekintsünk el.)* (*9 pont*)

Az egyik ismert márkájú papírtörlő tekercs lapjaira mintákat is nyomtatnak. A gyártósoron 8 *különböző mintából csak* 3*-féle mintát használnak fel egy lapra. A gyártósoron az összes lehetséges mintahármast beállítják a gépeken, amelyeket egymás után folyamatosan nyomtatnak a papírtörlő lapjaira.*

b) *Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy adott tekercs egy lapját kiválasztva a tekercsen van még egy ugyanilyen mintázatú másik lap?* (*5 pont*)

Megoldás. *a*) A 80 téglalap alakú papírlap összesen $80 \cdot 240 = 19\,200$ mm $=$ $= 19{,}2$ m hosszú. Az első réteg hossza az üres hengeren $2 \cdot 20 \cdot \pi (\approx 125{,}66)$ mm. A második réteg hossza az üres hengeren: $2 \cdot 20{,}5 \cdot \pi (\approx 128{,}81)$ mm.

Észrevehető, hogy az egyes rétegek hosszának összege az üres hengeren:

$$2\pi\Big[20 + 20{,}5 + 21 + \ldots + \big(20 + (n-1) \cdot 0{,}5\big)\Big],$$

ahol n a teljes fordulatok száma. A szögletes zárójelben egy számtani sorozat első n tagjának összege van ($a_1 = 20$, $d = 0{,}5$).

$$S_n = \frac{40 + (n-1)\cdot 0{,}5}{2}\cdot n = 0{,}25n^2 + 19{,}75n,$$

így megoldandó a $0{,}5\pi \cdot n^2 + 39{,}5\pi \cdot n - 19\,200 = 0$ egyenlet. Az egyenlet gyökei $n_1 \approx 77{,}9$ és $n_2 \approx -156{,}9$, melyek közül utóbbi nyilván nem lehet a feladat megoldása.

Tehát az üres henger 77 teljes fordulatot tesz meg, ha az egész papírtekercset körbe letekerjük.

b) A gyártósoron $\binom{8}{3}$ $(=56)$-féle különböző mintát használnak fel, ez az összes eset száma. A 80 lapból álló papírtörlő tekercsen $(80-56=)24$ minta két papírlapon is szerepel, így a kedvező esetek száma 48.

Az ismétlődés független attól, hogy egy adott tekercsen melyik mintával kezd a gép. Tehát a keresett valószínűség $\frac{48}{80} = 0{,}6$.

II. rész

5. *A térképrészleten egy háromszög alakú telek látható, melynek Toldi úti oldala* 50 m, *Petőfi úti oldala* 65 m *és Mikszáth úti oldala* 75 m *hosszú. A telket Csaba, László és Levente örökli, akik megállapodnak, hogy a Toldi úttal párhuzamos kerítésekkel három egyenlő területű részre osztják fel a telket úgy, hogy mindenkinek legyen kijárata a Mikszáth útra, a főútra.*

a) *Milyen hosszú drótkerítést kell venniük a telkek szétválasztásához?* (*6 pont*)

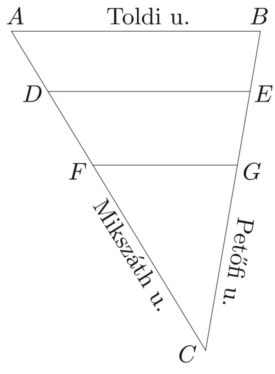
A helyi építési szabályzat nem engedélyezi olyan épület építését, amelynek két szomszédos fala által bezárt szög 60°*-nál kisebb.*

b) *Kiadható-e építési engedély arra az épületre, amelyet úgy terveznek, hogy a Toldi és a Mikszáth utca sarkán fog állni, és külső falai ezzel a két utcával párhuzamosak lesznek?* (*4 pont*)

Csaba, László és Levente megállapodtak abban, hogy a telek felosztása után kockadobással döntik el, hogy milyen sorrendben választanak a telkek közül. Mindenki dob egyet egy szabályos dobókockával, és ha nincs azonos dobás, akkor a legnagyobbat dobó választ először, majd a második legnagyobbat dobó másodszor, végül a legkisebb számot dobó kapja a maradék telekrészt. Ha van egyenlő a dobott számok között, akkor a dobás érvénytelen és addig dobnak újra, amíg nem lesz három különböző eredmény.

c) *Mekkora valószínűséggel választ először Levente telket?* (*6 pont*)

Megoldás. *a*) Tekintsük a feladat szövege alapján az *ábrát.*



Mivel a fiúk egyenlő területű részekre osztják a telket, ezért $T_{ABED} = T_{DEGF} = T_{FGC} = \frac{1}{3}T_{ABC}$. Az AB oldallal párhuzamos felosztás és a megfelelő szögek páronkénti egyenlősége miatt az $ABC\triangle \sim FGC\triangle$, így a hasonló síkidomok területének arányára vonatkozó tétel miatt

$$FG = \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot AB(\approx 28{,}9 \text{ m}).$$

Hasonlóan az AB oldallal párhuzamos felosztás és a megfelelő szögek páronkénti egyenlősége miatt az $ABC\triangle \sim DEC\triangle$, így a hasonló síkidomok területének arányára vonatkozó tétel miatt

$$DE = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot AB(\approx 40{,}8 \text{ m}).$$

A telkek szétválasztásához a fiúknak kb. 69,7 m hosszú drótkerítést kell venniük.

b) Akkor nem adható ki építési engedély az építendő épületre, ha az ABC háromszög A csúcsánál lévő α szöge $60°$-nál kisebb. Az α szög meghatározásához az ABC háromszögben a koszinusztételt alkalmazva:

$$65^2 = 50^2 + 75^2 - 2 \cdot 50 \cdot 75 \cdot \cos\alpha, \quad \text{ahonnan} \quad \cos\alpha = \frac{13}{25}.$$

Mivel

$$\cos 60° = \frac{1}{2} < \cos\alpha = \frac{13}{25},$$

ezért $\alpha < 60°$, tehát az építési engedély nem adható ki.

c) A keresett valószínűség a kedvező esetek számának és az összes eset számának hányadosaként számítható ki. Az összes esetet azok a dobások alkotják, amikor mindhárom dobás különböző. Ezek száma $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$. Vizsgáljuk a kedvező esetek számát Levente dobása szerint:

Ha Levente 1-est vagy 2-est dob, akkor a kedvező esetek száma 0.

Ha Levente 3-ast dob, akkor a kedvező esetek száma $2 \cdot 1 = 2$.

Ha Levente 4-est dob, akkor a kedvező esetek száma $3 \cdot 2 = 6$.

Ha Levente 5-öst dob, akkor a kedvező esetek száma $4 \cdot 3 = 12$.

Ha Levente 6-ost dob, akkor a kedvező esetek száma $5 \cdot 4 = 20$.

Így a kedvező esetek száma 40.

Ezért a keresett valószínűség: $\frac{40}{120} = \frac{1}{3}$.

6. *Adott a valós számok halmazán értelmezett f és g függvény:*

$$f(x) = \frac{x^3}{8} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} \quad \textit{és} \quad g(x) = -x^2 + 2x.$$

a) Adjuk meg az f függvény lokális szélsőértékhelyeit. (*5 pont*)

b) Igazoljuk, hogy az f és g függvények grafikonjának három közös pontja van. (*5 pont*)

c) Számítsuk ki az f és g függvények grafikonja által közbezárt terület nagyságát az $x_1 = 0$ és $x_2 = 2$ határok között. (*6 pont*)

Megoldás. *a*) Az f függvénynek csak ott lehet lokális szélsőértéke, ahol f'-nek zérushelye van.

$$f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - x + \frac{1}{2},$$

így megoldandó a

$$\frac{3}{8}x^2 - x + \frac{1}{2} = 0$$

egyenlet.

A deriváltfüggvény zérushelyei: $x_1 = \frac{2}{3}$ és $x_2 = 2$. Mivel a deriváltfüggvény $x < \frac{2}{3}$ és $x > 2$ esetén pozitív, $\frac{2}{3} < x < 2$ esetén pedig negatív, ezért az f függvénynek $x_1 = \frac{2}{3}$-ban lokális maximumhelye, $x_2 = 2$-ben pedig lokális minimumhelye van.

b) A metszéspontok meghatározásához megoldandó az

$$\frac{x^3}{8} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} = -x^2 + 2x$$

egyenlet. Az előbbi egyenletrendezés és szorzattá alakítás után: $x(x^2 + 4x - 12) = 0$. Egy szorzat pontosan akkor 0, ha valamelyik tényezője 0, ezért az egyenlet gyökei: $x_1 = 0$; $x_2 = -6$ és $x_3 = 2$.

Tehát az f és g függvények grafikonjának valóban három közös pontja van.

c) Mivel a felvett függvényértékek a megadott határok között pozitívak és a g függvény grafikonja az f függvény grafikonja fölött helyezkedik el, ezért a keresett T területre fennáll:

$$T = \int_0^2 \left[(-x^2 + 2x) - \left(\frac{x^3}{8} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}\right)\right] \mathrm{d}x = \int_0^2 \left(-\frac{x^3}{8} - \frac{x^2}{2} + \frac{3x}{2}\right) \mathrm{d}x =$$

$$= \left[-\frac{x^4}{32} - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^2}{4}\right]_0^2 = \left(-\frac{2^4}{32} - \frac{2^3}{6} + \frac{3 \cdot 2^2}{4}\right) = \frac{7}{6}.$$

7. *a*) *Hány különböző* 124 *jegyű tízes számrendszerbeli természetes szám képezhető* 62 db *nulla és* 62 db *egyes számjegyből? (Elegendő csak a kiszámítás módját megadni.)* (*3 pont*)

b) *Mutassuk meg, hogy a* 62 db *nullából és* 62 db *egyesből álló* 124*-jegyű tízes számrendszerbeli természetes számok egyike sem lehet négyzetszám.* (*5 pont*)

c) *Határozzuk meg annak a számrendszernek az alapszámát, amelyben a* 124 *felírható olyan* 3 *jegyű számként, melynek minden számjegye azonos.* (*8 pont*)

Megoldás. *a*) Mivel a képzett szám 124 jegyű, ezért első jegye csak 1-es lehet. Annyi ilyen szám képezhető, ahányféleképpen a maradék 62 db nullát és 61 db 1-est sorba lehet rendezni.

A keresett sorrendek (és egyben képezhető számok) száma: $\frac{123!}{62!\cdot 61!}$.

b) Egy természetes szám 3-mal osztva 0, 1 vagy 2 maradékot adhat.

3-mal osztható szám négyzete biztosan osztható 3-mal, mert $(3k)^2 = 9k^2$.

3-mal osztva 1 maradékot adó szám négyzete 3-mal osztva biztosan 1 maradékot ad, mert $(3k+1)^2 = 9k^2 + 6k + 1$.

3-mal osztva 2 maradékot adó szám négyzete 3-mal osztva biztosan 1 maradékot ad, mert

$$(3k+2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3\cdot(3k^2 + 4k + 1) + 1.$$

Mivel bármely képzett számban a számjegyek összege 62, mely 3-mal osztva 2 maradékot ad, ezért biztos, hogy a képzett szám nem lehet négyzetszám.

c) Jelölje a keresett számrendszer alapszámát x, a szám alakját ebben a számrendszerben $\overline{AAA}$. Az $\overline{AAA}$ alaki értékű szám valódi értéke az x alapú számrendszerben: $Ax^2 + Ax + A = A(x^2 + x + 1)$, tehát a szám osztható A-val.

A 124 prímtényezős felbontása $2^2\cdot 31$, így az A szám lehetséges értékei 124 pozitív osztói: 1; 2; 4; 31; 62; 124. Mivel egy számrendszer alapszáma legalább 2, $x^2 + x + 1 \geqslant 7$, ezért A legfeljebb $\left[\frac{124}{7}\right] = 17$ lehet.

Ha $A = 1$, akkor az $x^2 + x + 1 = 124$ másodfokú egyenletnek nincs egész megoldása.

Ha $A = 2$, akkor az $x^2 + x + 1 = 62$ másodfokú egyenletnek nincs egész megoldása.

Ha $A = 4$, akkor az $x^2 + x + 1 = 31$ másodfokú egyenlet megoldásai: $x_1 = -6$ és $x_2 = 5$.

Negatív szám nem lehet a számrendszer alapszáma, ezért a keresett alapszám 5.

Ebben a számrendszerben valóban létezik a 444_5 szám.

8. *Az egyetemi felvételi eljárásban július közepéig lehet módosítani azoknak a szakoknak a sorrendjét, amelyekre felvételizni szeretnénk. Márta* 5 *különböző államilag támogatott képzésre jelentkezett, és közülük három szak esetén beadta a jelentkezést az önköltséges képzésre is.*

a) *Hány különböző sorrendben adhatja be a módosításnál ezeket a szakokat, ha az nem fordulhat elő, hogy egy bizonyos szakból előkelőbb helyen áll az önköltséges képzés, mint az államilag finanszírozott?* (*5 pont*)

Márta a módosítás után sajnos csak az önköltséges képzésre jutott be, amelynek díja félévenként 250 000 Ft. *Szülei az elmúlt* 5 *évben havi* 20 000 Ft*-ot tettek félre erre a célra. A megtakarítás* 5 *évig egy olyan számlán volt, amely havonta* 1%*-ot kamatozott, és az összeget havonta tőkésítették.*

b) *Legfeljebb hány félévnyi tandíjra elegendő a teljes lekötött összeg?* (*5 pont*)

Márta úgy döntött, hogy a lekötött összegből 500 000 Ft*-ot rögtön berak a bankba, majd a következő év elején még újabb* 500 000 Ft*-ot hozzátesz. Ebben a konstrukcióban a kamatot évente tőkésítették, azaz minden év végén adták hozzá a bent lévő összeghez a kamatot.*

c) Hány százalék volt az éves kamat, ha Márta a második év végén csak a kamatokból 76 250 Ft*-ot tudott felvenni?* *(7 pont)*

Megoldás. *a*) Jelölje a különböző államilag támogatott képzéseket A, B, C, D, E, és a megfelelő önköltséges képzéseket a, b, c. A beadott 8Íkülönböző szaknak összesen $8!(=40320)$-féle sorrendje lehet. Minden olyan lehetséges sorrendhez, amelyben A megelőzi a-t (a szimmetria miatt) pontosan egy olyan sorrend tartozik, amely csak annyiban különbözik, hogy A-t és a-t felcseréljük, ezért a lehetséges sorrendek számát osztanunk kell 2-vel.

Hasonlóan osztanunk kell 2-vel B és b, valamint C és c sorrendjei miatt is, ezért a keresett sorrendek száma $\frac{8!}{2^3}-1(=7!-1)=5039$.

b) A bankba havonta betett összegek egy 1,01 hányadosú mértani sorozat egymást követő tagjai, ahol a sorozat első tagja $(20\,000\cdot 1{,}01=)$ 20 200. Az 5 év alatt összegyűjtött összeg a mértani sorozat első 60 tagjának összege, ezért ezt az összeget kell kiszámolni. A mértani sorozat összegképletébe behelyettesítve:

$$S_{60}=20\,200\cdot\frac{1{,}01^{60}-1}{1{,}01-1}\approx 1\,649\,727\ (\mathrm{Ft}).$$

Ez az összeg 6 félévre elegendő.

c) Jelölje a befizetett összeg éves növekedését p. Ekkor az első év elején befizetett összeg p^2-szeresére, a második év végén befizetett összeg p-szeresére nő. Ezért megoldandó az $500\,000\cdot x^2+500\,000\cdot x=1\,076\,250$ egyenlet. Az egyenletet rendezve és egyszerűsítve:

$$400\cdot x^2+400\cdot x-861=0.$$

Az előbbi másodfokú egyenlet megoldásai: $x_1=1{,}05$ és $x_2=-2{,}05$, melyek közül utóbbi nyilván nem lehet a feladat megoldása. Tehát az éves kamat 5% volt.

9. *Az Oroszországban rendezett labdarúgó világbajnokságra nagy létszámú horvát baráti társaság utazott ki. Az első három horvát mérkőzést a társaság* 90-90-90%*-a tekintette meg.*

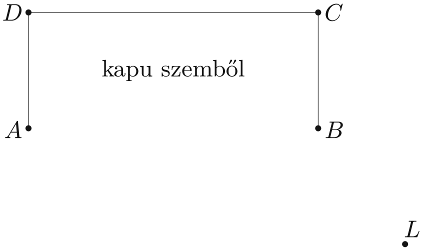
a) Legalább, illetve legfeljebb a szurkolók hány százaléka láthatta mindhárom mérkőzést? *(4 pont)*

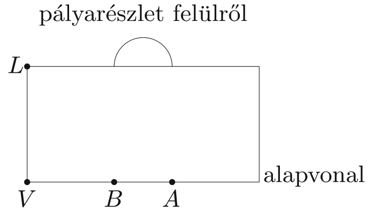
Horvátország az első mérkőzését Nigéria ellen vívta a kalinyingrádi (régi porosz Königsberg) stadionban. Egy sorban 12 *horvát szurkoló ült, akik közül néhányan kézfogással köszöntötték egymást.*

b) Lehetséges-e, hogy az egyes szurkolók 11, 10, 11, 6, 9, 11, 7, 4, 8, 11, 5, 11 *másik szurkolóval fogtak kezet?* *(3 pont)*

Egy szabadrúgás alkalmával az L pontban lévő labda éppen 16,5 m*-re van az alapvonaltól. Az alapvonalnak a labdához legközelebb levő V pontja ugyancsak*

16,5 m-*re van az alapvonalon elhelyezkedő* 7,32 m *széles és* 2,44 m *magas kapu labdához közelebbi függőleges kapufájának* B *talppontjától.*



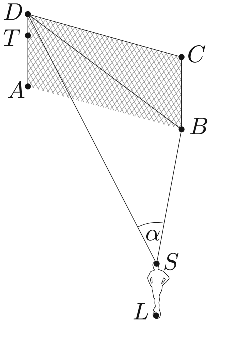


c) *Mekkora szögben látja a* L *pontban álló focista a* BD *szakaszt, ha szemmagassága* 174 cm-*en van?* (*9 pont*)

Megoldás. *a*) Ha a „legalább mennyien láthatták mindhárom mérkőzést” kérdésre szeretnénk választ kapni, akkor a lehető legtöbb szurkolót kell kijuttatni a mérkőzésekre. A három mérkőzésre $3 \cdot 0{,}9 = 2{,}7$, azaz a társaság létszámának 270%-ának megfelelő mennyiségű jegy kelt el. Látható, hogy a 270%-nyi jegymennyiség 2 mérkőzés megtekintését mindenki számára lehetővé teszi, a maradék pedig biztosítja, hogy a csoport *legalább* 70%-a látja mindhárom mérkőzést. A társaság *legfeljebb* 90%-a látja mindhárom mérkőzést, ha 10%-uk egyáltalán nem megy ki arra.

b) A kézfogások számából látható, hogy 5 szurkoló 11 másikkal fogott kezet, azaz öten mindenkivel kezet fogtak. Az előbbi megállapítás miatt biztosan nem lehet olyan szurkoló, akinek 5-nél kevesebb kézfogása volt. Mivel az adatok szerint van olyan szurkoló, aki 4 társával fogott kezet, ezért a kézfogások száma így nem lehetséges.

c) Jelölje az L pontban álló focista szemmagasságát S. Így a $DSB\sphericalangle = \alpha$ szöget kell meghatározni.



A kapu BD átlójának hossza a Pitagorasz-tétellel:

$$BD = \sqrt{7{,}32^2 + 2{,}44^2} \approx 7{,}72 \text{ m.}$$

SB meghatározásához szükségünk van LB távolságára. A Pitagorasz-tételt az LVB majd az LSB háromszögekre alkalmazva:

$$SB = \sqrt{16{,}5^2 + 16{,}5^2 + 1{,}74^2} \approx 23{,}4 \text{ m.}$$

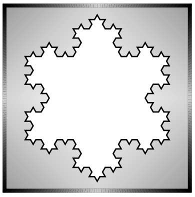
SD meghatározásához az AD szakasz „szemmagasságú” pontja legyen T. Ekkor $TD = 2{,}44 - 1{,}74 = 0{,}7$ m lesz. Felhasználva, hogy az AVL és STD háromszögek is derékszögűek, valamint $ST = LA = \sqrt{16{,}5^2 + (16{,}5 + 7{,}32)^2}$, az SD szakasz hosszára $SD = \sqrt{16{,}5^2 + (16{,}5 + 7{,}32)^2 + 0{,}7^2} \approx 28{,}99$ m adódik. Az oldalhosszak ismeretében a BDS háromszögre a koszinusz-tételt alkalmazva:

$$BD^2 = BS^2 + SD^2 - 2 \cdot BS \cdot SD \cdot \cos\alpha.$$

$\cos\alpha \approx 0{,}9791$, ahonnan $\alpha \approx 11{,}7°$.

Tehát a keresett látószög kb. $11{,}7°$.

Varga Péter
Budapest



C gyakorlat megoldása

C. 1466. *Egy bizottság az év folyamán tizenkét alkalommal ülésezett. A tagok közül minden ülésen* 10*-en vettek részt, és bármelyik két tag legfeljebb egyszer volt együtt jelen. Legalább hány tagból áll a bizottság?*

Megoldás. Először megmutatjuk, hogy 58 ember elegendő. Ehhez először olyan konstrukciót mutatunk, amely 66 embert használ, viszont minden hónapban 11-en vesznek részt az ülésen; utána ezt fogjuk alkalmasan módosítani.

Tekintsük az $\{1, 2, \ldots, 12\}$ halmaz összes 2 elemű részhalmazát és mindegyiket feleltessük meg a bizottság egy tagjának: az $\{i, j\}$ párnak megfeleltetett ember az i-edik és a j-edik hónapban menjen el az ülésre. Ekkor összesen $\binom{12}{2} = 66$ embert használtunk és minden hónapban 11-en vannak jelen az ülésen (hiszen minden $1 \leqslant i \leqslant 12$ esetén 11 olyan pár van, ami i-t tartalmazza). Továbbá bármely két ember legföljebb egyszer találkozik: ha az $\{i, j\}$ és $\{k, \ell\}$ párok diszjunktak, akkor a megfelelő két ember egyáltalán nem találkozik, ha pedig $\{i, j\} \cap \{k, \ell\} = \{m\}$, akkor pontosan az m-edik hónapban találkoznak.

Helyettesítsük most az $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$ és $\{2, 3\}$ pároknak megfelelő bizottsági tagokat egyetlen emberrel; őt tekinthetjük úgy, hogy az $\{1, 2, 3\}$ részhalmaznak felel meg. Hasonlóan, keletkezzen a $\{4, 5\}$, $\{4, 6\}$, $\{5, 6\}$ párokból a $\{4, 5, 6\}$ hármas, a $\{7, 8\}$, $\{7, 9\}$, $\{8, 9\}$ párokból a $\{7, 8, 9\}$ hármas, végül a $\{10, 11\}$, $\{10, 12\}$ és $\{11, 12\}$ párokból a $\{10, 11, 12\}$ hármas. Ezzel az emberek számát $4 \cdot 2 = 8$-cal csökkentettük, vagyis 58 embert használunk. Minden hónapban 1-gyel csökkentettük a megjelenő tagok számát (hiszen minden $1 \leqslant i \leqslant 12$ esetén két, i-t tartalmazó párból egyetlen i-t tartalmazó hármast csináltunk), így mostmár minden hónapban 10-en jelennek meg az ülésen. Végül pedig továbbra is igaz, hogy bármely két ember legföljebb egyszer találkozik: mivel a három elemű részhalmazok páronként diszjunktak, ezért az ezeknek megfelelő emberek egyáltalán nem találkoznak; továbbá mivel egy két és egy három elemű részhalmaznak is legföljebb csak egy közös eleme lehet (mert a három elemű részhalmazok két elemű részhalmazait megszüntettük), ezért az ilyeneknek megfelelő emberek is legföljebb egyszer találkoznak.

Most megmutatjuk, hogy legalább 58 emberre van szükség. Először tegyük fel, hogy van olyan ember, aki legalább 4 bizottsági ülésen jelen van: például Kovács úr az első 4 hónapban elmegy. Ekkor Kovács úron kívül az első 4 bizottsági ülés közül már semelyik kettőnek nem lehet közös résztvevője, vagyis eddig $1+4\cdot 9=37$ embert használtunk. Az ötödik hónapban legalább 6 új emberre van szükség, hiszen az első négy hónapból csak egyet-egyet vehetünk. Hasonlóan, minden $5\leqslant i\leqslant 10$ esetén igaz, hogy az i-edik hónapban legalább $11-i$ új emberre van szükség, hiszen az első $i-1$ hónap mindegyikéből csak egyet-egyet vehetünk. Ezzel összesen valóban legalább $1+4\cdot 9+6+5+\dots+1=37+21=58$ embert használtunk.

A továbbiakban tehát feltehetjük, hogy minden bizottsági tag legföljebb 3 ülésen jelenik meg. Jelölje z_1, z_2, illetve z_3 azon tagok számát, akik (pontosan) 1, 2, illetve 3 ülésre mennek el. Célunk tehát megmutatni, hogy $z_1+z_2+z_3\geqslant 58$.

Mivel a 12 hónapban összesen $12\cdot 10=120$ ember jelenik meg, ezért

$$(*)\qquad z_1+2z_2+3z_3=120.$$

Bárhogyan választunk ki két hónapot, ezekben együttesen legalább 19 ember jelenik meg (hiszen a két ülésnek csak egy közös résztvevője lehet). Adjuk most össze az összes hónappárra az azokban megjelenő bizottsági tagok együttes számát; mivel a 12 hónapból $\binom{12}{2}=66$ pár készíthető és minden pár esetében az együttes létszám legalább 19, ezért ez az összeg legalább $66\cdot 19=1254$. Hányszor számoltunk meg ezzel egy-egy embert? Ha valaki összesen csak 1 bizottsági ülésre ment el, akkor 11-szer: ennyi hónappár tartalmazza azt az egy hónapot, amikor elment. Ha valaki pontosan 2 hónapban ment el, akkor 21-szer számoltuk meg: valóban, ha az i-edik és j-edik hónapokban volt ott, akkor i-t és j-t is 11 hónappár tartalmazza, de az így kapott $2\cdot 11$-ből egyet le kell vonni, mert az $\{i,j\}$ hónappárt duplán számoltuk. Ha pedig valaki pontosan 3 ülésen volt ott, akkor 30-szor számoltuk meg: ha az i-edik, j-edik és k-adik hónapokban volt ott, akkor $3\cdot 11-3$ hónappár tartalmaz i, j és k közül legalább egyet (és azért 3-at vontunk le, mert a $3\cdot 11$-ben az $\{i,j\}$, $\{i,k\}$ és $\{j,k\}$ párokat is duplán számoltuk). Mindebből tehát az alábbi következik:

$$(**)\qquad 11z_1+21z_2+30z_3\geqslant 1254.$$

Vonjuk most le az $(**)$ egyenlőtlenség egyharmadából az $(*)$ egyenlet háromszorosát: $\frac{2}{3}z_1+z_2+z_3\geqslant 58$. Ebből pedig ($z_1\geqslant 0$ miatt) $z_1+z_2+z_3\geqslant 58$ valóban következik.

Megjegyzés. A fentiekből az is következik, hogy $z_1+z_2+z_3=58$ csak úgy valósulhat meg, ha $z_1=0$ – vagyis 58 emberrel csak úgy készíthető helyes konstrukció, ha mindenki legalább 2-szer elmegy. A fenti bizonyítás nem zárja ki olyan, 58 embert használó konstrukció létezését, amelyben van olyan tag, aki legalább 4-szer elmegy; valójában azonban ez is lehetetlen. Először is, a gondolatmenet apró módosításával könnyű megmutatni, hogy ha van olyan bizottsági tag, aki legalább 5-ször elmegy, akkor már legalább 61 emberre van szükség. Ha pedig a bizonyítást kiegészítjük azzal, hogy bevezetjük a pontosan 4-szer megjelenő emberek számára a z_4 jelölést is és ezt is bevesszük a $(*)$ egyenletbe és a $(**)$ egyenlőtlenségbe, akkor végül a $\frac{2}{3}z_1+z_2+z_3+\frac{2}{3}z_4\geqslant 58$ egyenlőtlenséget kapjuk. Ebből pedig valóban következik, hogy $z_1+z_2+z_3+z_4=58$ csak a $z_1=z_4=0$ esetben lehetséges. Továbbá, mivel a $z_2+z_3=58$ és $2z_2+3z_3=120$ egyenletekből $z_2=54$ és $z_3=4$ adódik, ezért 58 emberrel csak úgy lehet helyes megoldást kapni, ha pontosan 4 ember megy el háromszor és a maradék 54 kétszer. Ennek végiggondolása után a megoldás elején leírt konstrukció már sokkal könnyebben megtalálható.

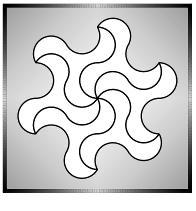
Szeszlér Dávid, BME

Megjegyzések. 1. A feladat sajnos túl nehéz volt. A megoldók közül sokan csak egy adott konstrukciót adtak a becslésükre, ám abból nem következett, hogy nincs jobb konstrukció. Egyetlen 5 pontos megoldás született, a fentitől különbözik, és a honlapon olvasható. A 2 pontos megoldás adott egy jó konstrukciót 58 főre, de nem látta be, hogy kevesebb nem elég. 1 pontot kaptak, akik 60 főre, vagy 55-57 főre adtak egy jó konstrukciót. Nem kaptak pontot a többiek, illetve akik rossz konstrukciót adtak (ezekben gyakran nem teljesült az a feltétel, hogy bármely két tag legfeljebb egyszer volt jelen azonos ülésen).

2. Sokan követték az alábbi gondolatmenetet, ám nem jutott eszükbe, hogy megpróbáljanak 34 főre megadni egy példát, így – mivel a bizonyítás ugyan helyes, de maga a becslés nagyon alatta van a valódi értéknek – ők is 0 pontot kaptak: „Egy ülésen 10-en vettek részt. 10 emberből $\binom{10}{2}=45$ pár alakítható ki. Ezek a párok már másik ülésen nem ismétlődhetnek és ez igaz a többi ülésre is. Ezért annyi tagnak kell lenni a bizottságban, akikből legalább $12\cdot 45=540$ különböző pár alakítható ki: $\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}\geqslant 540$, vagyis $n^2-n-1080\geqslant 0$. A másodfokú egyenlet pozitív megoldása $n\approx 33,37$, így az egyenlőtlenségé, figyelembe véve, hogy n pozitív egész szám, $n\geqslant 34$. Tehát legalább 34 tagból áll a bizottság."

3. Sokan érveltek a következőképpen: „Az első alkalommal 10 emberrel számolhatunk. A második alkalommal a legkedvezőbb, ha egy ember eljön az első gyűlésről (így többen onnan már nem jöhetnek), azaz a második gyűlésen 9 új ember jelenik meg. A harmadik gyűlésen 2 olyan ember tud megjelenni, aki még nem voltak azonos alkalommal (egyik az első, másik a második gyűlésről; aki mindkettőn részt vett, az a harmadikon már nem vehet részt) – így 8 új ember jelenik majd meg. És így tovább: a negyediken 7, az ötödiken 6, a hatodikon 5, a hetediken 4, a nyolcadikon 3, a kilencediken 2, a tizediken 1, új ember lesz jelen, a tizenegyedik ülésre pedig minden előző ülésről pontosan 1 olyan embert választunk, akik még csak egy gyűlésen voltak, így azon egy új ember sem lesz. A tizenkettedik gyűlésre bárki jön el, aki már volt gyűlésen, az két gyűlés összes tagjának teszi lehetetlenné a részvételt, így összesen maximum 5 olyan ember tud a tizenkettedik gyűlésen részt venni, akik még nem voltak ugyanazon a gyűlésen – ez 5 új embert jelent. Ez összesen 60 fő." Ezzel az érveléssel az a probléma, hogy nem biztos, hogy a legkevesebb embert ilyen módon találhatjuk meg.

130 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott Markó Gábor. 2 pontos 1, 1 pontos 54, 0 pontos 74 dolgozat.



Matematika feladatok megoldása

B. 4937. *A síkon kiválasztunk rácsnégyszögeket úgy, hogy igaz rájuk a következő: akárhogy színezzük a rácspontokat véges sok színnel, mindig van olyan kiválasztott négyszög, amelynek minden csúcsa ugyanolyan színű. Bizonyítsuk be, hogy van végtelen sok olyan kiválasztott négyszög, amelyek közül semelyik kettőnek nincs közös csúcsa.*

(*6 pont*) Javasolta: *Surányi László* (Budapest)

Megoldás. Színezzük ki a sík rácspontjait k színnel. A feladat feltétele szerint van olyan rácsnégyszög, amelynek a csúcsai egyforma színűek. Ez legyen az A négyszög. Ezután készítünk egy új színezést úgy, hogy az A négyszög csúcsainak színezését lecseréljük a $k+1$, $k+2$, $k+3$ és $k+4$ színre. A feladat feltétele alapján ennél a színezésnél is létezik olyan négyszög, amelynek a csúcsai egyforma színűek, legyen ez a B négyszög. Ennek a négyszögnek egyik csúcsa sem fog egybeesni az A négyszög csúcsaival, mert $k+1$-től $k+4$-ig a színekből csak egy-egy darab csúcs van, viszont a B négyszög mind a négy csúcsának ugyanolyan színűnek kell lennie. Tehát a B négyszögnek biztosan nincs közös csúcsa az A négyszöggel. Most a B négyszög csúcsait festjük át $k+5$, $k+6$, $k+7$, $k+8$ színűre. Ekkor is létezik olyan négyszög amelynek csúcsai egyforma színűek (legyen ez a négyszög C), aminek nem lehet közös csúcsa sem A-val, sem B-vel, mert C olyan négyszög, amelynek mindegyik csúcsa egyszínű, viszont az A és B csúcsainak színei csak pontosan egyszer fordulnak elő az újabb színezésben. Az eljárást folytatva, tegyük fel, hogy már n darab páronként diszjunkt rácsnégyszöget kiválasztottunk. Akkor az előző eljárással kiválaszthatunk egy további olyat, amely az eddigiektől teljesen különböző. Végtelen sok olyan négyszöget fogunk kapni, amelyeknek nincs közös csúcsa.

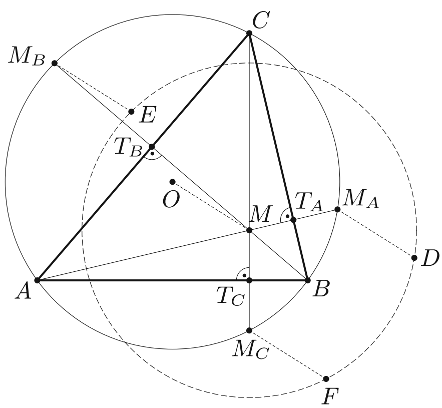
Biczó Benedek (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 9. évf.) dolgozata alapján

Összesen 44 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott 37, 3 pontot 1 tanuló. 2 pontos 2, 0 pontos 4 tanuló dolgozata.

B. 4941. *A hegyesszögű ABC háromszög körülírt körének O középpontját tükrözzük a magasságok talppontjaira. Igazoljuk, hogy e három pont által meghatározott kör ugyanakkora sugarú, mint az ABC háromszög körülírt köre.*

(*4 pont*)

Megoldás. Az *ábra* jelölései szerint legyenek a magasságok talppontjai T_A, T_B, T_C. Az O középpont T_A, T_B és T_C pontokra vonatkozó tükörképei rendre D, E és F, továbbá a magasságpont oldalakra (és így a magasságok talppontjaira) vonatkozó tükörképei pedig M_A, M_B és M_C.



Ismert, hogy a háromszög magasságpontját az oldalakra tükrözve a kapott M_A, M_B, M_C pontok rajta vannak az ABC háromszög körülírt körén.

Tekintsük ezután a D és M_A pontokat. A D pont az O pontnak, az M_A pont pedig M pontnak a T_A talppontra vonatkozó tükörképei, így az MOM_AD négyszög középpontosan szimmetrikus, tehát paralelogramma. Így $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{M_AD}$. Most az O és M pontokat a T_B talppontra tükrözve látjuk azt is, hogy $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{M_BE}$. Végül a T_C-re tükrözve O-t és M-et ismét a paralelogrammma tulajdonságából $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{M_CF}$.

E három vektor azt jelenti, hogy a DEF háromszög az $M_AM_BM_C$ háromszög eltoltja az $\overrightarrow{OM}$ vektorral. A két háromszög egybevágó, a körülírt köreik sugara megegyezik, ráadásul a DEF háromszög körülírt körének középpontja az eredeti ABC háromszög magasságpontja.

Csépányi István (Egri Szilágyi Erzsébet Gimnázium, 11. évf.)
dolgozata alapján

Összesen 83 dolgozat érkezett. 4 pontot kapott 78, 2 pontot 2 versenyző. 1 pontos 2, nem értékelünk 1 dolgozatot.

B. 4950. *Jelöljük F_n-nel az n-edik Fibonacci-számot ($F_1=F_2=1$, $F_{n+2}=$ $=F_{n+1}+F_n$), és definiáljuk az $a_0,a_1,a_2,\dots$ sorozatot a következő rekurzióval: legyen $a_0=2018$, és minden $k\geqslant 0$-ra legyen $a_{k+1}=a_k+F_n$, ahol F_n a legnagyobb a_k-nál kisebb Fibonacci-szám. Előfordul-e az (a_k) sorozatban Fibonacci-szám?*

(*4 pont*)

Megoldás. Először vizsgáljuk meg, hogy a 2018 Fibonacci szám-e? A Fibonacci-sorozat a második tagtól kezdve szigorúan monoton növekedő, így elegendő a tagjait felsorolni amíg el nem érjük a 2018-at:

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,\ 233,\ 377,\ 610,\ 987,\ 1597,\ 2584,\ \dots$$

A 2018 nem Fibonacci szám, a sorozat 17-edik és 18-adik tagja közé esik.

A továbbiakban belátjuk, hogy az (a_k) sorozatban nem fordul elő Fibonacci-szám. Ezt teljes indukcióval bizonyítjuk. Az állítás $k=0$-ra igaz, mert $F_{17}<$ $<a_0<F_{18}$. Tegyük fel, hogy valamely m-re $F_n<a_m<F_{n+1}$, ahol F_n a legnagyobb Fibonacci-szám, amely kisebb a_m-nél. Mivel a Fibonacci-sorozat a második elemétől kezdve szigorúan monoton növekedő, ezért

$$F_{n+1}=F_n+F_{n-1}<2\cdot F_n<a_m+F_n<F_{n+1}+F_n=F_{n+2}.$$

Az indukciós feltevést és az $a_m+F_n=a_{m+1}$ egyenlőséget felhasználva ebből

$$F_{n+1}<a_{m+1}<F_{n+2}$$

következik.

Az (a_k) sorozatban tehát nem fordul elő Fibonacci-szám.

Kupás Vendel Péter (Gyöngyösi Berze Nagy János Gimn., 12. évf.)
dolgozata alapján

Megjegyzés: Több versenyző azt is megmutatta, hogy tetszőleges n természetes számra $a_n=F_{n+18}-566$. Mivel már az első tag esetén is nagyobb a megfelelő Fibonacci-számok különbsége, mint 566, nem lesz az (a_k) sorozatban Fibonacci-szám.

Összesen 92 dolgozat érkezett. 4 pontot kapott 52, 3 pontot 21 versenyző. 2 pontos 10, 1 pontos 8, 0 pontos 1 tanuló dolgozata.

B. 4957. *Egy pozitív egészekből álló halmazt nevezzünk* tyű-de-jónak, *ha a számok között nincs kettő, melyek különbsége 2. Hány tyű-de-jó részhalmaza van az $\{1,2,3,\dots,10\}$ halmaznak?*

(*3 pont*) Javasolta: *Róka Sándor* (Nyíregyháza)

Megoldás. Tekintsük külön-külön a páros (2, 4, 6, 8, 10) és páratlan (1, 3, 5, 7, 9) számokat.

Ha mindkét részhalmazra megadjuk a tyű-de-jó rész-részhalmazok számát (ami egyébként megegyezik), akkor a két szám szorzata lesz a válasz, hiszen ha két szám különbsége 2, akkor vagy mindkettő páros, vagy mindkettő páratlan (azaz egy páros tyű-de-jó rész-részhalmazhoz bármilyen páratlan tyű-de-jó rész-részhalmazt tehetünk, a tyű-de-jó tulajdonság továbbra is megmarad).

Nézzük csak a páratlan számokat.

Először legyen a teljes halmaz az $\{1\}$. Ennek 2 részhalmaza van, egyikben benne van az 1, a másikban nincs.

Most legyen a teljes halmaz az $\{1,3\}$. Az $\{1\}$ részhalmazai közül a 3-at ahhoz tehetjük csak hozzá, amiben nincsen benne az 1. Ebből 1 darab van. De ennél a részhalmaznál az is lehet, hogy nem tesszük hozzá a 3-at. Szintén 1 olyan részhalmaz van, amiben benne van az 1, ehhez nem tehetjük hozzá a 3-at. Azaz 2 ($1+1$, azaz az $\{1\}$ részhalmazainak száma) olyan részhalmaz van, amihez nem tettük hozzá a 3-at, és 1 olyan van, amihez hozzátettük (amiben az 1 nem volt). Ezt a logikát folytatva láthatjuk, hogy a halmazt újabb páratlan számmal bővítve a tyű-de-jó részhalmazok száma a Fibonacci számok szerint növekszik. Pl. a következő páratlan számra, az 5-re: ha az $\{1,3,5\}$ esetében az 5 szerepel, akkor nem szerepelhet a 3, csak a kisebbek, jelen esetben az 1. Ha az 5 nincs a kiválasztott rész-részhalmazban, akkor a 3-ra kapott 3 esetet kapjuk. Azaz az $\{1,3,5,7,9\}$ halmaz tyű-de-jó részhalmazainak száma a 3 utáni harmadik Fibonacci szám, a 13.

Szintén 13 darab tyű-de-jó részhalmaza van a $\{2,4,6,8,10\}$ halmaznak. Tehát az $1,2,3,\ldots,10$ halmaznak $13\cdot 13=169$ tyű-de-jó részhalmaza van.

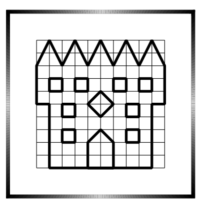
Sebestyén Pál Botond (Budapest, Baár-Madas Református Gimn., 8. évf.) dolgozata alapján

Megjegyzés: Néhány versenyző azt is megmutatta, hogy ha a_n jelöli az $\{1,2,,3,\ldots,n\}$ halmaz tyű-de-jó részhalmazainak számát, akkor

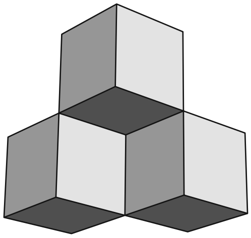
$$a_n=a_{n-2}+a_{n-3}+a_{n-4}.$$

Összesen 73 dolgozat érkezett. 3 pontot kapott 51, 2 pontot 15 versenyző. 1 pontos 3, 0 pontos 4 tanuló dolgozata.

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (604–608.)



K. 604. Adjunk meg öt különböző pozitív egész számot úgy, hogy közülük akárhányat kiválasztva és összeadva a számok összege minden választás esetén különböző legyen. Válasszuk meg ezt az öt számot úgy, hogy az öt szám közül a legnagyobb a lehető legkisebb legyen.

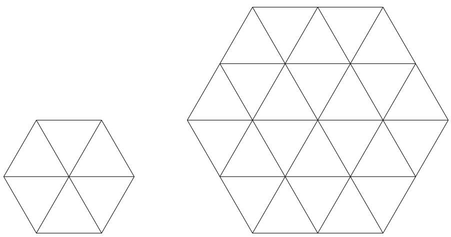


K. 605. Kehelynek nevezünk három kiskockát, ha párosával egy-egy közös élük van (lásd az *ábrát*). Egységnyi élhosszúságú kiskockákból téglatesteket építettünk.

a) Hány kehely található egy $4\times 4\times 2$-es téglatestben?

b) Hány kehely található egy $4\times 4\times 3$-as téglatestben?

K. 606. Egy $ABCDE$ ötszög AB, BC, CD és DE oldala egységnyi hosszúságú, az $ABC\sphericalangle$ és a $CDE\sphericalangle$ is 90°-os. Mutassuk meg, hogy ilyen ötszögekkel hézagmentesen parkettázható a sík. Mutassuk meg konvex és konkáv esetre is.



K. 607. Egybevágó egyenlő oldalú háromszögekből szabályos hatszögeket építünk az *ábrának* megfelelően. Az első hat, a második huszonnégy háromszögből áll.

a) Hány háromszögből építhetjük meg a hatodik ilyen hatszöget?

b) 2017 háromszögünk van. Ezekből megépítjük a lehető legnagyobb szabályos hatszöget. Hány háromszögünk marad ki?

K. 608. *a*) Mutassuk meg, hogy végtelen sok olyan egész szám van, melynek a négyzete három 4-esre végződik.

b) Van-e olyan egész szám, melynek a négyzete négy 4-esre végződik?

Beküldési határidő: 2019. január 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (1511–1517.)

Feladatok 10. évfolyamig

C. 1511. Az AD szakasz B és C belső pontjaira $AB=CD$ teljesül. Bizonyítsuk be, hogy ha P a sík egy tetszőleges pontja, akkor $PA+PD\geqslant PB+PC$.

C. 1512. Piros, fehér és zöld színű gyurma háromféle keverékéből 50 grammos kockákat készítünk. A színek aránya az első fajta kockában 3 : 2 : 0, a másodikban 1 : 3 : 1, a harmadikban pedig 0 : 1 : 4. Melyik fajtából hány kockát készítsünk, ha mindegyik színből 1 kg gyurmát szeretnénk felhasználni?

Feladatok mindenkinek

C. 1513. Mutassuk meg, hogy bármely köbszám felírható két négyzetszám különbségeként.

C. 1514. Az egységnégyzetet négy egyenlő szárú háromszögre bontjuk úgy, hogy a négyzet egy belső pontját összekötjük a csúcsokkal. Határozzuk meg a négy háromszög területe szorzatának minimális és maximális értékét.

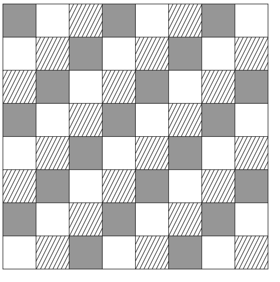
C. 1515. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán, ha k páratlan pozitív egész szám:

$$\left(1-x+x^2\right)\left(1-x+x^2-\ldots+x^{2k}\right)=\left(1-x+x^2-\ldots+x^{k+1}\right)^2.$$

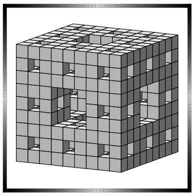
Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1516. Az $O(4;-2)$ közepű, $r=5\sqrt{3}$ sugarú körhöz érintőt húzunk a koordináta-rendszer $P(16;7)$ pontjából. Az érintési pont merőleges vetületét az OP szakaszon jelölje P'. Határozzuk meg P' koordinátáit.

C. 1517. Egy sakktábla mezőit három színnel színeztük az *ábrán* látható módon. A táblán véletlenszerűen elhelyezünk egy huszárt, majd azzal véletlenszerűen (de szabályosan) egyet lépünk. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a huszár a kiinduló mezővel azonos színű helyre érkezik?



Beküldési határidő: 2019. január 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518



A B pontversenyben kitűzött feladatok (4990–4997.)

B. 4990. Legyen n egynél nagyobb természetes szám. Jelölje n pozitív osztóinak számát $d(n)$, összegét pedig $\sigma(n)$. Mutassuk meg, hogy

$$\sigma(n) > d(n)\sqrt{n}\,.$$

(*3 pont*) Javasolta: *Sárosdi Zsombor* (Veresegyház)

B. 4991. Artúr és Blanka egy kocka éleit felváltva pirosra festik úgy, hogy minden lépésben olyan élt színeznek ki, amely kitérő az utolsó lépésben kifestett élhez. A színezést Artúr kezdi. Az veszít, aki nem tud lépni. Kinek van nyerő stratégiája?

(*3 pont*)

B. 4992. Az $1, 2, \ldots, n$ számok mindegyikét pirosra vagy kékre színezzük. Egy lépés azt jelenti, hogy kiválasztunk három különböző számot, amelyek számtani sorozatot alkotnak, és mindhárom szám színét a másik színre változtatjuk. Mely n-ekre lehet az $1, 2, \ldots, n$ számok tetszőleges színezéséből kiindulva elérni, hogy mindegyik szám piros legyen?

(*4 pont*) Javasolta: *Róka Sándor* (Nyíregyháza)

B. 4993. Rajzoljunk az ABC derékszögű háromszög BC és CA befogói fölé négyzeteket. A négyzetek C-vel átellenes csúcsai legyenek D és E. Mutassuk meg, hogy az ABC háromszög köré írt kör átmegy a DE szakasz felezőpontján.

(*4 pont*)

B. 4994. Bizonyítsuk be, hogy ha A, B és C olyan valós számok, amelyekre az $x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$ paraméteres harmadfokú egyenletnek három különböző pozitív gyöke van, akkor $A^2 + B^2 + 18C > 0$.

(*4 pont*) (*Német feladat*)

B. 4995. Legyenek az ABC hegyesszögű, nem egyenlő szárú háromszög BC, CA és AB oldalainak felezőpontjai rendre D, E és F, a háromszög körülírt körének középpontja O, magasságpontja M. Az ABC háromszög körülírt köréhez az A pontban húzott érintő és az EF egyenes metszéspontja P, a körülírt körhöz a B pontban húzott érintő és FD metszéspontja Q. Mutassuk meg, hogy a PQ egyenes merőleges az OM egyenesre.

(*5 pont*)

B. 4996. Adott egy szakasz és az egyik harmadolópontja. Szerkesszük meg csak vonalzó segítségével a másik harmadolópontot.

(*6 pont*)

B. 4997. Tekintsük egész együtthatós polinomok következő $p_n(x)$ sorozatát: legyen $p_0(x) = 0$, $p_1(x) = 1$, és minden $n \geqslant 2$ esetén

$$p_n(x) = p_{n-1}(x) + x \cdot p_{n-2}(x).$$

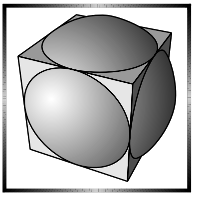
Bizonyítsuk be, hogy ha valamilyen n, m pozitív egészekre egy $f(x)$ polinom osztója a $p_n(x)$ és $p_m(x)$ polinomnak, akkor a $p_{(m,n)}(x)$ polinomnak is osztója.

((n,m) jelöli az n és m legnagyobb közös osztóját. A $P(x)$ polinom osztója a $Q(x)$ polinomnak, ha van olyan $R(x)$ valós együtthatós polinom, amelyre $Q(x) = P(x)R(x)$.)

(*6 pont*)

Beküldési határidő: 2019. január 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (737–739.)



A. 737. Adott 100 pont a térben úgy, hogy közülük semelyik négy nem esik egy síkba. Tekintsük azokat az öt csúcsú konvex poliédereket, amelyeknek minden csúcsa az adott halmazból való. Igazoljuk, hogy az ilyen poliéderek száma páros.

Javasolta: *Károlyi Gyula* (Budajenő)

A. 738. Igazoljuk, hogy ha $p(x)$ és $q(x)$ valós együtthatós polinomok, amelyek főegyütthaója 1, és $p(x)q(x) = p(x^2-2)$, akkor $q(x) = p(-x)$.

A. 739. Legyen $a_1, a_2, \ldots$ a $[0,1]$ intervallumba eső valós számok egy sorozata. Bizonyítsuk be, hogy van pozitív egészeknek olyan $1 \leqslant n_1 < n_2 < \ldots$ sorozata, amelyre

$$A = \lim_{\substack{i,j\to\infty \\ i\neq j}} a_{n_i+n_j}$$

létezik, azaz minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan N_ε, hogy $\left|a_{n_i+n_j} - A\right| < \varepsilon$ teljesül bármely, egymástól különböző $i, j > N_\varepsilon$ indexek esetén.

CIIM 10, Kolumbia

Beküldési határidő: 2019. január 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

Néhányan a 2017–2018-as tanév legszorgalmasabb megoldói közül

8–9. évfolyam

1. sor: *Fekete Richárd* 8. o. (Debreceni Fazekas Mihály Gimn.), *Cseke Balázs* 8. o. (Budapest, Békásmegyeri Veres Péter Gimn.), *Papp Marcell Miklós* 8. o. (Miskolci Herman Ottó Gimn.), *Toronyi András* 8. o. (Budapest, Baár-Madas Református Gimn., Ált. Isk. és Koll.), *Nagy Levente* 8. o. (Debreceni Fazekas Mihály Gimn.).

2. sor: *Varga Péter* 8. o. (Hajdúböszörményi Bocskai István Gimn.), *Biró Ádám* 9. o. (Szolnok, Verseghy Ferenc Gimn.), *Argay Zsolt* 9. o. (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.), *Horváth Anikó* 9. o. (Szegedi Radnóti Miklós Kís. Gimn.), *Kadem Aziz* 9. o. (Veszprém, Lovassy László Gimn.).

3. sor: *Horcsin Bálint* 9. o. (Budapest, Németh László Gimn.), *Selmi Bálint* 9. o. (Pécsi Leőwey Klára Gimn.), *Balogh Domonkos* 9. o. (Budapest, Németh László Gimn.), *Szántó Barnabás* 9. o. (Keszthelyi Vajda János Gimn.), *Hervay Bence* 9. o. (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.).

4. sor: *Cserkuti Sándor* 9. o. (Pápa, Türr István Gimn. és Koll.), *Füredi Erik Benjámin* 9. o. (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.), *Fonyi Máté Sándor* 9. o. (Szolnok, Verseghy Ferenc Gimn.), *Fekete András Albert* 9. o. (Pécsi Leőwey Klára Gimn.), *Győrffi Ádám György* 9. o. (Miskolc, Földes Ferenc Gimn.).

9–10. évfolyam

1. sor: *Williams Hajna* 9. o. (Szegedi Radnóti Miklós Kís. Gimn.), *Kovács Zita* 9. o. (Szegedi Radnóti Miklós Kís. Gimn.), *Egyed Márton* 9. o. (Keszthelyi Vajda János Gimn.), *Andó Lujza* 9. o. (Budapest, Óbudai Árpád Gimn.), *Izsa Regina Mária* 9. o. (Budapest, Óbudai Árpád Gimn.).

2. sor: *Ács Imre* 10. o. (Petah Tikva, Darke Noam Yeshiva High School), *Zempléni Lilla* 9. o. (Budapest, Szilágyi Erzsébet Gimn.), *Tanner Norman* 9. o. (Bonyhádi Petőfi Sándor Evangélikus Gimn. és Koll.), *Shuborno Das* 9. o. (Bangalore, Ryan International School), *Hordós Adél Zita* 10. o. (Kecskeméti Református Gimn.).

3. sor: *Deák Bence* 10. o. (Debreceni Fazekas Mihály Gimn.), *Beke Csongor* 10. o. (Budapest, Békásmegyeri Veres Péter Gimn.), *Kozák Áron* 10. o. (Budapest, Békásmegyeri Veres Péter Gimn.), *Fajszi Bulcsú* 10. o. (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.), *Garamvölgyi István Attila* 10. o. (Kecskeméti Katona József Gimn.).

4. sor: *Kis Károly* 10. o. (Hajdúszoboszló, Hőgyes Endre Gimn. és Szki.), *Kovács Fruzsina Dóra* 10. o. (Csongrádi Batsányi János Gimn., Szakgimn. és Koll.), *Geretovszky Anna* 10. o. (Szegedi Radnóti Miklós Kís. Gimn.), *Szakáll Lili* 10. o. (Révkomárom, Selye János Gimn.), *Viczián Anna* 10. o. (Budapest, Baár-Madas Református Gimn., Ált. Isk. és Koll.).

10–11. évfolyam

1. sor: *Markó Gábor* 10. o. (Győr, Révai Miklós Gimn. és Koll.), *Molnár Bálint* 10. o. (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.), *Jánosdeák Márk* 10. o. (Révkomárom, Selye János Gimn.), *Nagy Nándor* 10. o. (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.), *Noszály Áron* 10. o. (Debreceni Fazekas Mihály Gimn.).

2. sor: *Pácsonyi Péter* 10. o. (Zalaegerszegi Zrínyi Miklós Gimn.), *Békési Péter* 10. o. (Zalaegerszegi Zrínyi Miklós Gimn.), *Rusvai Miklós* 10. o. (Jászberény, Lehel Vezér Gimn.), *Tóth Balázs* 10. o. (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.), *Soós Máté* 10. o. (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.).

3. sor: *Tubak Dániel* 10. o. (Szegedi Radnóti Miklós Kís. Gimn.), *Pituk Gábor* 11. o. (Veszprém, Lovassy László Gimn.), *Olosz Adél* 11. o. (Pécs, PTE Gyak. Ált. Isk., Gimn., Szakgimn. és Óvoda), *Máth Benedek* 11. o. (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.), *Ajtai Boglárka* 11. o. (Miskolc, Földes Ferenc Gimn.).

4. sor: *Markó Anna Erzsébet* 11. o. (Révkomárom, Selye János Gimn.), *Matolcsi Dávid* 11. o. (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.), *Kiss Gergely* 11. o. (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.), *Kondákor Márk* 11. o. (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.), *Bukor Benedek* 11. o. (Révkomárom, Selye János Gimn.).

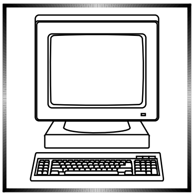
11–12. évfolyam

1. sor: *Morvai Orsolya* 11. o. (Révkomárom, Selye János Gimn.), *Vígh Márton* 11. o. (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.), *Saár Patrik* 11. o. (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.), *Molnár István* 11. o. (Békéscsabai Széchenyi István Két Tanítási Nyelvű Közgazdasági Szki. és Koll.), *Szabó Kristóf* 11. o. (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.).

2. sor: *Gáspár Attila* 12. o. (Miskolc, Földes Ferenc Gimn.), *Magyar Boglárka* 12. o. (Vác, Boronkay György Műszaki Szki., Gimn. és Koll.), *Csire Roland* 12. o. (Debreceni Református Koll. Dóczy Gimn.), *Surján Anett* 12. o. (Budapest, Kempelen Farkas Gimn.), *Bartók Imre* 12. o. (Debreceni Református Koll. Dóczy Gimn.).

3. sor: *Édes Lili* 12. o. (Révkomárom, Selye János Gimn.), *Agócs Katinka* 12. o. (Szolnok, Varga Katalin Gimn.), *Döbröntei Dávid Bence* 12. o. (Pápa, Türr István Gimn. és Koll.), *Krasznai Anna* 12. o. (Keszthelyi Vajda János Gimn.), *Porkoláb Mercédesz* 12. o. (Budapest, Békásmegyeri Veres Péter Gimn.).

4. sor: *Mamuzsics Gergő Bence* 12. o. (Kecskeméti Bolyai János Gimn.), *Kolontári Péter* 12. o. (Pécsi Leőwey Klára Gimn.), *Shirsha Bose* 12. o. (Kalkutta, South Point High School), *Daróczi Sándor* 12. o. (Nyíregyházi Krúdy Gyula Gimn.), *Elek Péter* 11. o. (Debreceni Református Koll. Dóczy Gimn.).



Informatikából kitűzött feladatok

A	B	C	D
E	F	G	H
I	J	K	L

I. 469. A következő egyszemélyes játékot játsszuk. Egy három sorból és négy oszlopból álló táblázatba az angol ábécé első 12 betűjét írjuk. Ha rábökünk egy sorra, akkor minden karakter jobbra mozdul, az utolsó karakter az első helyére kerül. Ha rábökünk egy oszlopra, akkor minden karakter lefelé mozdul, az alsó karakter pedig a felső helyre kerül.

Készítsünk programot, amely megad egy lehetséges lépéssorozatot, amellyel egy adott állapotból a jobbra látható rendezett állapotba jutunk.

A program standard bemenetére három sor kerül, soronként négy karakter szerepel egymástól egy-egy szóközzel elválasztva, amely a kiindulási állapot. A minden sorában két karakter szerepel: az első jelöli, hogy sor vagy oszlop mozdul, a második pedig megadja a sor vagy oszlop számát. Ha nem állítható elő az eredeti állapot, akkor a kimenet egyetlen sora `-1` tartalmú legyen.

Példa bemenet (a / jel sortörést helyettesít)	**Példa kimenet**
`B F D H / E J G I / C K L A`	`o 4 / s 3 / o 2 / s 1`

Értékelés: a tesztesetek felénél legfeljebb 5 lépésben elérhető a rendezett állapot.

Beküldendő egy `i469.zip` tömörített állományban a program forráskódja és a működéséhez szükséges egyéb fájlok, továbbá a hozzá kapcsolódó dokumentáció. Utóbbi a problémamegoldás lényeges elemeire világít rá, valamint tartalmazza, hogy a forrásállomány melyik fejlesztő környezetben fordítható.

I. 470 (É). A Forbes amerikai kiadó- és médiavállalat, melyet 1917-ben alapítottak az Amerikai Egyesült Államokban. A feladat nyolc ország 50 leggazdagabb emberének összehasonlítása lesz különböző szempontok szerint a Forbes magazin online listájának felhasználásával. Forrás: `https://www.forbes.com/worlds-billionaires/` (utolsó letöltés: 2018. 11. 11.).

1. Töltsük be a honlapunkról elérhető `leggazdagabbak.txt` szövegfájlt a táblázatkezelő egy munkalapjára az A1-es cellától kezdődően.
2. Munkánkat `i470` néven mentsük el a táblázatkezelő alapértelmezett formátumában.
3. A táblázatban összesen 400 ember adata szerepel. Tudjuk, hogy a legfiatalabb 33, a legidősebb 98 éves; akiről nincsen megadva, hogy hány éves, ott „-” szerepel. A H2-es cellába kerüljön a „-” jel, mellette pedig adjuk meg, hány embernek nem ismerjük az életkorát. A követező három sorban adjunk meg közel azonos lépésenkénti életkortartományhoz tartozó darabszámot.

4. A listában dollár milliomosok (M) és milliárdosok (B) vannak megadva. Ábrázoljuk kördiagramon ezek arányát a listán szereplők számához képest százalékban megadva. A diagramnak legyen adatfelirata és címe, mely utal a tartalomra.

Age	
-	39
33-55	68
56-78	223
79-98	70

5. Új munkalapon jelenítsük meg minden országból az első 10 helyezett minden adatát egymás alatt. Az adatok frissülésére nem kell felkészíteni táblázatunkat.
6. A bevétel (Net Worth) oszlopban függvény(ek) segítségével oldjuk meg, hogy számok szerepeljenek. Kihasználható, hogy csak dollármilliárdosok vannak az oszlopban és a „B” jelzés, valamint a dollárjel elhagyható.
7. I4-es cellától kezdve adjuk meg az öt leggazdagabb személy helyezését, nevét, vagyonát, életkorát és országát függvények segítségével.
8. A fenti cellatartományt formázzuk belül vékony, kívül vastag szegéllyel. Készítsünk oszlopfeliratokat.
9. Soroljuk fel az előző elkészített táblázat alatt azt a nyolc országot, mely szerepel a listában.
10. Jelenleg a világ leggazdagabb embere Jeff Bezos (54 éves, amerikai) az Amazon alapítója, vagyona 160 milliárd dollár. Az egyes országok mellett adjuk meg, hogy mennyivel tér el az első tíz ember összvagyona az adott országban, mint Jeff Bezosé. A feladat megoldása során használjunk másolható képletet.

	A	B	C	D	E	F
1	Rank	Name	Net Worth (B)	Age	Origin of Wealth	Country
2	#1	Robert Kuok	14,8	95	palm oil, shipping, property	Malaysia
3	#2	Quek Leng Chan	7,2	77	banking, property	Malaysia
4	#3	Ananda Krishnan	7,1	80	telecoms, media, oil-services	Malaysia
5	#4	Teh Hong Piow	6	88	banking	Malaysia
6	#5	Lee Shin Cheng	5,6	79	palm oil, property	Malaysia
7	#6	Lim Kok Thay	4,7	67	casinos	Malaysia
8	#7	Chen Lip Keong	3,3	71	casinos, property, energy	Malaysia
9	#8	Koon Poh Keong & Poh Ming	3	-	aluminum	Malaysia
10	#9	Lau Cho Kun	2,6	82	palm oil, property	Malaysia
11	#10	Kuan Kam Hon	2,5	71	synthetic gloves	Malaysia
12	#1	Masayoshi Son	21,9	61		Japan
13	#2	[illegible]	[illegible]	[illegible]		Japan
14	#3	[illegible]	18	77		Japan
15	#4	[illegible]	17,6	73		Japan
16	#5	Akira Mori	6,6	82		Japan
17	#6	Shigenobu Nagamori	5,5	74		Japan
18	#7	[illegible]	5,4	53		Japan
19	#8	[illegible] Takahara	[illegible]	87		Japan
20	#9	[illegible]	3,8	74		Japan
21	#10	[illegible]	4,6	-		Japan
22	#1	R. Budi & Michael Hartono	32,3	59	[illegible]	Indonesia

I	J	K	L	M
Top 5				
Rank	*Name*	*Net Worth (B)*	*Age*	*Country*
1	Li Ka-shing	36	90	Hong Kong
2	[illegible]	[illegible]	[illegible]	Hong Kong
3	R. Budi & Michael Hartono	32,3	[illegible]	Indonesia
4	[illegible] Chearavanont	30	-	Thailand
5	Masayoshi Son	21,9	61	Japan
	Malaysia	-103,2		
	Japan	-51,1		
	Indonesia	-80,05		
	Hong Kong	[illegible]		
	Taiwan	[illegible]		
	Thailand	[illegible]		
	Australia	[illegible]		
	Korea	[illegible]		
	Jeff Bezos	160		

Beküldendő egy tömörített `i470.zip` állományban a megoldást adó táblázatkezelő munkafüzet és egy rövid dokumentáció, amely megadja a felhasznált táblázatkelő nevét és verzióját.

I. 471. A Blender 3D modellező és animációs program segítségével készítsünk egy rövid reklámfilmet a napokban 125. születésnapját ünneplő KöMaL népszerűsítésére. A filmben kockák essenek le egy felületre úgy, hogy a kockák egymáson való bukdácsolása, gurulása után a nyugalomban lévő kockákról kiolvasható legyen a 125-ös szám és a KöMaL felirat. A kockákat készítsük el úgy, hogy azok oldalán számok, matematikai jelek, matematikai ábrák és a KöMaL betűi szerepeljenek, egy-egy kocka mindegyik lapján ugyanaz. A kockák legyenek egyforma méretűek és színűek, csak a feliratukban különbözzenek. A film végén látható 125-ös szám számjegyeit és a KöMaL betűit emeljük ki eltérő színnel a többi kocka feliratainak színei közül.

Beküldendő a kész animációt tartalmazó `.blend` állomány és az abból készített film. A kész munkákat megjelenítjük a KöMaL weboldalán a készítő nevének feltüntetésével. Kérjük, hogy akik hozzájárulnak ahhoz, hogy megoldásuk a honlapon megjelenjen, azok a munkafüzetben a megoldás mellé megjegyzésként ezt egy mondatban jelezzék.

I/S. 31. Egy városban a parkokat kétirányú utcák kötik össze. Bármelyik parkból bármelyik parkba pontosan egy úton juthatunk el az utcákon sétálva. Két park *távolsága* legyen a közöttük levő útvonal utcáinak száma. Az összes parkpárra vett távolságok maximumát nevezzük D-nek. Ha két park távolsága D, akkor a közöttük levő utat *turistaútnak* tekintjük. Egy park központi, ha a város összes turistaútvonala áthalad rajta. A város önkormányzata az összes központi parkba szuvenír boltot szeretne építeni. Adjuk meg a központi parkok számát és indexét.

Bemenet: az első sorban a parkok N száma (a parkok 0-tól $(N-1)$-ig vannak indexelve). A következő $N-1$ sor mindegyike két park indexét tartalmazza, melyeket utca köt össze.

Kimenet: az első sorba írjuk ki a központi parkok számát, a következő sorba a központi parkok indexét növekvő sorrendben.

Példa bemenet (a `/` jel sortörést helyettesít)	**Példa kimenet**
`8` `0 4 / 1 4 / 2 5 / 3 4 / 5 7 / 4 5 /3 6`	`4` `3 4 5 6`

Korlátok: $2 \leqslant N \leqslant 10^6$.

Időlimit: 0,5 mp, memórialimit: 100 MiB.

Értékelés: a pontok 20%-a kapható, ha csak egy központi park van; további 20% kapható, ha $N \leqslant 100$; további 20% kapható, ha $N \leqslant 1000$; további 40% kapható az eredeti bemenetre.

Beküldendő egy `is31.zip` tömörített állományban a megfelelően dokumentált és kommentezett forrásprogram, amely tartalmazza a megoldás lépéseit, valamint megadja, hogy melyik fejlesztő környezetben futtatható.

S. 130. Az asztalon sorban előttünk van N darab kártya, mindegyiken egy egész számmal. Válasszuk ki a lehető legkevesebb egymás melletti számkártyát, amik közül a legnagyobb és a legkisebb különbsége legalább D (ilyen biztosan van).

Bemenet: az első sor a számkártyák N számát és a D számot tartalmazza. A következő sor a számkártyákon levő számokat tartalmazza sorban (a kártyákat 0-tól indexeljük). Több megoldás esetén a legkisebb kezdőindexű megoldást kell megadni.

Kimenet: egy sorba írjunk ki két számot: az első és az utolsó kiválasztott kártya indexét.

Példa bemenet (a / jel sortörést helyettesít)	**Példa kimenet**
`8 4` `3 2 1 4 6 3 4 7`	`2 4`

Korlátok: $0 \leqslant N \leqslant 3 \cdot 10^6$, $-10^9 \leqslant$ számkártya számai $\leqslant 10^9$.

Időlimit: 0,5 mp, memórialimit: 100 MiB.

Értékelés: a pontok 20%-a kapható, hogyha $N \leqslant 100$; további 20% kapható, ha $N \leqslant 1000$; további 20% kapható, ha $N \leqslant 10^5$; további 40% kapható az eredeti bemenetre.

Beküldendő egy `s130.zip` tömörített állományban a megfelelően dokumentált és kommentezett forrásprogram, amely tartalmazza a megoldás lépéseit, valamint megadja, hogy melyik fejlesztő környezetben futtatható.

A feladatok megoldásai regisztráció után a következő címen tölthetők fel:
`https://www.komal.hu/munkafuzet`
Beküldési határidő: 2019. január 10.

Akik a nagy teljesítmény mögött állnak

Nyolc kiváló pedagógust ismertek el Rátz Tanár Úr Életműdíjjal

Budapest, 2018. november 28.

Az Ericsson Magyarország, a Graphisoft SE és a Richter Gedeon Nyrt. által közösen alapított díjat idén 18. alkalommal adták át azon kiváló pedagógusainknak, akik Magyarország szerte különösen sokat tettek az oktatás ügyéért és kiemelkedően nagy hatással voltak diákjaik fejlődésére, későbbi szakmai karrierjére. A Fasori Gimnázium legendás hírű matematika tanáráról elnevezett díjat eddig 136 pedagógus kapta meg, akik összesen több mint 162 millió forint értékű pénzjutalomban részesültek. A Rátz Tanár Úr Életműdíjat olyan, az iskolák 5–12. évfolyamain matematikát, fizikát, biológiát vagy kémiát tanító tanárok kapják, akik maradandót alkottak tantárgyaik népszerűsítésében és a tehetséggondozás területén. Az ünnepélyes díjátadásra a Magyar Tudományos Akadémia Dísztermében került sor.

A Rátz Tanár Úr Életműdíj három, a természettudományos oktatás támogatásában elkötelezett vállalatnak köszönhető: az Ericsson Magyarország, a Graphisoft SE és a Richter Gedeon Nyrt. 2000-ben hozta létre a díjat, mely Rátz Lászlónak, a XX. század egyik legnagyobb tanáregyéniségének, a Fasori Evangélikus Gimnázium matematika-fizika tanárának állít emléket. Rátz tanár úr számos világhírű tudóst – többek között Neumann Jánost és Wigner Jenőt – indított el a pályáján.

A díj célja, hogy hozzájáruljon a tanári munka erkölcsi és anyagi elismeréséhez, egyben példát mutasson a gazdasági szereplőknek, hogy lehetőségeikhez mérten támogassák az oktatást, hiszen az igazi befektetés a magyar gazdaság számára a tudásban rejlik.

A díjazottak személyéről és arról az 1,5 millió forinttal járó elismerésről, melyet minden évben két-két matematika-, fizika-, biológia- és kémiatanár kap, a három alapító vállalat által létrehozott Alapítvány a Magyar Természettudományos Oktatásért kuratóriuma dönt.

„A hasznosítható tudás még soha nem volt olyan fontos, mint manapság, és az ehhez szükséges ismeretek megszerzése és használata is kulcsfontosságú. Nyilvánvalóan ezt az oktatás és a nevelés együtt adhatja, a családban és az iskolában egyaránt. Az iskolában ez a tanár feladata, mint oktató, nevelő és példakép a diákok számára. Ezért nekünk az a feladatunk és a célunk, hogy megmutassuk a társadalomnak és elismerjük azokat, akik egész életükben ezt tették" – mondta Kroó Norbert professzor, akadémikus, az Alapítvány a Magyar Természettudományos Oktatásért kuratóriumának elnöke.

„Amikor felhívtak, hogy megkaptam a Rátz tanár úr díjat, először nem akartam elhinni! Életem egyik legszebb napja volt, ami 87 évnek adott új értelmet..." – mondta Szántay Csabáné, a budapesti József Attila Gimnázium nyugalmazott tanára, az idei Rátz Tanár Úr Életműdíj egyik díjazottja.

A Rátz Tanár Úr Életműdíjban részesültek az ország bármely iskolájából érkezhetnek, az adott létesítmény adottságaitól és lehetőségeitől függetlenül. Hiszen a díjazott pedagógusok életművében az a közös, hogy a reáltantárgyak oktatási színvonalának emeléséért dolgoznak, diákjaik sikeresen szerepelnek országos tudományos versenyeken, az oktatás mellett rendszeresen továbbképzik magukat, tájékozottak az adott tudomány területén elért eredményekről, továbbá gyakran tankönyvek és szakmai folyóiratok szerzői. A tehetséggondozás mellett pedig törekednek a természettudományos tudást nemcsak a legjobbakkal, hanem valamennyi diákjukkal elsajátíttatni és egyben széles látókörrel rendelkező felnőtteket nevelni.

A Rátz Tanár Úr Életműdíjban 2018-ban az alábbi tanárok részesültek:

Kémiából **Szántay Csabáné** (Budapest) és **Nagy Mária** (Pécs);
Biológiából **Szászné Heszlényi Judit** (Budapest) és **Kurtán Mónika** (Berettyóújfalu);
Matematikából **Táborné Vincze Márta** (Budapest) és **Csorba Ferenc** (Győr);
Fizikából **Zámborszky Ferenc** (Miskolc) és **Simon Péter** (Pécs).

Bemutatjuk a matematika, illetve a fizika területén díjazott tanárokat.

Matematika

Táborné Vincze Márta (Budapest): *„... annyit mindenképp el kell érni, hogy kölcsönös tisztelet és tolerancia kialakuljon a gyerekek között ..."*

1972-től a Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium matematikatanára, 1977-tól vezetőtanára volt. Tanítványai nemcsak matematikát tanultak tőle, hanem világfelfogást, önismeretet és tartást. Az Országos Középiskolai Tanulmányi Versenyen és a Nemzetközi Matematikai Diákolimpián diákjai kitűnően teljesítettek. 1977-től kezdve a tagozatos osztályok számára matematikai táborokat szervezett. 1986-tól továbbképzéseket tartott tanároknak és fővárosi tehetséggondozó szakköröket vezetett. Évtizedeken keresztül dolgozott a Kalmár

László Országos Matematikai Tanulóverseny és az Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny versenybizottságaiban. A tanárnőről szóló rövidfilm itt tekinthető meg: `https://vimeo.com/302426833`.

Csorba Ferenc (Győr): *„... éppen tavalyelőtt, vagy az előtt kapott a volt tanárom Rátz tanár úr díjat ... sokat köszönhetek neki ...”*

1974-ben kezdte tanári hivatását, majd Győr-Moson-Sopron megye meghatározó matematikatanárává vált. 2010-ben nyugállományba vonult. Évtizedeken át szervezte a Kenguru és Gordiusz megyei középiskolai versenyeket. Aktívan bekapcsolódott a felvidéki magyar diákok matematikai tehetséggondozásába. Az Erdős Pál Matematikai Tehetséggondozó Iskola 2001-ben megalakulásától a mai napig előadóként részt vesz a tehetséggondozásban. A Bolyai János Matematikai Társulat győri tagozatának sokáig elnöke, jelenleg vezetőségi tagja. Több, mint 30 évig volt az OKTV Matematika I. Bizottságának tagja. Évtizedeken keresztül állandó feladatmegoldója volt A Matematika Tanítása folyóiratnak, mely révén országos szakmai elismertségre tett szert. A tanár úrról szóló rövidfilm itt tekinthető meg: `https://vimeo.com/302423674`.

Fizika

Zámborszky Ferenc (Miskolc): *„Az egy óriási adomány, hogy az ember a szürkeállománnyal a legaktívabb, legkreatívabb időben találkozik.”*

1977-től nyugdíjazásáig a miskolci Földes Ferenc Gimnáziumban tanított, ahol a fizika tagozat egyik legmeghatározóbb tanáregyéniségének számított. A tanórákon kívül gyakran vállalt bemutató órákat szaktanári továbbképzéseken, ismereteit, tudását, tapasztalatát kollégáival rendszeresen megosztotta, segítséget nyújtott más iskolák tanárainak is. A hatévfolyamos gimnáziumi képzés tantervét kidolgozó munkacsoportot vezette. A regionális olimpiai szakkör vezetője. Az iskolapad után is segíti tanítványainak továbbhaladását a felsőoktatásban és a kutatásban. Tanítványai között sikeres mérnökök, fizikusok egész sora található. Valódi iskolateremtő egyéniség, hatása generációkon átívelő, túlmutat a tantárgyon, kihat tehetséggondozó tevékenységére. A tanár úrról szóló rövidfilm itt tekinthető meg: `https://vimeo.com/302426460`.

Simon Péter (Pécs): *„... szeretek gyerekekkel foglalkozni, gyerekekkel együtt gondolkodni ..., ... legjobb dolog az életemben, hogy tanár vagyok, ennél jobbat nem tudok elképzelni ...”*

1997 óta tagja a Pécsi Leőwey Klára Gimnázium tantestületének, melynek módszertani sokszínűségével, szakmai tudásával, minőségi munkájával meghatározó egyénisége. Modern fizika szakkörének sikerét mutatja, hogy a Szilárd Leó Fizikaversenyen egymás után négyszer a Pécsi Leőwey Klára Gimnázium nyerte el a legeredményesebb iskolának járó Marx György Vándordíjat. Tankönyvet írt és rendszeresen publikál a különféle szakmai folyóiratokban. Szakmai munkájának elismeréseként 2012-től iskolája rendezheti meg a Mikola Sándor Fizikaverseny országos fordulóját a 10. évfolyamos tanulók számára. 1999-ban kezdeményezője és 2016-ig szervezője Pécsett az „Egy kis esti fizika” című előadássorozatnak. A tanár úrról szóló rövidfilm itt tekinthető meg: `https://vimeo.com/302426686`.

Variációs elvek a klasszikus és a kvantumfizikában

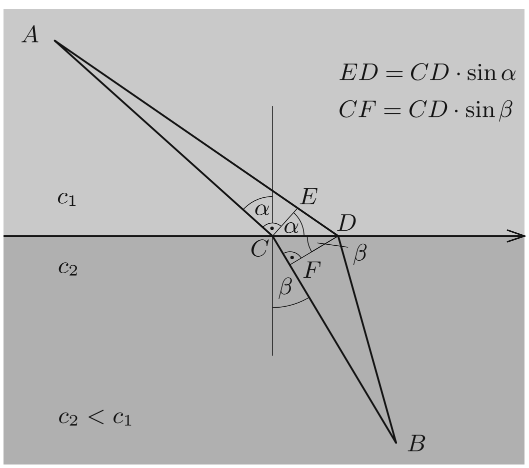
A klasszikus fizika variációs elvei

Az írás I. része a klasszikus mechanika legkisebb hatás (Hamilton-) elvét és egyszerű alkalmazását mutatta be.[1] Az elv idővel a klasszikus fizika más területein (az elektrodinamikában, a relativisztikus mechanikában, a térelméletekben) is alkalmazásra talált, az S hatásfüggvényben szereplő Lagrange-függvény természetesen az adott témakörnek megfelelő dinamikai változókból (például elektromos és mágneses térerősségekből) épül fel. A hatáselvek erőssége, hogy a fizikai probléma megoldásának útját „egyetlen sorban”, az S hatásfüggvény felírásával kijelölik. Az elmélet (variációszámítást alkalmazó) részletes kifejtése ezután megadja azokat az összefüggéseket az x_i koordináták és a v_i sebességek között, melyek biztosítják az

$$S = \int L(x_1, v_1 \ldots)\,\mathrm{d}t$$

függvény stacionárius értékét. Ezek az egyenletek (melyek a mechanikában a newtoni fizika egyenletei) már meghatározzák a keresett $x_i(t)$ függvényeket.

De legkisebb hatást, legrövidebb utat vagy időt követelő intuitív variációs elvek már *Euler* (1744) és *Lagrange* (1760) variációszámítása előtt is voltak. A síktükrön való visszaverődés törvényét például *Alexandriai Héron* (i.sz. 10–75) például a „legrövidebb út” elvével indokolta [1].



1. ábra. A Fermat-féle legrövidebb idő elvéből következik a fénytörés Snellius–Descartes-törvénye (a részleteket lásd a cikk szövegében)

[1]Megjelent a KöMaL 2018. évi novemberi számában.

A legrövidebb idő elve

A modern kor első variációs elve, melyről a továbbiakban részletesebben lesz szó, *P. Fermat* (1601–1665) francia matematikustól származik, akinek meggyőződése volt, hogy *„a természet mindig a legrövidebb és legegyszerűbb utakat választja”.* Utakon itt általánosan „utak-módok” értendők, de a fényterjedés esetén Fermat valódi útra gondolt, amikor 1662-ben kimondta: *„A fénysugár azt az utat választja, melynek befutásához a legrövidebb időre van szüksége.”*

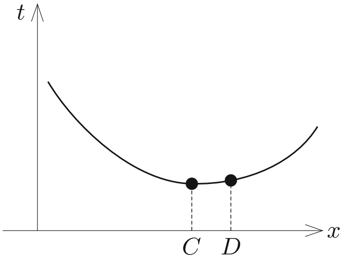
Az *1. ábrán* látható elrendezésben a fény egy „optikailag ritka” közeg A pontjából c_1 sebességgel terjedve egy „optikailag sűrűbb” közegbe hatol, ahol a sebessége $c_2 < c_1$, így jut el a B pontba. A *Fermat-elv* szerint a határfelület C pontjának helyzetét (és ezzel az α beesési szöget, valamint a β törési szöget) az határozza meg, hogy az AB úton eltöltött

$$t = \frac{AC}{c_1} + \frac{CB}{c_2}$$

idő minden más úthoz tartozó időhöz képest a legrövidebb (*2. ábra*). Fermat megmutatta, hogy C ilyen választásakor fennáll a

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c_1}{c_2}$$

összefüggés, ami éppen a Snellius–Descartes-törvény, és ezzel megadta ennek a törvénynek első – fizikailag helyes – magyarázatát [1].



2. ábra. A fény terjedési ideje a határfelületen lévő fénytörési pont helyzetének függvényében

Megfordítva, a Snellius–Descartes-törvényből következik, hogy a t idő a C pont helyzetének függvényében *stacionárius* (ahogy minimum esetén lennie kell). Ez azt jelenti, hogy egy ACB-hez nagyon közeli ADB úton a nagyon kicsi CD távolság első rendjében (első hatványával arányos mértékben) a t idő *nem* változik. Az ED szakasz ugyan ED/c_1 többletidőt igényel, de a CF út kihagyásával nyert CF/c_2 idő ezt éppen kompenzálja. Valóban, az 1. ábrán láthatóan

$$\frac{ED}{CF} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta},$$

ezt c_2/c_1-gyel szorozva a Snellius–Descartes-törvényből $ED/c_1 = CF/c_2$ következik. (Megfontolásunk során kihasználtuk, hogy kicsiny CD esetén $AC \approx AE$ és $BF \approx BD$. A közelítés CD magasabb hatványainak elhanyagolása mellett jogos.)

Ha a fény c sebessége útszakaszonként változik, a teljes út befutásához szükséges

$$t = \sum \frac{\Delta s_i}{c_i}$$

idő, folytonosan változó c esetén pedig az

$$\int \frac{\mathrm{d}s}{c}$$

idő lesz minimális.

Miért működik a Fermat-elv?

A fény hullámtermészete fizikai magyarázatot ad a Fermat által megválaszolatlanul hagyott „hogyan” kérdésre is, arra, hogyan találja meg a fénysugár A és B között a legrövidebb időre vezető C határpontot. Fermat még nem ismerhette a fényterjedés hullámelméletét, aminek első megfogalmazását *C. Huygens* (1629–1695) holland fizikus, matematikus és csillagász írta le 1678-ban, és amelyet *A-J. Fresnel* (1788–1827) francia fizikus fejlesztett tovább 1816-ban.

Az A-ból kiinduló fényhullámok (elektromágneses rezgések) valójában az egész határfelületre érkeznek és terjednek tovább B felé, de az úton eltöltött időtől függően különböző rezgési fázisban (ezáltal különböző amplitúdóval) jutnak el B-be. Mivel a C ponton átmenő sugár esetén a repülés idő stacionárius, a C közvetlen környezetéből B-be érkező hullámok fázisa (és amplitúdója) alig különbözik, ezek egymást erősítő konstruktív interferenciája nagy amplitúdót (ezáltal nagy intenzitást) eredményez. Ugyanakkor a C-től (több hullámhossznyival) távolabbi határpontokból jövő hullámok nagyon különböző fázisban érkeznek B-be, kioltják egymást, és B-ben csak a C-felől jövő fénysugár lesz látható.

Hatáselvek a mechanikában

A mechanikában az első minimumelvnek felfedezője, *P. L. M. Maupertuis* (1698–1759) francia fizikus, matematikus, filozófus a „legkisebb hatás” nevet adta (1744). Maupertuis szerint *„ha a Természetben valami változás történik, a felhasznált hatás a lehető legkisebb marad”.* Pontosabban: az anyagi pont, ha teljes energiája megmarad, olyan pályán mozog, hogy (a pálya egyes szakaszait Δs_i-vel jelölve) az mv impulzus „hatása”, a

$$W = \sum mv_i \, \Delta s_i$$

összeg ($\int mv \, \mathrm{d}s$ integrál) értéke a lehető legkisebb marad. A pontos bizonyítás L. Eulerre maradt, aki megmutatta, hogy ez a feltétel valóban kijelöli a pálya (például a Nap gravitációs terében keringó bolygóknál az ellipszis) alakját. (A koordináták időfüggése azonban további számításokat igényel.)

Fermat és Maupertuis a minimumelveket intuitív módon a természet egyszerűségre törekvésével, tehát inkább „morális”, mint fizikai érveléssel indokolták. Fermat ezt elegendőnek érezte, de Maupertuis a „szép, egyszerű” variációs elvekben metafizikai cél megvalósulását látta: *„Ezek talán az egyedüli törvények, melyeket a dolgok teremtője alkotott, azért, hogy létrehozza látható világunk valamennyi jelenségét.”* Ugyanakkor a kortárs Lagrange a saját „modern” legkisebb hatás elve és a newtoni mechanika ekvivalenciájának tudatában a tényeknél maradt: *„Az elvet, melynek kissé pontatlanul a Legkisebb Hatás nevet adtam, nem tekintem metafizikai principiumnak, hanem a mechanika törvényeiből következő egyszerű és általános eredménynek.”* (A „pontatlanul” arra utal, hogy a hatásfüggvény stacionárius, de nem feltétlenül minimális értékéről van szó.)

Pálya helyett kvantummechanikai valószínűség

Áttérve a kvantumfizikára, a mikrorészecskék a kvantummechanika jól ismert „határozatlansági relációja” miatt nem jól meghatározott pályán mozognak, hiszen egy adott pillanatban a részecske $x(t)$ helye csak bizonyos valószínűséggel ismerhető meg. A helykoordinátát és annak változását a hullámfüggvény, a $\psi(x,t)$ (komplex) valószínűségi amplitúdó jellemzi, és $\left|\psi(x,t)\right|^2$ adja meg annak valószínűségét (pontosabban valószínűségi sűrűségfüggvényét), hogy a t időpontban a mérés a részecskét az x helyen találja. A részecske mozgásakor a $\psi(x,0)$ kezdeti ($t=0$ pillanatbeli) hullámfüggvény t idő alatt $\psi(x,t)$-re változik. A változás leírásához, tehát a ψ hullámfüggvény időfüggésének számításához az $A(0,x';t,x)$ „időfejlesztő függvényt" kell ismernünk, ez transzformálja a $\psi(x,0)$ hullámfüggvényből a t idővel későbbi $\psi(x,t)$-t. (Az A függvényben x' a kezdeti állapot egy tetszőleges helykoordinátája, mert ez, ahogyan az x koordináta is, valószínűségi változó.)

A hatásfüggvény megjelenik a kvantummechanikában

R. P. Feynman (1918–1988) Nobel-díjas amerikai fizikus 1948-ban látta meg azt a pontos összefüggést, amely a ψ függvény időbeli változása és a klasszikus mechanika legkisebb hatás elve között fennáll. Felismerte, hogy a $\psi(x,0)$-ból $\psi(x,t)$-t generáló $A(0,x';t,x)$ egységnyi abszolút értékű „amplitúdók" összege, melyek egyedül az $S_{\mathcal{P}}/h$ kifejezés periodikus függvényei. Itt $S_{\mathcal{P}}$ az a klasszikus mechanikai hatásfüggvény, amely valamilyen x'-ből x-be vezető, t ideig tartó tetszőleges, $\mathcal{P}$-vel jelölt úthoz tartozik, h pedig a kvantumfizikai hatáskvantum (Planck-állandó).[2]

Célunk eléréséhez tehát „csak" összegezni kell az $A(\mathcal{P})$ részamplitúdókat minden elképzelhető x'-ből x-be vezető (akármilyen hosszú, kanyargós vagy törtvonalú) út tekintetbe vételével. Az összegzendő utak száma azonban (nem megszámlálhatóan) végtelen, az összegzés valójában végtelen dimenziós integrálás. A megoldáshoz a fizikában mindaddig ismeretlen matematikai eljárást kellett találni, Feynman ezért dolgozta ki saját „útintegrálás" (más néven pályaintegrálás) módszerét. (A matematikusok már korábban foglalkoztak ilyen típusú feladatokkal, de Feynman intuitív formuláinak szigorú matematikai megalapozása még a legutóbbi időkben is aktuális kutatási téma volt.)

A legkisebb hatás elve Feynman kvantummechanikájában

Az $A(0,x';x,t)$ függvényt meghatározó összegben minden elképzelhető út, minden lehetséges „történet" szerepel, de nem mindegyik ad jelentős járulékot. Minél nagyobb $S_{\mathcal{P}}/h$, annál érzékenyebben változik az oszcilláló, periodikus $A_{\mathcal{P}}(S_{\mathcal{P}}/h)$ amplitúdó $S_{\mathcal{P}}$ változásakor, ezért még egymáshoz nagyon közeli utakhoz tartozó amplitúdók is általában nagyon különbözők (hiszen a h Planck-állandó már egy néhány cm-nyi utat megtevő elektronnyaláb hatásfüggvényéhez képest is nagyon kicsi), így az interferenciájuk eredménye várhatóan nulla. Csak akkor más a helyzet, ha az $S_{\mathcal{P}}$ hatásfüggvények éppen a stacionárius érték közelében vannak, mert ekkor $S_{\mathcal{P}}/h$, és vele $A_{\mathcal{P}}$ ezeken az utakon közelítőleg állandó, emiatt az amplitúdók egymást erősítve interferálnak. A lényeges utak tehát éppen azok, melyeken

[2] A gondolatmenet a periodikusan változó amplitúdókkal *P. A. M. Dirac* angol fizikus egy korábbi munkájában már szerepel, de ott egy „klasszikus hatásfüggvénnyel analóg" F mennyiségről és ennek stacionárius értékéről van szó. Feynman felismerése, hogy F *azonos* a hatásfüggvénnyel.

a klasszikus Hamilton-elvnek megfelelően S értéke közel stacionárius. (Az érvelés láthatóan ugyanaz, mint a Fermat-elv esetében.)

A Hamilton-elv ily módon a kvantumfizikában is „működik”, csak itt nem az egyetlen megvalósuló tér-idő pályát jelöli ki, hanem a $\psi(x,t)$ hullámfüggvény változását meghatározva valószínűségeket ad meg. Például annak valószínűségét, hogy az A pontból kibocsátott részecske t idővel később valamely B pontban éri el a detektort. Határesetben, a makroszkopikus méretekhez közeledve $S_{\mathcal{P}}/h$ annyira megnövekszik, hogy konstruktívan interferáló amplitúdókat már csak olyan utak adnak, amelyek gyakorlatilag egybeesnek a klasszikus hatáselv egyetlen pályájával; ez már átmenet a klasszikus mechanika területére.

Feynman útintegrálja természetesen csak egy a kvantummechanika módszerei között, technikai eszköz, amelyik esetenként előnyösen alkalmazható a részecskefizika területén. Ezen túl azonban a „hagyományos” kvantumfizika szemléletes, újszerű megfogalmazása is, amelyben a legkisebb hatás elve, a koordináták választásától független hatásfüggvény stacionárius értéke ugyanolyan meghatározó szerepű, mint Lagrange és Hamilton klasszikus mechanikájában.

Irodalom

[1] Simonyi Károly: *A fizika kultúrtörténete, a kezdetektől a huszadik század végéig* (Ötödik, javított, bővített kiadás). Akadémiai Kiadó, Budapest 2011.

Solt György
Svájc, Zug

Mérési feladat megoldása

M. 380. *Mérjük meg egy főtt tojás tehetetlenségi nyomatékát a szimmetriatengelyére vonatkozólag!*

(*6 pont*) Közli: *Simon Péter,* Pécs

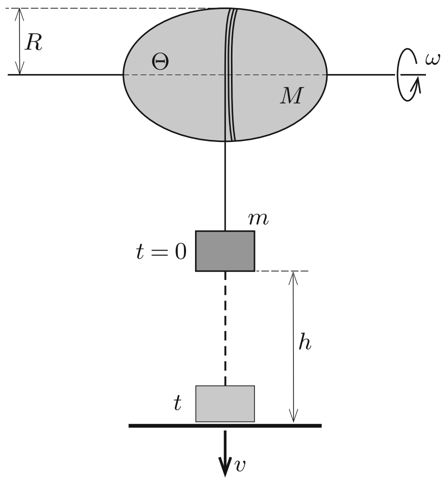
Megoldás. *Eszközök:* főtt tojás, tolómérő, stopper, mérőszalag, hústű, állványok, vékony fonál, ragasztószalag, a tojásnál kisebb tömegű súly.

A mérés mente: A tojás hosszanti tengelyén keresztülszúrtam a hústűt. A hústű végeit egy-egy állványra rögzítettem, figyelve arra, hogy a tű vízszintes legyen. A tojásra a közepénél ragasztószalaggal rögzítettem a fonalat, aminek a végére kötöttem a súlyt. A fonalat feltekertem a tojásra (végén a súllyal) majd egy bizonyos h magasságból elengedtem a súlyt, és mértem a leérkezésének t idejét.

Három magasságból indítottam a mozgást és mindegyiknél háromszor mértem az időket. Ezen időtartamok átlagából kiszámítottam a mozgás átlagsebességét, majd a tojás sugarának (R) ismeretében a meghatároztam a tojás tehetetlenségi nyomatékát.

Mérés elmélete: Feltételeztem, hogy a rendszer mechanikai energiája állandónak tekinthető: $E_{\text{mech.}} =$ állandó, vagyis

$$mgh = \frac{1}{2}\Theta\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2.$$



Mivel ismerjük a szögsebesség és a nehezék sebessége közötti $\omega = \frac{v}{R}$ kapcsolatot, valamint az egyenletesen gyorsuló mozgás h/t átlagsebessége és a végsebessége közötti összefüggést:

$$v = \frac{2h}{t},$$

ezekből kifejezhetjük a tehetetlenségi nyomaték keresett értékét a mérhető mennyiségekkel:

$$\Theta = mR^2\left(\frac{gt^2}{2h} - 1\right).$$

Mérési eredmények. Először megmértem, hogy

– a tojás tömege: $M = 0{,}069$ kg,

– a nehezék (súly) tömege: $m = 0{,}02$ kg,

– a tojás legnagyobb „sugara" a szimmetriatengelyére merőleges irányban: $R = 2{,}58$ cm,

– a tojás „hosszmérete": $2a = 5{,}9$ cm. (Erre a méretre a kiértékelésnél nem volt szükség.)

A mért időtartamokat, azok átlagát, a belőlük számolt tehetetlenségi nyomatékokat, azok átlagát és az átlagtól való eltéréseket (a statisztikus hibát) az alábbi *táblázat* mutatja. A mérés pontosságáról a statisztikus hiba abszolút értékének átlaga ad felvilágosítást. (Az eltérések négyzetének átlagából, a szórásnégyzetből is lehet következtetni a mérés pontosságára.)

	h [cm]	t [s]	$\bar{t}$ [s]	Θ [kg m^2]	$\overline{\Theta}$ [kg m^2]	$\lvert\Delta\Theta\rvert$ [kg m^2]	$\overline{\lvert\Delta\Theta\rvert}$ [kg m^2]
		0,42					
1.	50	0,52	0,51	$2{,}06\cdot10^{-5}$		$12\cdot10^{-7}$	
		0,58					
		0,63					
2.	75	0,60	0,61	$1{,}90\cdot10^{-5}$	$1{,}94\cdot10^{-5}$	$4\cdot10^{-7}$	$4\cdot10^{-7}$
		0,61					
		0,74					
3.	100	0,67	0,70	$1{,}86\cdot10^{-5}$		$8\cdot10^{-7}$	
		0,70					

Összefoglalva a mérés eredményét megállapíthatjuk, hogy az adott (viszonylag nagy méretű) tojás tehetetlenségi nyomatéka a szimmetriatengelyére vonatkoztatva:

$$\Theta_{\text{tojás}} = (1{,}9 \pm 0{,}1) \cdot 10^{-5}\ \mathrm{kg\,m^2}.$$

A becsült hiba nagyságát azért adtuk meg a statisztikus bizonytalanság kb. kétszereseként, mert a statisztikus hiba mellett a mért mennyiségek (időtartamok, távolságok, a tömeg mérésének leolvasási hibája és a szisztematikus hibák, pl. a tengelysúrlódás és a légellenállás), továbbá emberi tényezők (reakcióidő, tévedések) is felléphetnek.

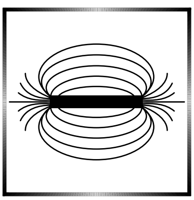
Összehasonlítás egy elméleti értékkel: Ha feltételezzük, hogy a főtt tojás homogén anyageloszlású, tömör test, amelynek az alakja R, R és a féltengelyű forgásellipszoiddal közelíthető, akkor a tehetetlenségi nyomatéka

$$\Theta_{\text{elméleti}} = \frac{2}{5}MR^2 = 1{,}85 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{kg\,m^2}.$$

Ennek az elméleti becslésnek is van (az M és R mennyiségek mérési pontatlansága miatt) hibája, ez kb. 1%-os lehet. Ezt növeli még a tojás alakjára és a tömegeloszlására tett feltevésünk bizonytalansága. Összahasonlítva a *mért* és a *számított* tehetetlenségi nyomatékokat megállapíthatjuk, hogy azok a mérési hibahatáron belül megegyeznek, ez a feltevéseink jogosságát támasztja alá.

Varga Áron (Keszthelyi Vajda János Gimn., 10. évf.)

18 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott Csépányi István, Kondákor Márk, Kozák Áron, Morvai Orsolya, Olosz Adél, Pácsonyi Péter és Varga Áron megoldása. Kicsit hiányos (4–5 pont) 3, hiányos (1–3 pont) 5, hibás 1, nem versenyszerű 2, nem értékelhető 1 dolgozat.



Fizika feladatok megoldása

P. 5025. *Torricelli-kísérletet végzünk egy vastag falú üvegcsővel. A cső belső keresztmetszete* 1 cm^2*, a külső keresztmetszete* 3 cm^2*. A cső tömege* 624 g*, és* 2 cm *mélyen nyúlik a higanyba.*

Mekkora erővel kell tartani a csövet ilyenkor?

(*4 pont*) Közli: *Werner Bence Tamás,* Budapest

Megoldás. A jelöléseket a (nem méretarányos) *ábrán* tüntettük fel.

Az ismert adatok:

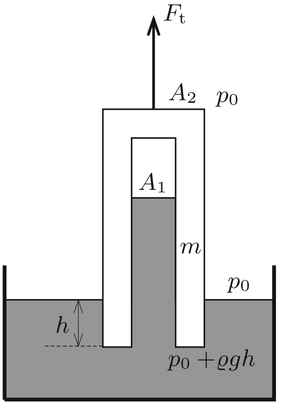
$m = 624$ g $= 0{,}624$ kg;
$A_1 = 1$ cm$^2 = 1 \cdot 10^{-4}$ m^2;
$A_2 = 3$ cm$^2 = 3 \cdot 10^{-4}$ m^2;

$p_0 = 101\ \text{kPa} = 1{,}01 \cdot 10^5\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$;

$\varrho = 13\,600\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$;

$h = 2\ \text{cm} = 2 \cdot 10^{-2}\ \text{m}$;

$g = 9{,}81\ \frac{\text{N}}{\text{kg}}$.



Az üvegcsőre függőlegesen lefelé a nehézségi erő és a p_0 légnyomás által az A_2 felületre kifejtett erő hat. A csőre függőlegesen felfelé ható erők: az általunk kifejtett F_t tartóerő, valamint az $A_2 - A_1$ felületen a higany felszíne alatt h mélységben fellépő nyomásnak megfelelő erő. Ezek az erők kiegyenlítik egymást:

$$\sum F = -(mg + p_0 A_2) + F_\text{t} + (p_0 + \varrho gh)(A_2 - A_1) = 0,$$

ahonnan a keresett tartóerő:

$$F_\text{t} = mg + p_0 A_2 - (p_0 + \varrho gh)(A_2 - A_1) =$$

$$= \left(0{,}624\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \frac{\text{N}}{\text{kg}}\right) + \left(1{,}01 \cdot 10^5\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2}\right) \cdot (3 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2) -$$

$$- \left[\left(1{,}01 \cdot 10^5\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2}\right) + \left(13\,600\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) \cdot \left(9{,}81\ \frac{\text{N}}{\text{kg}}\right) \cdot (2 \cdot 10^{-2}\ \text{m})\right] \cdot (2 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2) =$$

$$= 6{,}1\ \text{N} + 30{,}3\ \text{N} - 20{,}7\ \text{N} = 15{,}7\ \text{N}.$$

Rusvai Miklós (Jászberény, Lehel Vezér Gimn., 10. évf.)
dolgozata alapján

35 dolgozat érkezett. Helyes Guba Zoltán, Kozák András, Mamuzsics Gergő Bence, Molnár Mátyás, Olosz Adél, Rusvai Miklós, Sal Dávid és Vígh Márton megoldása. Kicsit hiányos (3 pont) 5, hiányos (1–2 pont) 20, hibás 2 dolgozat.

P. 5045. *A Holdon egy szabadon eső test teljes esési magassága n-szer nagyobb, mint az utolsó másodpercben megtett útja. Határozzuk meg az esés magasságát és az esés idejét!*

(*4 pont*) *Faragó Andor* (1877–1944) feladata nyomán

Megoldás. Legyen az esés teljes ideje t, az utolsó $t_0 = 1$ másodpercben megtett út pedig h. A test nh magasságból

$$g_H = \frac{1}{6} g_\text{Föld} \approx 1{,}6\ \text{m/s}^2$$

gyorsulással mozogva ér a Hold felszínére, fennáll tehát

$$nh = \frac{1}{2} g_H t^2. \tag{1}$$

Az nh magasságból h magasságig $t-t_0$ idő alatt $(n-1)h$ utat tesz meg a test, így

$$(2) \qquad (n-1)h=\frac{1}{2}g_H(t-t_0)^2.$$

A (2) egyenletet (1)-gyel elosztva kapjuk, hogy

$$\frac{n-1}{n}=\left(\frac{t-t_0}{t}\right)^2=\left(1-\frac{t_0}{t}\right)^2, \quad \text{ahonnan} \quad \frac{t_0}{t}=1-\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}},$$

azaz

$$t=t_0\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}=\sqrt{n}\big(\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\,\big)t_0=\big(n+\sqrt{n(n-1)}\,\big)\cdot(1\text{ s})$$

következik. Ezt (1)-be helyettesítve az esés teljes magasságára az

$$nh=\frac{1}{2}g_Ht_0^2\big(n+\sqrt{n(n-1)}\,\big)^2\approx\big(n+\sqrt{n(n-1)}\,\big)^2\cdot(0{,}8\text{ m})$$

eredmény adódik.

Bokor Endre (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn.)

102 dolgozat érkezett. Helyes 20 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 33, hiányos (1–2 pont) 41, hibás 8 dolgozat.

P. 5054. *Egy M nyugalmi tömegű, kezdetben álló atommag képes elnyelni egy hf energiájú γ-fotont. Határozzuk meg, hogy mekkora az atommag gerjesztési energiája (vagyis a nyugalmi energiájának növekedése) ebben a folyamatban!*

(*5 pont*) Közli: *Légrádi Imre,* Sopron

Megoldás. Alkalmazzuk a folyamatra a relativisztikus energia- és lendületmegmaradás törvényét! A γ-foton energiája és lendülete:

$$E_{\text{foton}}=hf, \qquad I_{\text{foton}}=\frac{hf}{c}.$$

A kezdetben álló, M nyugalmi tömegű atommagra

$$E_{\text{atommag}}=Mc^2, \qquad I_{\text{atommag}}=0.$$

A foton elnyelése során az atommag meglökődik, energiája

$$E'_{\text{atommag}}=Mc^2+hf,$$

lendülete

$$I'_{\text{atommag}}=\frac{hf}{c},$$

nyugalmi tömege pedig $M'>M$ lesz. Mivel a relativisztikus energia, lendület és a nyugalmi tömeg között fennáll az

$$E'_{\text{atommag}}=\sqrt{(M'c^2)^2+(I'_{\text{atommag}}c)^2}$$

összefüggés, a megváltozott nyugalmi tömeg

$$M' = M\sqrt{1+\frac{2hf}{Mc^2}},$$

az atommag nyugalmi energiájának növekedése pedig (ezt nevezhetjük az atommag gerjesztési energiájának)

$$\Delta E = (M'-M)c^2 = Mc^2\left(\sqrt{1+\frac{2hf}{Mc^2}}-1\right).$$

Fülöp Sámuel Sihombing (Pécsi Leőwey Klára Gimn., 11. évf.) dolgozata alapján

Megjegyzés. Amennyiben $hf \ll Mc^2$, a gerjesztési energia a kicsiny ε-ra érvényes

$$\sqrt{1+\varepsilon} \approx 1+\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon^2}{8}$$

közelítő képlet alapján

$$\Delta E \approx hf - \frac{(hf)^2}{2Mc^2}.$$

Az első tag egy mindvégig mozdulatlan atommag által elnyelt foton energiájának felel meg. A második tag azt veszi figyelembe, hogy a foton hf/c lendületét az atommag veszi át, az tehát kb. $v = hf/Mc$ sebességgel meglökődik. Ekkora sebességű, M tömegű test (nemrelativisztikusan számolt) $Mv^2/2$ mozgási energiáját is a fotonnak kell fedeznie, a mag gerjesztésére tehát hf-nél ennyivel kevesebb energia jut.

11 dolgozat érkezett. Helyes 8 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 2, hiányos (1 pont) 1 dolgozat.

P. 5066. *Egy átlátszó közegben z irányban változik az optikai törésmutató. Erre merőlegesen, az x tengely irányában vékony fénysugarat indítunk, amely a közegben a pozitív z irányba eltérülve parabolaív mentén halad. A törésmutató értéke $z=0$-nál n_0, míg $z=h$-nál $\sqrt{2}\,n_0$. Hogyan függ a törésmutató z-től?*

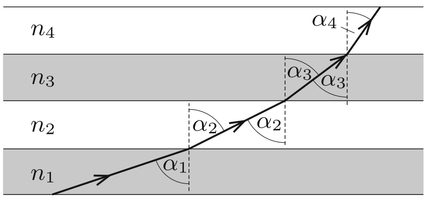
(*6 pont*) Közli: *Vigh Máté,* Budapest

I. megoldás. Ha képzeletben vékony, egyre növekvő törésmutatójú átlátszó plánparalel (két párhuzamos síkkal határolt) lemezeket helyezünk egymásra, és rajtuk keresztül egy vékony fénysugár halad (*1. ábra*), akkor a Snelius–Descartes-törvény szerint

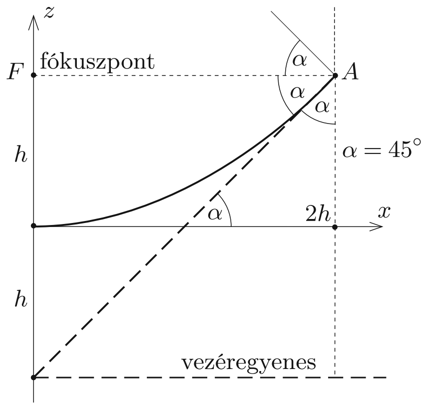
$$\frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1}=\frac{n_1}{n_2},\qquad \frac{\sin\alpha_3}{\sin\alpha_2}=\frac{n_2}{n_3},\qquad \frac{\sin\alpha_4}{\sin\alpha_3}=\frac{n_3}{n_4}\dots,$$

azaz

$$n_1\sin\alpha_1 = n_2\sin\alpha_2 = n_3\sin\alpha_3 = \ldots = \text{állandó}, \tag{1}$$



1. ábra



2. ábra

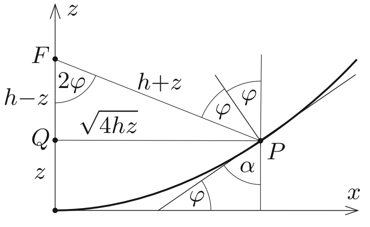
tehát a beesési szög szinusza és az abszolút törésmutató szorzata a helytől függetlenül állandó. A folyamatosan változó törésmutatójú közegre is érvényes ez az összefüggés, hiszen a közeget tekinthetjük úgy, mintha vékony plánparalel lemezekből épülne fel.

Helyezzük a koordináta-rendszer origóját a fénysugár kiindulási pontjához. A feladat szövege szerint a z tengely irányára merőlegesen, az x tengely irányában indítjuk a vékony fénysugarat (*2. ábra*). Az origóban (a parabola csúcspontjában) a beesési szög 90°-os, így az (1)-ben szereplő állandó n_0. A törésmutató egy tetszőleges z koordinátával megadott P pontban

$$n(z) = \frac{n_0}{\sin\alpha(z)},$$

ahol $\alpha(z)$ a parabola P pontbeli érintőjének a z tengellyel bezárt szöge (vagyis az elgörbülő fénysugár ottani „beesési szöge"). Azt is tudjuk, hogy $z = h$-nál a törésmutató $\sqrt{2}n_0$, vagyis ezen a helyen $\sin\alpha(h) = 1/\sqrt{2}$, tehát $\alpha(h) = 45°$.

A parabola ismert tulajdonsága, hogy az érintője felezi azt a szöget, amelyet az érintési pontból a vezéregyenesre emelt merőleges és az érintési pontból a fókusz felé indított félegyenes bezár (lásd pl. *Reiman István Matematika,* Typotex (2014), `https://www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/2011-0001-526_reimann_matematika/ch17s04.html`). (A parabola ezen tulajdonsága tesz lehetővé számos műszaki alkalmazást, pl. a parabolatükrök, fényszórók és antennák működését.)



3. ábra

Alkalmazzuk az érintő irányára vonatkozó ismeretet a parabola $z = h$ „magasan" lévő A pontjára, ebből megkapjuk, hogy az F fókuszpont, valamint a vezéregyenes a csúcsponttól h távolságra van, és a parabola egyenlete:

$$(2) \qquad z(x) = \frac{x^2}{4h}, \qquad \text{azaz} \qquad x(z) = \sqrt{4hz}\,.$$

Határozzuk meg a fénysugár parabola pályájának tetszőleges P pontjában az érintő és az x tengely $\varphi = 90° - \alpha$ szögét (*3. ábra*), majd annak ismeretében olvassuk le a törésmutató $n(z)$ függvényének alakját. A P pont az x tengelytől z, a vezéregyenestól $h + z$ távol van, így a fókuszponttól mért távolsága is $h + z$. Másrészt $FQ = h - z$, tehát

$$\cos(2\varphi) = \frac{h - z}{h + z}, \quad \text{így} \quad \cos\varphi = \sqrt{\frac{1 + \cos(2\varphi)}{2}} = \sqrt{\frac{h}{h + z}},$$

a keresett törésmutató pedig

$$n(z) = \frac{n_0}{\sin\alpha(z)} = \frac{n_0}{\cos\varphi(z)} = n_0\sqrt{1 + \frac{z}{h}}.$$

Markó Gábor (Győr, Révai Miklós Gimn., 12. évf.)

II. megoldás. A fény terjedését változó törésmutatójú közegben nemcsak a sok-sok vékony rétegre felírt Snelius–Descartes-törvénnyel, hanem a *Fermat-elv* segítségével is le lehet írni. Ez utóbbi azt állítja, hogy helyről helyre változó $n(\boldsymbol{r})$ törésmutató esetén egy vékony fénysugár „mozgása” olyan pálya mentén megy végbe, amelyre az adott kezdő- és végpont közötti terjedés ideje, vagyis a

$$T = \frac{1}{c}\int n(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}s$$

integrál értéke a lehető legkisebb. (Az integrálás a pályagörbe s-sel jelölt ívhossza szerint történik.)

A szokásos kérdésfeltevés az, hogy adott módon változó törésmutatóhoz milyen „fénypályagörbe” tartozik. Jelen esetben azonban a megfordított kérdésre keressük a választ: Milyen módon változó törésmutató eredményez egy megadott pálya (parabolaív) mentén történő fényterjedést?

Hasonló minimumelv a klasszikus mechanikai mozgásokra is megfogalmazható (lásd pl. Solt György: *Variációs elvek a klasszikus és kvantumfizikában* c. cikket lapunk 558. oldalán. – a Szerk.). A Maupertuis-elv szerint egy adott összenergiájú, pontszerű test a tér két adott pontja között olyan pályán mozog, amelyre a

$$W = \int v(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}s$$

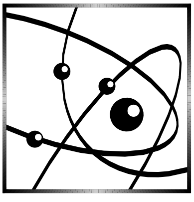
integrál minimális, ahol $v(\boldsymbol{r})$ a test sebességének – általában helyről helyre változó – nagysága. Ebben az esetben is az a szokásos kérdés, hogy adott módon változó (például az energiamegmaradás tételéből kiszámítható) sebességnagyság esetén milyen a pályagörbe alakja, de itt is feltehető a megfordított kérdés: Milyen módon változzon a test sebességének nagysága, hogy a mozgás pályagörbéje adott alakú (mondjuk parabolaív) legyen? Természetes módon kínálkozik az a gondolat, hogy a Fermat-elv és a Maupertuis-elv közötti hasonlóságot kihasználjuk. Ha ismerjük az egyik (a mechanikai) probléma megoldását, abból következtethetünk a másik (az optikai) feladat megoldására. Jelen esetben az x tengely mentén elinduló és csak a z koordinátától függő $n(z)$ törésmutatójú közegben haladó fénysugárnak egy olyan mechanikai mozgás felel meg, amelyben a kezdősebesség (egy alkalmasan választott koordináta-rendszerben) vízszintes irányú, és a sebesség nagysága csak a másik koordinátától (z-től) függ (tehát a test függőleges irányú erőtérben mozog). Tudjuk, hogy a mozgás pályagörbéje akkor lesz parabola, ha az erőtér homogén, vagyis a vízszintes hajítás jól ismert esetével van dolgunk.

Egy v_0 kezdősebességgel eldobott test sebességének nagysága (függőlegesen lefelé irányított z tengely mellett) $v(z) = \sqrt{v_0^2 + 2gz}$. Az analóg optikai feladat megoldása eszerint $n(z) = c_1\sqrt{1 + c_2 z}$, ahol c_1 és c_2 alkalmasan választott állandók. Mivel ismerjük, hogy $n(0) = n_0$ és $n(h) = \sqrt{2}n_0$, ezekből $c_1 = n_0$ és $c_2 = 1/h$ következik, vagyis a törésmutató z-függése:

$$n(z) = n_0\sqrt{1 + \frac{z}{h}}\,.$$

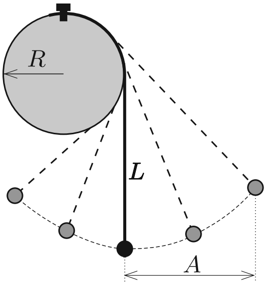
Elek Péter (Debreceni Ref. Koll. Dóczy Gimn., 12. évf.)
dolgozata alapján

14 dolgozat érkezett. Helyes 12 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 2 dolgozat.



Fizikából kitűzött feladatok

M. 382. Egy vékony, hajlékony, nyújthatatlannak tekinthető fonál egyik végét egy R sugarú, vízszintes tengelyű, rögzített henger „tetejéhez" erősítjük, a másik végére pedig egy kis méretű testet akasztunk. Egyensúlyi állapotban a fonál függőleges darabja $L = 3R$ hosszúságú. A testet az *ábrán* látható módon kitérítjük, majd magára hagyjuk. A test mozgásának periódusideje – viszonylag nagy kezdeti kitérésnél – függ az A „amplitúdótól". Mérjük meg néhány különböző A esetén, hogy hány százalékkal tér el ezen inga (ún. evolvens-inga) $T(A)$ lengésideje az L hosszúságú fonálinga $T_0 = 2\pi\sqrt{L/g}$ lengésidejétől!



(*6 pont*) *Christiaan Huygens* (1629–1695) nyomán

G. 653. Egy reggel a mozdonyszínből két mozdony indul el ugyanabba az irányba. Az első dízelmozdony, amelynek sebessége 90 km/h, a második pedig villanymozdony, ami másfél perccel később indul 20 m/s sebességgel. A dízelmozdony 10 perccel a kifutása után találkozik a szomszédos sínen szembejövő gyorsvonattal. Mekkora a gyorsvonat sebessége, ha ezután másfél perccel találkozik a villanymozdonnyal?

(*3 pont*)

G. 654. Egy gyógyfürdő 12 m × 20 m-es medencéjében 75 cm magasan áll a 30 °C-os termálvíz. Ezután 1 m magasságig 50 °C-os termálvízzel töltik fel a medencét. A hőveszteségek miatt 2 °C-kal lesz alacsonyabb a medencében lévő víz hőmérséklete, mintha nem lenne veszteség a keveredéskor. Mekkora volt a hőveszteség a keveredés alatt?

(*3 pont*)

G. 655. Egy 27 kg tömegű, tömör téglát vízszintes asztallapra helyezünk. Ha az egyik lapjára fektetjük, 4500 Pa nyomást fejt ki az asztallapra. Egy másik lapjára fektetve 7200 Pa, a harmadik lapra fektetve pedig 2700 Pa lesz a nyomás. Mekkora a tégla sűrűsége?

(*4 pont*)

G. 656. Egy régi hajszárítónak két kapcsolója van. Ha az első kapcsolót zárjuk, akkor hideg levegőt fúj a hajszárító. Meleg levegővel akkor száríthatunk hajat, ha a második kapcsolót is bekapcsoljuk. Ha csak a második kapcsolót zárjuk, akkor sem a ventillátor, sem a fűtőszál nem működik. Készítsük el a hajszárító kapcsolási rajzát!

(*4 pont*)

P. 5078. Egy jégkorongmérkőzés során nem ritka, hogy a korong sebessége eléri akár a 160 km/h-t is.

a) Milyen messzire csúszna egy ilyen sebességű korong a jégen, ha a korong és a jég közötti csúszási súrlódási együttható jó közelítéssel 0,1?

b) Mekkora átlagos erővel kell meglökni a korongot ahhoz, hogy ilyen sebességre gyorsuljon? A korong és az ütő kb. 0,01 s-ig érintkezik. A korong súlya kb. 1,5 N.

A helyi csapat csatára – büntetőlövéshez készülődve – megindul a koronggal együtt. A csatár elhatározza, hogy 5 méterről lövi be a korongot a kapuba. Tudja, hogy az ellenfél kapusának kiváló, 0,15 másodperces a reakcióideje.

c) Mekkora kezdősebességgel kell ellőnie a korongot, hogy az még azelőtt a kapuban legyen, hogy a kapus meg tudna mozdulni?

d) Mekkora erővel kell ehhez meglöknie a korongot?

(*4 pont*) *Tornyai Sándor fizikaverseny,* Hódmezővásárhely

P. 5079. Középen átfúrt, azonos tömegű gyurmagolyók csúszhatnak egy hosszú, egyenes rúdon. Ha a rudat enyhén lejtősre állítjuk, a golyók maguktól még nem indulnak el, viszont ha elindítjuk őket, gyorsulva csúsznak lefelé. Finoman elindítva a legfelső golyót, ez eléri az alatta levőt. Ekkor összetapadnak, és együtt csúsznak tovább. Nekiütköznek a következő golyónak, ezzel is összetapadva csúsznak tovább, és így tovább. Azt tapasztaljuk, hogy mindegyik ütközés mindig ugyanakkora sebességnél következik be. Mekkora volt kezdetben az n-edik és az $(n+1)$-edik golyó közötti L_n távolság, ha az első két golyó távolsága L_1 volt?

(*5 pont*) Közli: *Fajszi Bulcsú,* Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn.

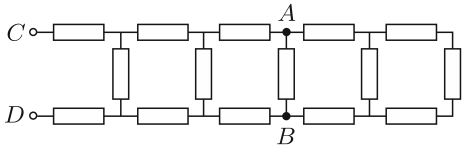
P. 5080. Hány százalékkal nő a molekulák átlagsebessége abban a gázban, amelynek hőmérsékletét 27 °C-ról 159 °C-ra emeljük, ha a gáz

a) hélium;

b) hidrogén?

(*3 pont*) *Példatári feladat nyomán*

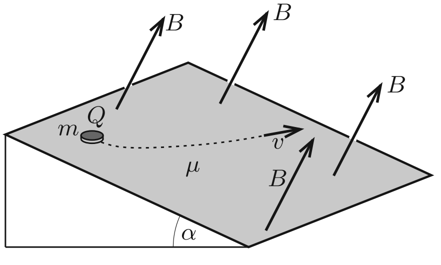
P. 5081. Mekkora az *ábrán* látható ellenálláshálózat eredő ellenállása a C és D pontok között, ha mindegyik ellenállás R nagyságú? Hány százalékkal változik meg a C és D pontok közötti eredő ellenállás, ha az A és B pontok közötti ellenállást kivesszük?



(*4 pont*) Közli: *Tornyos Tivadar Eörs,* Budapest

P. 5082. Egy elektromosan töltött kicsiny fémgolyót $\ell = 1$ m hosszú, elhanyagolható tömegű szigetelőszálra függesztettünk vízszintes irányú, homogén elektromos térben. A fémgolyó egyensúlyi helyzetében a fonál 30°-os szöget zár be a függőlegessel. Ha az egyensúlyi helyzetéből kicsit kitérítjük a testet, mekkora az így kapott inga lengésideje?

(*4 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest



P. 5083. Egy lejtő hajlásszöge α, rajta a súrlódási együttható μ. A lejtőn lévő m tömegű, Q töltésű, kis méretű korongra mozgása közben hat egy B nagyságú, a lejtő síkjára merőleges irányú homogén mágneses tér is. A korongot kezdősebesség nélkül elengedjük. Határozzuk meg a korong állandósult sebességének nagyságát és irányát!

(*5 pont*) *A Kvant nyomán*

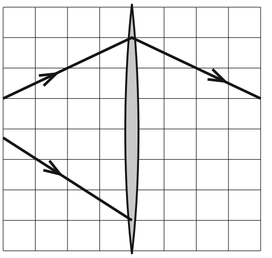
P. 5084. Hogyan változik meg egy tükörre merőlegesen beeső fény hullámhossza, ha a tükör v sebességgel mozog a rá eső fénnyel azonos irányban?

a) $v = 150\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$;

b) $v = 150\,000\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$.

(*5 pont*) *Példatári feladat nyomán*

P. 5085. A mellékelt (méretarányos) *ábra* felső felén egy vékony, hagyományos gyűjtőlencsén áthaladó fénysugár menete látható. Hogyan fog továbbhaladni ugyanezen a lencsén az *ábra* alsó felén látható fénysugár?



(*4 pont*) Közli: *Vigh Máté,* Budapest

P. 5086. Mekkora energia szükséges egy oxigénatommag négy egyforma részre történő szétszakításához? Legalább mekkora energiájú neutron képes szétszakítani egy – kezdetben álló – oxigénatommagot?

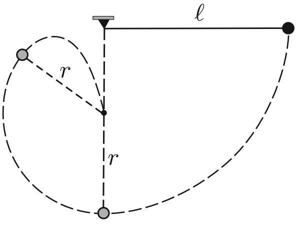
(*4 pont*) *Példatári feladat nyomán*

P. 5087. Elméletileg lehet-e szabad szemmel észrevenni egy 80 km átmérőjű krátert a Hold felszínén, ha a pupillánk átmérője 5 mm?

(*4 pont*) *Csillagászati versenyfeladat*

P. 5088. Egy ℓ hosszúságú fonálingát vízszintesen kitérítünk, majd elengedünk. Amikor a fonál eléri a függőleges helyzetét, egy szögbe ütközik, s innen kezdve már csak az alsó, r hosszúságú része lendül tovább.

Mekkora az r/ℓ arány, ha az ingatest, miután felfelé haladva letér valahol a körpályáról, szabadon mozogva pontosan a szögbe ütközik?



(*6 pont*) Közli: *Radnai Gyula,* Budapest

Beküldési határidő: 2019. január 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS
(Volume 68. No. 9. December 2018)

Problems in Mathematics

New exercises for practice – competition K (see page 541): **K. 604.** Find five appropriate distinct positive integers such that the sums of every possible selection of numbers out of those five is different. Find a set of five such numbers in which the largest number is as small as possible. **K. 605.** Define a cup as a figure formed by three small cubes pairwise sharing an edge in common (see the *figure*). We are building rectangular blocks out of small unit cubes. *a*) How many cups are there in a $4\times4\times2$ block? *b*) How many cups are there in a $4\times4\times3$ block? **K. 606.** The length of sides AB, BC, CD and DE of a pentagon $ABCDE$ is unity, $\angle ABC$ and $\angle CDE$ are both 90°. Show that the plane can be tiled with such pentagons without gaps or overlaps. Show it for both convex and concave pentagons. **K. 607.** Regular hexagons are constructed out of congruent regular triangles as shown in the *figure.* The first one consists of six triangles, the second one consists of twenty-four. *a*) How many triangles does the sixth such hexagon consist of? *b*) We have 2017 such regular triangles. If we use them to construct the largest possible hexagon of this kind, how many triangles are left over? **K. 608.** *a*) Show that there are infinitely many integers whose squares end in three digits of 4. *b*) Is there a positive integer whose square ends in four digits of 4?

New exercises for practice – competition C (see page 542): **Exercises up to grade 10: C. 1511.** B and C are interior points of a line segment AD such that $AB=CD$. Prove that $PA+PD\geqslant PB+PC$ for any point P of the plane. **C. 1512.** We are making 50-gram cubes out of three different mixtures of red, white and green play dough. In the first type of cube, the proportion of the colours is $3:2:0$, in the second type it is $1:3:1$, and in the third type it is $0:1:4$. How many of each type should we make if we want to use 1 kg of each colour altogether? **Exercises for everyone: C. 1513.** Show that every perfect cube can be expressed as a difference of two perfect squares. **C. 1514.** A unit square is divided into four isosceles triangles by connecting an interior point to the vertices. Find the minimum and maximum values of the product of the areas of the four triangles. **C. 1515.** Find the real solutions of the equation where k is an odd positive integer: $\left(1-x+x^2\right)\left(1-x+x^2-\cdots+x^{2k}\right)=\left(1-x+x^2-\cdots+x^{k+1}\right)^2$. **Exercises upwards of grade 11: C. 1516.** From point $P(16,7)$ of the coordinate plane, a tangent is drawn to the circle of radius $r=5\sqrt{3}$ centred at $O(4,-2)$. Let P' denote the orthogonal projection of the point of tangency onto the line segment OP. Find the coordinates of P'. **C. 1517.** The fields of a chessboard are coloured in three colours as shown in the *figure.* A knight is placed on a random field of the chessboard, and a random (but correct) move is made with that knight. What is the probability that the knight will arrive on a field that has the same colour as the starting field?

New exercises – competition B (see page 544): **B. 4990.** Let n denote a natural number greater than one. Let $d(n)$ denote the number of positive divisors of n, and let the sum of the divisors be $\sigma(n)$. Show that $\sigma(n)>d(n)\sqrt{n}$. (*3 points*) (Proposed by *Zs. Sárosdi,* Veresegyház) **B. 4991.** Arthur and Belle take turns in colouring the edges of a cube red. In each step, they colour an edge that is skew to the previously coloured edge. Artur starts. The player who cannot do an appropriate coluring will lose the game. Which player has a winning strategy? (*3 points*) **B. 4992.** To start, each of the numbers $1,2,\ldots,n$ is coloured either red or blue. In every move, three distinct numbers in arithmetic progression are selected, and the colour of each of the three numbers is changed. For what values of n is it true that however the numbers $1,2,\ldots,n$ are coloured initially, it is possible to turn all of them red by applying an appropriate sequence of such steps? (*4 points*) (Proposed by *S. Róka,* Nyíregyháza) **B. 4993.** A square is drawn over each of legs BC and CA of a right-angled triangle ABC. Let D and E denote the vertices of the squares that lie opposite to C. Show that the circumscribed circle of triangle ABC passes through the midpoint of line segment DE. (*4 points*) **B. 4994.** Prove that if the cubic equation $x^3+Ax^2+Bx+C=0$ has three distinct positive roots for some values of the real parameters A, B and C, then $A^2+B^2+18C>0$. (*4 points*) (*German problem*) **B. 4995.**

Let D, E and F, respectively, denote the midpoints of sides BC, CA and AB of a right-angled but not isosceles triangle ABC, let O be the centre of the circumscribed circle of the triangle, and let M be the orthocentre. The tangent drawn to the circumscribed circle at A intersects line EF at P, and the tangent drawn at point B intersects line FD at Q. Show that lines PQ and OM are perpendicular. (*5 points*) **B. 4996.** Given a line segment and one point that divides it $1:2$, construct the other point dividing the line segment $1:2$ by only using a straight edge. (*6 points*) **B. 4997.** Consider the following sequence $p_n(x)$ of polynomials with integer coefficients: let $p_0(x)=0$, $p_1(x)=1$, and for all $n\geqslant 2$ let $p_n(x)=p_{n-1}(x)+x\cdot p_{n-2}(x)$. Prove that if a polynomial $f(x)$ divides the polynomials $p_n(x)$ and $p_m(x)$ for some positive integers n, m then it also divides the polynomial $p_{(m,n)}(x)$. ((n,m) denotes the greatest common divisor of n and m. A polynomial $P(x)$ divides a polynomial $Q(x)$ if there exists a polynomial $R(x)$ of real coefficients for which $Q(x)=P(x)R(x)$.) (*6 points*)

New problems – competition A (see page 545): **A. 737.** 100 points are given in space such that no four of them lie in the same plane. Consider those convex polyhedra with five vertices that have all vertices from the given set. Prove that the number of such polyhedra is even. (Proposed by: *Gyula Károlyi,* Budajenő) **A. 738.** Prove that if $p(x)$ and $q(x)$ are monic real polynomials such that $p(x)q(x)=p(x^2-2)$ then $q(x)=p(-x)$. **A. 739.** Let $a_1,a_2,\ldots$ be a sequence of real numbers from the interval $[0,1]$. Prove that there is a sequence $1\leqslant n_1<n_2<\ldots$ of positive integers such that $A=\lim\limits_{\substack{i,j\to\infty\\ i\neq j}} a_{n_i+n_j}$ exists, i.e., for every real number $\varepsilon>0$ there is a N_ε such that $\left|a_{n_i+n_j}-A\right|<\varepsilon$ is satisfied for any pair of distinct indices $i,j>N_\varepsilon$. (*CIIM 10,* Colombia)

Problems in Physics

(see page 570)

M. 382. One end of a thin, flexible and not stretchable thread is attached to the topmost point on the rim of a cylinder of radius R. The cylinder is fixed and it has a horizontal axis. A small object is attached to the other end of the thread. In the equilibrium position the vertical part of the thread has a length of $L=3R$. The object is displaced, as shown in the *figure,* and then it is released. The period of the motion – for a relatively large initial displacement – of the object depends on the "amplitude" A. Measure for several different values of A by what percent the period of this pendulum $T(A)$ differs from the period $T_0=2\pi\sqrt{L/g}$ of a simple pendulum of length L?

G. 653. One morning two locomotives start from the engine shed and travel in the same direction. The first one is a diesel engine and has a speed of 90 km/h, whilst the other one is an electric engine, which started 1.5 minutes after the diesel engine, and has a speed of 20 m/s. 10 minutes after the diesel engine started it meets a fast train coming along the neighbouring track in the opposite direction. What is the speed of the fast train if it meets with the electric engine 1.5 minutes after it met with the diesel one? **G. 654.** The height of the thermal water of temperature 30 °C in a spa pool of base 12 m × 20 m is 75 cm. The pool was then filled with 50 °C water up to the height of 1 m. Due to heat loss the temperature of the mixture is 2 °C less than it would be without the loss. What amount of heat was lost during mixing the water? **G. 655.** A solid brick of mass 27 kg is placed onto a horizontal tabletop. If it is placed onto one of its face then the pressure on the tabletop is 4500 Pa. When another face is in contact with the table then the pressure is 7200 Pa, and facing down to its third side the pressure on the tabletop 2700 Pa. What is the density of the brick? **G. 656.** An old hair dryer has two switches. If the first switch is turned on then the hair dryer blows cold air. When the second switch is also turned on, then hot air is blown. When only the second switch is on, then neither the fan, nor the heating element are working. Draw a circuit diagram of the hair dryer.

P. 5078. In an ice-hockey match it is not rare that the speed of the hockey puck reaches the value of 160 km/h. *a*) How far could a puck having the above stated speed move on the ice if the coefficient of kinetic friction between the puck and the ice is 0.1? *b*) By what average force must the puck be shot in order to accelerate it to this speed? The stick and the puck are in contact for approximately 0.01 s. The weight of the puck is approximately 1.5 N. One of the skaters of the local team – preparing for the penalty shot – starts to move with the puck. He decides that he will shoot the puck from a distance of 5 m from the goal line. He knows that the goal-tender of the opposing team has an excellent reaction time of 0.15 s. *c*) By what initial speed should he shoot the puck in order that it reaches the net before the goal-tender starts to move? *d*) By what force should he shoot the puck? **P. 5079.** Some plasticine balls, which have a hole through them and the same mass, can slide along a long straight rod. If the rod is in a slightly slant position the balls cannot start sliding, but if they are started they slide down with some acceleration. Gently starting the uppermost ball it reaches the ball below it. They stick and slide together. They hit the ball below them, stick to it and slide together, and so on. We can observe that each collision occurs at the same speed. What was the initial distance L_n between the n-th and the $(n+1)$-st ball if the distance between the first two balls was L_1? **P. 5080.** By what percent does the average speed of the molecules of a sample of gas increase when the temperature of the gas is increased from 27 °C to 159 °C, if the gas is *a*) helium; *b*) hydrogen? **P. 5081.** What is the equivalent resistance across points C and D of the resistor system connected as shown in the *figure,* if each resistor has a resistance of R? By what percent does this equivalent resistance across C and D change if the resistor between points A and B is disconnected? **P. 5082.** A small charged metal ball is suspended by a negligible-mass insulating thread of length $\ell = 1$ m in uniform horizontal electric field. In the equilibrium position the angle between the thread and the vertical is 30°. What is the period of the motion of the ball when it is displaced a bit from its equilibrium position? **P. 5083.** The angle of elevation of a slope is α, the coefficient of friction on its surface is μ. There is a small disc of mass m and of charge Q on the slope, and a uniform magnetic field of magnitude B also exerts a force on the moving disc. The magnetic induction is perpendicular to the plane of the slope. The disc is released from rest. Determine the direction and the magnitude of the velocity of the disc, when the velocity becomes constant. **P. 5084.** How does the wavelength of a light beam incident perpendicularly on a mirror change, if the mirror is moving at a speed of v in the same direction as the direction of the propagation of the incident light beam? *a*) $v = 150\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$; *b*) $v = 150\,000\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$. **P. 5085.** The upper part of the *figure* (drawn to scale) shows how a light beam travels through a traditional converging lens. How would the light beam shown in the lower part of the figure travel after leaving the lens? **P. 5086.** How much energy is needed to split the nucleus of an oxygen into four alike parts? What is the minimum energy of a neutron, which is able to split the – initially stationary – nucleus of the oxygen? **P. 5087.** Is it theoretically possible to spot by the naked eye a crater of diameter of 80 km on the surface of the Moon if the diameter of our pupil is 5 mm? **P. 5088.** The bob of a simple pendulum of length ℓ is displaced horizontally and then released. When the thread reaches the vertical position, it hits a nail and from that moment onward only the lower part of the thread of length r is moving. What is the ratio of r/ℓ, if the bob leaves the circular orbit somewhere in its upward motion, and then moving freely it exactly bumps into the nail?