De honnan tudja a labda?

A legkisebb hatás elve tehát parabolapályákra szorítkozva beigazolódott, de az elv *minden más alakú pályát* tekintetbe véve is a jó eredményt adja [1].[2] De hogyan? A labda ismeri a távoli jövőjét? Tudja minden $0 < t < T$ pillanatban, merre kell továbbrepülnie ahhoz, hogy a már megtett és a *még hátralévő utat* is magában foglaló egész pályájára számított $\langle L \rangle$ átlagérték (és vele az S hatásfüggvény) valamennyi elképzelhető pálya közül a legkisebbnek bizonyuljon?

A távoli jövő előrelátása a *klasszikus mechanika szerint* valójában nem szükséges, mert a legkisebb hatás elvéből *matematikailag következnek* a labda *közvetlen* jövőjét minden helyen és időpontban meghatározó Newton-féle mozgásegyenletek (és viszont, a Newton-egyenletekből levezethető a hatáselv), ezért nem csoda, hogy a megvalósuló pálya éppen az, amelyen $\langle L \rangle$ minimális. A hatáselv a klasszikus mechanikában egyszerűen a mozgásegyenletek matematikailag tömör, előnyös (koordináta-rendszertől független) megfogalmazásának tekinthető.

De ha ez csak egyszerű matematika, mit talált korának egyik legnagyobb fizikusa (aki idén éppen 100 éves lenne) a legkisebb hatás elvében „elbűvölően érdekesnek”? Hogyan „vizsgálják meg” a részecskék a kvantumfizika Feynman-féle megfogalmazásában az összes elképzelhető pályát ahhoz, hogy kiválasszák az optimálisat, a megvalósulót? Erről egy következő írásban lesz szó, ahol a legkisebb hatás elve és néhány további, hasonlóan „célt megfogalmazó” (integrális) fizikai elv kapcsolatára is fény derül.

Irodalom

[1] R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands: *Mai fizika 6.,* 71. fejezet, Műszaki Könyvkiadó, 1970.

[2] Simonovits András: *Válogatott fejezetek a matematika történetéből,* 25. old., Typotex, 2009.

Solt György
Svájc, Zug

Megoldásvázlatok a 2018/7. szám emelt szintű fizika gyakorló feladatsorához

Tesztfeladatok

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
B	D	A	A	B	A	B	B	A	D	D	C	D	C	B

[2] A legkisebb hatás elvét *L. Euler* (1707–1783) és *J. L. Lagrange* (1736–1813) ilyen irányú eredményeit felhasználva mai formájában *W. R. Hamilton* (1805–1865) fogalmazta meg 1834-ben.

Számolásos feladatok

1. *a*) A síkkondenzátor kapacitása

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d} = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{\mathrm{A\,s}}{\mathrm{V\,m}} \cdot \frac{5 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^2}{0{,}02\ \mathrm{m}} = 2{,}21 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{F} = 2{,}21\ \mathrm{pF}.$$

b) Töltés hatására a kondenzátoron

$$U = \frac{Q}{C} = \frac{2 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{C}}{2{,}21 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{F}} = 905\ \mathrm{V}$$

feszültség alakul ki.

A kondenzátorban tárolt energia

$$E = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \cdot 2{,}21 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{F} \cdot (905\ \mathrm{V})^2 = 9{,}06 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{J}.$$

2. Egy $\ell_1 = 80$ cm hosszúságú fonálinga lengésideje:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell_1}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{0{,}8\ \mathrm{m}}{9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} = 1{,}79\ \mathrm{s}.$$

Ez az inga 1 perc alatt 60 s/1,79 s = 33,5 lengést végez.

A megadott feltétel szerint a második inga ennél 2-vel többet, azaz 35,5-et leng, vagyis a lengésideje 60 s/35,5 = 1,69 s.

Ismét a lengésidőre vonatkozó összefüggést felhasználva:

$$1{,}69\ \mathrm{s} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell_2}{9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}},$$

ahonnan a másik inga hossza: $\ell_2 = 0{,}71$ m.

3. Mivel a közös hőmérséklet megbecslése nem egyszerű feladat, vizsgáljuk meg, hogy mennyivel több vagy kevesebb energiával rendelkezik a rendszer a kiindulási állapotban, mint egy hasonló össztömegű, 0 °C hőmérsékletű vizet tartalmazó másik rendszer.

A jég energiája negatív, mert a hőmérséklete 0 °C alatt van:

$$E_{\text{jég}} = -L_{\text{olvadás}}\, m_{\text{jég}} - c_{\text{jég}}\, m_{\text{jég}} |\Delta T_{\text{jég}}| =$$

$$= -2256\ \frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}} \cdot 6\ \mathrm{kg} - 2{,}1\ \frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}\ {}^\circ\mathrm{C}} \cdot 6\ \mathrm{kg} \cdot 20\ {}^\circ\mathrm{C} = -2262\ \mathrm{kJ}.$$

A víz energiája pozitív:

$$E_{\text{víz}} = c_{\text{víz}}\, m_{\text{víz}} \Delta T_{\text{víz}} = 4{,}2\ \frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}\ {}^\circ\mathrm{C}} \cdot 4\ \mathrm{kg} \cdot 60\ {}^\circ\mathrm{C} = 1008\ \mathrm{kJ},$$

és a vízgőz energiája is pozitív:

$$E_{\text{gőz}} = L_{\text{forrás}}\, m_{\text{gőz}} + c_{\text{gőz}}\, m_{\text{gőz}} \Delta T_{\text{gőz}} =$$

$$= 2256\ \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \cdot 2\ \text{kg} + 4{,}2\ \frac{\text{kJ}}{\text{kg}\ {}^\circ\text{C}} \cdot 2\ \text{kg} \cdot 100\ {}^\circ\text{C} = 5352\ \text{kJ}.$$

Az összenergia

$$E_{\text{összes}} = E_{\text{jég}} + E_{\text{víz}} + E_{\text{gőz}} = -2262\ \text{kJ} + 1008\ \text{kJ} + 5352\ \text{kJ} = +4098\ \text{kJ} > 0.$$

Mivel az összenergia pozitív a rendszer hőmérséklete 0 °C-nál magasabb. Nézzük meg, hogy ez az energia milyen hőmérsékletre tudja emelni a rendszert:

$$E_{\text{összes}} = c_{\text{víz}}\, m_{\text{összes}} \Delta T,$$

ahonnan (feltételezve, hogy $\Delta T < 100$ °C, tehát az egyensúlyi állapotban csak víz lesz jelen):

$$\Delta T = \frac{E_{\text{összes}}}{c_{\text{víz}}\, m_{\text{összes}}} = \frac{4098\ \text{kJ}}{4{,}2\ \frac{\text{kJ}}{\text{kg}\ {}^\circ\text{C}} \cdot 12\ \text{kg}} = 81{,}3\ {}^\circ\text{C}.$$

4. *a*) A 18 m hosszú lánc tömege $m_{\text{lánc}} = 18 \cdot 0{,}5\ \text{kg} = 9\ \text{kg}$. Ez azt jelenti, hogy kezdetben $m_{\text{lánc}} + m_{\text{vödör}} = 24$ kg tömeget kell emelni, a legvégén pedig csak $m_{\text{vödör}} = 15$ kg-ot. Mivel a lánc homogén, ezért az össztömeg, és ezzel együtt a szükséges erőhatás is a vödör elmozdulásával lineárisan csökken. Ebből kiindulva

$$F_{\max} = (m_{\text{vödör}} + m_{\text{lánc}})g = 24\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 235\ \text{N},$$

$$F_{\min} = m_{\text{vödör}}\, g = 15\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 147\ \text{N}.$$

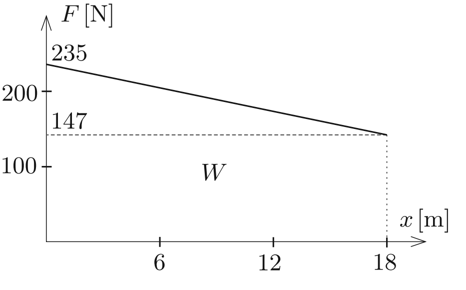
A lánc súlya méterenként

$$\frac{G}{\ell} = 0{,}5\ \frac{\text{kg}}{\text{m}} \cdot 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 4{,}9\ \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

b) Jelölje x a vödör elmozdulását! Ekkor az erő-elmozdulás függvény matematikai alakja a következő:

$$F(x) = 235\ \text{N} - 4{,}9\ \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot \text{x},$$

és a függvény grafikonját az *ábra* mutatja.



c) A munkavégzést a függvény alatti terület kiszámításával adhatjuk meg. A teljes munka

$$W = \frac{F_{\max} + F_{\min}}{2}\,\ell = \frac{235\ \text{N} + 147\ \text{N}}{2}\, 18\ \text{m} = 3438\ \text{J}.$$

Ennek harmada 3438 J/3 = 1146 J. Ennyi munkát kell elvégezni minden embernek. Tegyük fel, hogy az első ember x_1 hosszat húzott a kötélen, ekkor a munkavégzése (az SI egységek elhagyásával):

$$1146 = \frac{235 + 235 - 4{,}9\,x_1}{2}\,x_1,$$

vagyis

$$4{,}9\,x_1^2 - 470\,x_1 + 2292 = 0.$$

A másodfokú egyenletből x_1 meghatározható, értéke 5,2 m. (A második gyök 90,6 m, ez nyilván nem felel meg a feladat feltételeinek.) Tehát az első embernek 5,2 m-t kell húzni a vödrön.

Az előbbihez hasonlóan megkereshetjük a második váltás helyét is:

$$2292 = \frac{235 + 235 - 4{,}9\,x_2}{2}\,x_2,$$

vagyis

$$4{,}9\,x_2^2 - 470\,x_2 + 4584 = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldása: $x_2 = 11{,}0$ m. (A második gyök ebben az esetben sem megfelelő.)

Tehát 5,2 m-nél és 11,0 m-nél kell váltani ahhoz, hogy mindhárom ember egyenlő mértékben végezzen munkát.

Markovits Tibor
Budapest

Mérési feladat megoldása

M. 378. *Méréssel határozzuk meg, hogy egy szúnyogháló (vagy hasonló, finom szövésű anyag) hány százalékkal csökkenti az ablak fényáteresztő képességét!*

(*6 pont*) Közli: *Nagy Piroska Mária,* Dunakeszi

Megoldás.

A mérésnél használt eszközök

– Fotoellenállás (WK 65037 1K5 típusú);
– digitális multiméter;
– leakasztott ablak;
– 2 hokedli;
– szúnyogháló;
– állvány, rögzítővel;