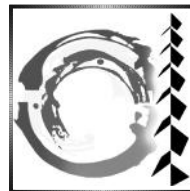


## Az 59. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia feladatainak megoldása, 2. rész



### Második nap\*

4. Helynek nevezzük a sík minden olyan  $(x, y)$  pontját, amelyre  $x$  és  $y$  olyan pozitív egészek, melyek mindegyike kisebb vagy egyenlő, mint 20.

Kezdetben a 400 hely mindegyike szabad. Anna és Balázs felváltva zsetonokat raknak a helyekre, Anna kezd. Anna minden lépésekor egy új piros zsetont helyez egy még szabad helyre oly módon, hogy semelyik két piros zseton helyének távolsága se legyen  $\sqrt{5}$ -tel egyenlő. Balázs minden lépésekor egy új kék zsetont helyez egy még szabad helyre. (Egy kék zseton által elfoglalt hely távolsága bármely másik foglalt helytől tetszőleges lehet.) A játék akkor ér véget, ha valamelyik játékos nem tud lépni.

Határozzuk meg a legnagyobb  $K$  értéket, amelyre igaz az, hogy Anna biztosan el tud helyezni  $K$  darab piros zsetont, bárhogy is játszik Balázs.

**Egri Máté megoldása.** Azt bizonyítjuk, hogy  $K = 100$ .

Két hely távolsága akkor  $\sqrt{5}$ , ha „lólépésre” vannak egymástól, azaz kettőt az egyik irányba, egyet pedig arra merőlegesen lépünk. Tehát ha a helyeket „sakk-táblaszerűen” kiszínezzük, akkor bármely két hely, aminek távolsága  $\sqrt{5}$ , különböző színű. Ekkor ha Anna azt a stratégiát követi, hogy csak a fekete helyekre rak (amikből 200 van), akkor legalább azok felére tud rakni, azaz 100 helyre. Tehát  $K \geq 100$ .

A  $20 \times 20$ -as táblát feloszthatjuk 25 db  $4 \times 4$ -es táblára. Bebizonyítjuk, hogy egy  $4 \times 4$ -es táblán Balázs garantálni tudja, hogy Anna csak 4 helyre tudjon tenni.

Ha így betűzzük meg a  $4 \times 4$ -es táblát és Balázs mindig Anna lépésével a tábla középpontjára tükrös helyre rak, akkor Anna már nem rakhat többször ugyanolyan betűre, így valóban legfeljebb négyszer rakhat. 25 db  $4 \times 4$ -es tábla van, tehát  $K \leq 100$ .

A	B	C	D
C	D	A	B
B	A	D	C
D	C	B	A

Mivel  $K \geq 100$  és  $K \leq 100$ , ezért  $K = 100$ .

5. Legyen  $a_1, a_2, \dots$  pozitív egészeknek egy végtelen sorozata. Tegyük fel, hogy van egy olyan  $N > 1$  egész, hogy minden  $n \geq N$ -re

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

egész szám. Bizonyítsuk be, hogy van egy olyan  $M$  pozitív egész, hogy  $a_m = a_{m+1}$  minden  $m \geq M$ -re.

\*Az első nap feladatainak megoldását az októberi számban közzeltük.

**Matolcsi Dávid megoldása.**  $S(n)$ -nek nevezem a feladatban definiált összeget.  $N < n$ -re  $S(n)$  és  $S(n+1)$  is egész, így

$$S(n+1) - S(n) = \frac{a_n}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1} - a_n}{a_1}$$

is mindig egész.

Legyen  $(a_1, a_n) = x$  és  $a_1 = xa'_1$ , illetve  $a_n = xa'_n$ . Ekkor

$$a'_1(S(n+1) - S(n)) = \frac{xa'_na'_1}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1}}{x} - a'_n$$

egész szám. Tehát

$$\frac{xa'_na'_1}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1}}{x}$$

is egész.

Legyen most  $(a_{n+1}, x) = y$  és  $a_{n+1} = ya'_{n+1}$ , illetve  $x = yx'$ . Így

$$\frac{xa'_na'_1}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1}}{x} = \frac{a'_na'_1}{a'_{n+1}} + \frac{a'_{n+1}}{x'} = \frac{x'a'_na'_1 + a'^2_{n+1}}{x'a'_{n+1}}$$

egész. Tehát  $x' \mid a'^2_{n+1}$ . Másrészt tudjuk, hogy  $(a'_{n+1}, x') = 1$ . Ez csak úgy lehetséges, ha  $x' = 1$ , tehát  $x = y$ , azaz  $x \mid a_{n+1}$ .

Ezzel általánosan beláttuk, hogy  $(a_1, a_k) \mid a_{k+1}$ . Másrészt értelemszerűen  $(a_1, a_k) \mid a_1$ , így  $(a_1, a_k) \mid (a_1, a_{k+1})$ .

Teljes indukció szerint tehát ha  $k < t$ , akkor  $(a_1, a_k) \mid (a_1, a_t)$ .

Mivel  $a_1$ -nek csak véges sok osztója van, az  $(a_1, a_t)$  sorozat pedig végtelen és monoton növekvő, létezik egy  $r$  korlát, amitől kezdve minden  $(a_t, a_1) = x$  egyenlő. Így ettől kezdve minden  $a_t = xa'_t$ , ahol  $(a'_t, a'_1) = 1$  (ahol  $a_1 = xa'_1$ ). Ekkor

$$\frac{a_t}{a_{t+1}} + \frac{a_{t+1} - a_t}{a_1} = \frac{a'_t}{a'_{t+1}} + \frac{a'_{t+1} - a'_t}{a'_1} = \frac{a'_ta'_1 + a'^2_{t+1} - a'_ta'_{t+1}}{a'_{t+1}a'_1}$$

egész.

Ez azt jelenti, hogy  $a'_{t+1} \mid a'_ta'_1$ . Mivel  $(a'_{t+1}, a'_1) = 1$ , ezért  $a'_{t+1} \mid a'_t$ . Ez az  $r$  korlától kezdve folyamatosan igaz, így  $a'_t \mid a'_r$  és az  $a'_t$  sorozat monoton csökkenő. Mivel  $a'_r$ -nek csak véges sok osztója van, a végtelen  $a'_t$  sorozatnak egy  $M$  korlát után minden eleme egyenlő lesz.

Így  $M < m$ -re minden  $a_m = xa'_m$  is egyenlő lesz, ezzel az állítást beláttuk.

**6.** Az  $ABCD$  konvex négyszögre teljesül  $AB \cdot CD = BC \cdot DA$ . Az  $X$  pont az  $ABCD$  négyszög olyan belső pontja, amelyre teljesül

$$XAB \sphericalangle = XCD \sphericalangle \quad \text{és} \quad XBC \sphericalangle = XDA \sphericalangle.$$

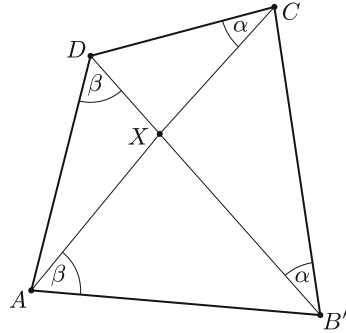
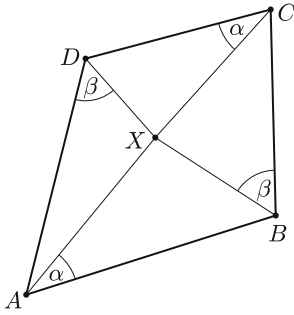
Bizonyítsuk be, hogy  $BXA \sphericalangle + DXC \sphericalangle = 180^\circ$ .

**Gáspár Attila megoldása.**

Legyen  $\angle XAB = \angle XCD = \alpha$  és  $\angle XBC = \angle XDA = \beta$ . Vegyük fel a  $B'$  pontot az ábra szerint úgy, hogy  $XB' = \frac{XA \cdot XC}{XB}$  és  $\angle AXB' = \angle BXC$ . Ekkor

$$\frac{AX}{B'X} = \frac{AX \cdot XB}{XA \cdot XC} = \frac{XB}{XC}^m$$

ezért  $\triangle AXB' \sim \triangle BXC$ . Emiatt  $\angle B'AX = \angle CBX = \beta$ , és  $AB' = BC \cdot \frac{AX}{BX}$ .



$$\begin{aligned} \angle B'XC &= \angle AXB' + \angle BXC - \angle AXB' = \\ &= \angle AXB + \angle BXC - \angle BXC = \angle AXB, \quad \text{és} \end{aligned}$$

$$\frac{B'X}{CX} = \frac{XA \cdot XC}{XB \cdot XC} = \frac{XA}{XB},$$

ezért  $\triangle B'XC \sim \triangle AXB$ . Így  $\angle XB'C = \alpha$  és  $B'C = AB \cdot \frac{XC}{XB}$ . Látható, hogy  $\angle DCB' = \alpha + \angle XCB' = 180^\circ - \angle B'XC$ , ezért  $\sin \angle DCB' = \sin \angle BXC'$ . Ebből következik, hogy

$$\begin{aligned} (1) \quad \frac{T_{B'CD}}{T_{XB'C}} &= \frac{DC \cdot CB' \cdot \sin \angle DCB'}{B'X \cdot XC \cdot \sin \angle B'XC} = \frac{DC \cdot CB'}{B'X \cdot XC} = \\ &= \frac{DC \cdot AB \cdot \frac{XC}{XB}}{B'X \cdot XC} = \frac{CD \cdot AB}{XB' \cdot XB}. \end{aligned}$$

A területeket másképp felírva

$$(2) \quad \frac{T_{B'CD\Delta}}{T_{XB'C\Delta}} = \frac{B'D \cdot B'C \cdot \sin \angle CB'D}{B'X \cdot B'C \cdot \sin \alpha} = \frac{B'D}{B'X} \cdot \frac{\sin \angle CB'D}{\sin \alpha}.$$

Az (1) és (2) egyenletet összevetve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{CD \cdot AB}{XB' \cdot XB} &= \frac{B'D}{B'X} \cdot \frac{\sin \angle CB'D}{\sin \alpha}, \\ (3) \quad \frac{CD \cdot AB}{B'D \cdot XB} &= \frac{\sin \angle CB'D}{\sin \alpha}. \end{aligned}$$

Hasonlóan látható, hogy

$$(4) \quad \frac{T_{DAB'\Delta}}{T_{XDA\Delta}} = \frac{AD \cdot AB'}{DX \cdot XA} = \frac{AD \cdot BC}{DX \cdot BX},$$

$$(5) \quad \frac{T_{DAB'\Delta}}{T_{XDA\Delta}} = \frac{B'D}{DX} \cdot \frac{\sin ADB'\sphericalangle}{\sin \beta}.$$

A (4) és (5) egyenletből kapjuk, hogy

$$\frac{AD \cdot BC}{DX \cdot BX} = \frac{B'D}{DX} \cdot \frac{\sin ADB'\sphericalangle}{\sin \beta},$$

$$(6) \quad \frac{AD \cdot BC}{B'D \cdot XB} = \frac{\sin ADB'\sphericalangle}{\sin \beta}.$$

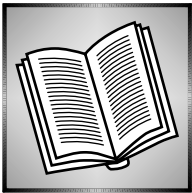
$AB \cdot CD = AD \cdot BC$ , ezért a (3) és (6) egyenlet miatt

$$(7) \quad \frac{\sin CB'D\sphericalangle}{\sin \alpha} = \frac{\sin ADB'\sphericalangle}{\sin \beta}.$$

Tegyük fel, hogy  $X \notin B'D$ . A szimmetria miatt feltételezhetjük, hogy  $X$  a  $B'CD$  háromszögben van. Ekkor  $CB'D\sphericalangle > \alpha$ , ezért  $\sin CB'D\sphericalangle > \sin \alpha$ , és  $ADB'\sphericalangle < < \beta$ , ezért  $\sin ADB'\sphericalangle < \sin \beta$ . Ez ellentmond a (7) egyenletnek. Tehát  $X$  a  $B'D$  szakaszon van. Ebből a feladat állítása könnyen adódik, mert

$$BXA\sphericalangle + DXC\sphericalangle = B'XC\sphericalangle + CXD\sphericalangle = 180^\circ.$$

*Megjegyzés.* Ha  $0^\circ < \varphi_1 < \varphi_2 < 180^\circ$ , akkor csak abban az esetben lehetséges, hogy  $\sin \varphi_1 \geq \sin \varphi_2$ , ha  $\varphi_1 + \varphi_2 \geq 180^\circ$ . Látható, hogy  $CB'D\sphericalangle + \alpha < CB'D\sphericalangle + \alpha + XCB'\sphericalangle = 180^\circ - B'DC\sphericalangle < 180^\circ$ , és hasonlóan  $ADB'\sphericalangle + \beta < 180^\circ$ . Emiatt ez az eset nem fordulhat elő a fenti bizonyításban.



## „Kínai étterem” – a véletlen permutációkról 2.

### 2.2 A „kínai étterem folyamat” (Chinese restaurant process)

Most már rátérhetünk a címben szereplő témánkra.

Hogyan értjük, hogy a tanulók véletlen sorrendben érkeznek? Vagy általánosabban: *hogyan modellezhetjük a „véletlen permutációkat”?*

Nyilván sokféleképpen képzelhetjük el az előbbit, de talán még szemléletesebb, ha a „karácsonyi ajándékozásra” gondolunk. Itt minden tanuló nevét bedobják egy kalapba, jól összekeverik, majd a tanulók egyesével kihúznak egy-egy nevet. Ha