KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK

INFORMATIKA ROVATTAL BŐVÍTVE

ALAPÍTOTTA: **ARANY DÁNIEL** 1894-ben

68. évfolyam 7. szám Budapest, 2018. október

Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta 64 oldalon. ÁRA: 950 Ft

TARTALOMJEGYZÉK

INDEX: 25 450 ISSN 1215-9247

A szerkesztőség címe: 1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1.A, II. emelet 2.76.; Telefon: 372-2500/6541; 372-2850
A lap megrendelhető az Interneten:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.h.shtml`.
Előfizetési díj egy évre: 8100 Ft

E-mail: `szerk@komal.hu`
Internet: `http://www.komal.hu`
This journal can be ordered from the Editorial office:
Pázmány Péter sétány 1.A, II. emelet 2.76., 1117–Budapest, Hungary
telephone: +36 (1) 372-2850
or on the Postal address
H–1518 Budapest 112, P.O.B. 32, Hungary,
or on the Internet:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.e.shtml`.

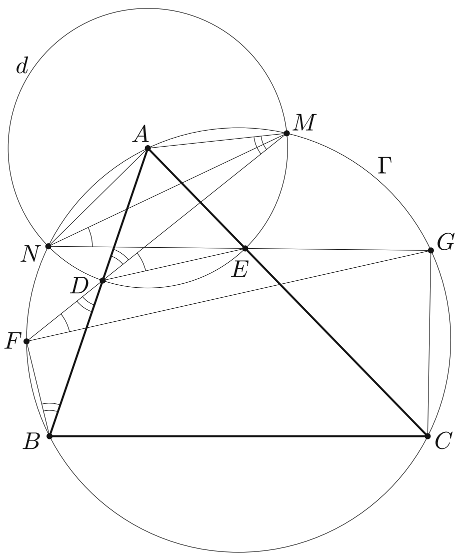
Az 59. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia feladatainak megoldása

A hagyományoknak megfelelően ebben az évben is közöljük a nyári matematikai diákolimpia feladatainak a megoldásait; lényegében úgy, ahogyan a legilletékesebbek, a magyar csapat tagjai leírták. Közreműködésüket köszönjük és ezúton is gratulálunk eredményeikhez.

A szerkesztőség

Első nap*

1. *Legyen Γ a hegyesszögű ABC háromszög körülírt köre. D és E legyenek az AB, illetve AC szakaszok olyan pontjai, amelyekre $AD=AE$. A BD és CE szakaszok felezőmerőlegesei a Γ kör rövidebb AB, illetve AC íveit az F, illetve G pontokban metszik. Bizonyítsuk be, hogy a DE és FG egyenesek párhuzamosak vagy egybeesnek.*



Imolay András megoldása. Messe az FD és a GE egyenes Γ-t másodszor rendre M-ben és N-ben.

F rajta van BD felezőmerőlegesén, így az FDB háromszög egyenlőszárú, $FDB\sphericalangle$ és $ADM\sphericalangle$ csúcsszögek, és $BFAM$ húrnégyszög, így

$$ADM\sphericalangle = FDB\sphericalangle = FBD\sphericalangle =$$

$$= FBA\sphericalangle = FMA\sphericalangle = DMA\sphericalangle,$$

tehát a DAM háromszög egyenlőszárú, így $AD=AM$. Hasonlóan kapjuk, hogy $AE=AN$, és a feladat feltétele szerint $AD=AE$, így $AN=AD=AE=AM$, tehát az N, D, E, M pontok egy A középpontú körre illeszkednek.

$NDEM$ és $GMNF$ húrnégyszögek, így

$$MDE\sphericalangle = MNE\sphericalangle = MNG\sphericalangle = MFG\sphericalangle,$$

tehát a DE és FG egyenesek az FM egyenessel ugyanakkora szöget zárnak be, vagyis a DE és FG egyenesek párhuzamosak vagy egybeesnek. Kész vagyunk.

*A második nap feladatainak megoldását a novemberi számban közöljük.

2. *Határozzuk meg azokat az $n \geqslant 3$ egész számokat, amelyekre léteznek $a_1, a_2, \ldots, a_{n+2}$ valós számok, amelyekre $a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2$ és*

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$$

teljesül minden $i = 1, 2, \ldots, n$ esetén.

Bukva Balázs megoldása. Ha $3 \mid n$, akkor van megoldás, méghozzá legyen

$$a_n = \begin{cases} 2 & n \equiv 0 \pmod 3, \\ -1 & n \equiv 1 \pmod 3, \\ -1 & n \equiv 2 \pmod 3. \end{cases}$$

Ez könnyen ellenőrizhető, hogy jó lesz.

Más esetben nincsen megoldás. Tekintsük az alábbi átrendezést ($a_{n+3} := a_3$):

$$\sum_{i=1}^{n} a_i a_{i+3} = \sum_{i=1}^{n} a_i (a_{i+1} a_{i+2} + 1) = \sum_{i=1}^{n} a_i a_{i+1} a_{i+2} + \sum_{i=1}^{n} a_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i a_{i+1} a_{i+2} + \sum_{i=1}^{n} a_{i+2} = \sum_{i=1}^{n} (a_i a_{i+1} + 1) a_{i+2} = \sum_{i=1}^{n} a_{i+2}^2.$$

Ebből a rendezési egyenlőtlenség alapján azt kapjuk, hogy $a_{i+3} = a_i$ minden i-re, így, ha $(n, 3) = 1$, akkor az összes a_i egyenlő, azaz $a_i = a$ valamilyen a-ra. De ebből az következne, hogy az $x^2 + 1 = x$ egyenletnek a egy valós megoldása, de ennek a másodfokú egyenletnek nincs valós megoldása. Ezzel beláttuk, hogy ha $(n, 3) = 1$, akkor nincs megoldás.

3. *Nevezzük* anti-Pascal háromszögnek *számoknak egy olyan, szabályos háromszög alakú elrendezését, amelyben az utolsó sorbeli számok kivételével minden szám a közvetlenül alatta lévő két szám különbségének az abszolút értékével egyenlő.*

Alább látható egy példa egy olyan anti-Pascal háromszögre, amelynek 4 sora van, és 1-től 10-ig minden egész szám előfordul benne.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 4 & & & \\ & & 2 & & 6 & & \\ & 5 & & 7 & & 1 & \\ 8 & & 3 & & 10 & & 9 \end{array}$$

Létezik-e olyan anti-Pascal háromszög, aminek 2018 sora van, és 1-től $(1 + 2 + \ldots + 2018)$-ig minden egész szám előfordul benne?

Janzer Orsolya Lili megoldása. Tegyük fel, hogy van ilyen háromszög.

Mivel egy ilyen, 2018 soros háromszögnek éppen $1 + 2 + 3 + \ldots + 2018$ mezője van, minden egésznek 1-től $1 + 2 + 3 + \ldots + 2018$-ig pontosan egyszer kellene szerepelnie benne.

Legyen az n-edik sorban M_n a legnagyobb, m_n pedig a legkisebb szám. Most tegyük fel, hogy $n \leqslant 2017$, és vegyük a közvetlenül M_n alatt lévő számokat. Legyenek ezek a számok a és b. Feltehető, hogy ezek közül $a > b$. Így $a - b = M_n$. Mivel $a \leqslant M_{n+1}$ és $b \geqslant m_{n+1}$, kapjuk, hogy $M_{n+1} \geqslant M_n + m_{n+1}$ ($\geqslant M_{n-1} + m_n + m_{n+1} \geqslant \geqslant \ldots$).

Így minden $1 \leqslant i < j \leqslant 2018$-ra

$$M_j \geqslant M_i + \sum_{k=i+1}^{j} m_k.$$

Ebből, mivel $M_1 = m_1$,

$$M_{2018} \geqslant \sum_{k=1}^{2018} m_k.$$

Tehát M_{2018} felírható 2018 különböző pozitív egész összegeként, így $M_{2018} \geqslant 1 + 2 + 3 + \ldots + 2018$, ezért $M_{2018} = 1 + 2 + 3 \ldots + 2018$, és $\{m_1, m_2, \ldots, m_{2018}\}$ egy permutációja az $\{1, 2, \ldots, 2018\}$ számoknak. Következik továbbá, hogy minden egyenlőtlenség egyenlőséggel teljesül, azaz minden $1 \leqslant j \leqslant 2018$ esetén

$$M_j = \sum_{k=1}^{j} m_k.$$

Most legyen minden $n \leqslant 2018$ szám „kicsi", továbbá minden $1 + 2 + \ldots + 2017 \leqslant n \leqslant 1 + 2 + \ldots + 2018$ szám „nagy". Mivel $\{m_1, m_2, \ldots, m_{2018}\}$ az $\{1, 2, \ldots, 2018\}$ számok permutációja, minden sorban pontosan egy kicsi szám lesz.

Ha $n \leqslant 1954$, akkor:

$$\begin{aligned}
M_n = \sum_{k=1}^{n} m_k &\leqslant 2018 + 2017 + \ldots + 65 = \\
&= (1 + 2 + \ldots + 2018) - (1 + 2 + \ldots + 64) = \\
&= (1 + 2 + \ldots + 2018) - 2080 < 1 + 2 + \ldots + 2017,
\end{aligned}$$

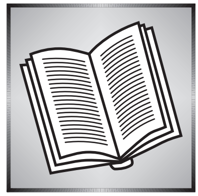
vagyis az n-edik sorban nem lehet egyetlen „nagy" szám sem.

Ha $1955 \leqslant n \leqslant 2017$, akkor legyen l egy nagy szám az n-edik sorban. Legyenek a számok közvetlenül l alatt a és b; feltehető, hogy $a > b$. Így $b = a - l$, és $a \leqslant 1 + 2 + \ldots + 2018$; mivel l „nagy" ($\Rightarrow l \geqslant 1 + 2 + \ldots + 2017$), $b \leqslant 2018$, vagyis b kicsi. Így $b = m_{n+1}$, azaz l közvetlenül m_{n+1} fölött van. Így legfeljebb kettő „nagy" szám lehet az n-edik sorban.

Tehát legfeljebb 126 nagy szám van a sorokban összesen, a legalsót kivéve. Mivel összesen 2019 „nagy" szám van, legalább 1893 „nagy" szám van a legalsó sorban, ezért legfeljebb 125 „nem-nagy" van abban a sorban. A legalsó sorban 2018 szám, így 2017 szomszédos számpár van. Ha figyelmen kívül hagyjuk a közvetlenül az m_{2017} alatti számpárt, és a legfeljebb 250 számpárt, amiben van „nem-nagy", akkor még mindig marad olyan szomszédos pár, aminek minkét tagja „nagy", és nem közvetlenül az m_{2017} alatt van. Viszont a két „nagy” szám különbsége kicsi, és megtalálható a 2017-edik sorban, így az m_{2017}-tel együtt már kettő „kicsi” szám is lenne abban a sorban, ami ellentmondás.

Tehát nem létezik ilyen anti-Pascal háromszög.

A megoldás forrása: `https://artofproblemsolving.com`.



„Kínai étterem” – a véletlen permutációkról 1.

„Ezt a könyvet a tanítványaimtól tanultam”, kezdi Schönberg a *Harmóniatanát.* Nos, én is elmondhatom, hogy az itt következőket a tanítványaimtól tanultam. A valószínűségszámítást a középiskolában erősen kombinatorikus alapon tanítjuk – már amennyire tanítjuk. Viszont egykori tanítványommal, *Virág Bálinttal,* a *University of Toronto* professzorával a valószínűségszámításról beszélgetve észre kellett vennem, mennyire másképp néz egy vérbeli valszámos a valószínűségszámításra. Ezért felkértük őt, hogy a matematika tagozatos tanárok 2015-ös továbbképzésén mondja el, ő hogyan látja azokat a fogalmakat, amelyeket mi tanítunk. Erre egy – *Gyenes Zoltánnal* folytatott – beszélgetés keretében vállalkozott. Az egyik kérdés arra vonatkozott, hogy hogyan néz ő rá a véletlen permutációkra. Válaszul elmondta a *„kínai étterem folyamatot”* (*Chinese restaurant process*), ami sok mindent nagyon szemléletessé tesz. Azóta alaposan átgondoltuk Gyenes Zolival, hogy mit lehet ebből a tanításban hasznosítani és – egyelőre csak szakkörön – ki is próbáltuk. Az ottani tapasztalatokat is felhasználom.

1. A permutációk ciklus-szerkezete

Mindenekelőtt szükségünk van a permutációk ún. *ciklus-szerkezetére.* Ez kis csoportelméleti szemlélettel is beolthatja a kombinatorikai megközelítésünket. Szeretem az alábbi feladattal kezdeni. A feladatot egy kb. ötven évvel ezelőtti olimpiai felkészítő feladatsorban találtam még évtizedekkel ezelőtt. (A feladatsort emlékezetem szerint Hódi Endre jegyezte, és Reiman tanár úrnál beszéltük meg.)

1. feladat. *Egy osztály tanulói névsor szerint állnak egyenes sorban. A testnevelés tanár szeretné mihamarabb nagyság szerinti sorba állítani őket. Ehhez a következőt eszeli ki: kijelöl párokat úgy, hogy minden tanuló legfeljebb egy párban szerepel. Sípszóra ezek a párok helyet cserélnek. Ezután ismét kijelöl párokat (megint mindenki legfeljebb egy párban szerepel), akik újabb sípszóra helyet cserélnek. Ezt addig folytatja, amíg nagyság szerinti sorba nem rendezte őket. Szeretné a legkevesebb sípszóval elérni ezt. Segítsünk neki. Feltesszük, hogy látja a nagyság szerinti sorrendet.*

Megoldás. Először próbáljuk kitalálni, merre érdemes keresgélni. Ha minden lépésben csak egy cserét engednénk, akkor, mint ismeretes, $n-1$ csere elég volna (és kevesebb nem mindig). A mi feladatunk megengedi, hogy egy lépésben $\frac{n}{2}$ cserét is végrehajtsunk. A kérdés az, hogy reménykedhetünk-e, hogy két ilyen lépés is elég.

A válaszhoz gondolatban készítsünk el egy irányított gráfot, amelyben minden tanulótól ahhoz a tanulóhoz indul él, akinek a mostani helyére kell állnia. Ha egy tanuló jó helyen áll, akkor egy irányított hurokél tartozik hozzá. Formálisabban: a csúcsok az $1, 2, \ldots, n$ számok, ahol n az osztály létszáma. Ha a névsorban k. helyen levő tanuló a nagyság szerinti sorban az l-*edik,* akkor a „k" csúcsból az „l" csúcsba mutat él. Így egy olyan irányított gráfot kapunk, amely irányított körökből áll (körnek tekintjük a hurokélt és azt is, ha két pont között mindkét irányban fut él). A körök pont- (és él-)diszjunktak. A feladat az, hogy minden ilyen kör mentén az irányítás mentén eggyel arrébb kerüljön minden tanuló.

Nézzük tehát először azt az esetet, ha a gráf egyetlen körből áll. Gondolatban ültessük a nyilak szerint egy kör alakú asztalhoz a tanulókat. (Ez persze nagyon megkavarja a tényleges sorrendjüket – erre még visszatérünk –, de ezzel egyelőre ne törődjünk.) A következő feladathoz jutunk:

2. feladat. *Egy osztály tanulói körben állnak. Az a feladat, hogy mindenki a tőle eggyel jobbra álló helyére kerüljön. Egy lépés most is ugyanaz, mint az előző feladatban, a tanulók száma n. Hány lépésben* (= *hány sípszóval*) *érhető el, ha egy lépés most is az, ami az előző feladatban.*

Ha ezt a feladatot megoldottuk (a megoldást lásd alább), utána már hamar befejezhetjük a megoldást abban az esetben is, amikor az eredeti feladatban az irányított gráf több körből áll. Gondolatban minden körnek megfeleltetünk egy-egy ilyen szabályos sokszöget. Mindegyikben egyszerre végre tudjuk hajtani a két lépést, hiszen a körök pontdiszjunktak, tehát a benne szereplő tanulók egymástól függetlenül párosíthatók és mozgathatók. Tehát összességében is két lépésben célhoz juthatunk. Egy lépés nem mindig elég.

Adósak vagyunk még a 2. feladat megoldásával:

Feltehetjük, hogy egy szabályos n szög csúcsaiban állnak a tanulók. A feladat: el kell forgatni a szabályos sokszöget $360/n$ fokkal. Ismeretes, hogy ez a sokszög két „szomszédos" tükörtengelyére való tükrözéssel megvalósítható, amelyek tengelye $180/n$ fokos szöget zárnak be egymással. Egy tükrözésnél diszjunkt párok cserélnek helyet. (Ha n páros, akkor az egyik tükrözésnél mindenkinek van párja, a másikban két szemközti csúcsban állónak nincs. Ha n páratlan, akkor mindkét alkalommal egy-egy tanulónak nincs párja.)

Tehát két lépésben célhoz érhetünk. Egy lépés nyilván nem elég.

1.1. Az 1. feladat megoldásának elemzése

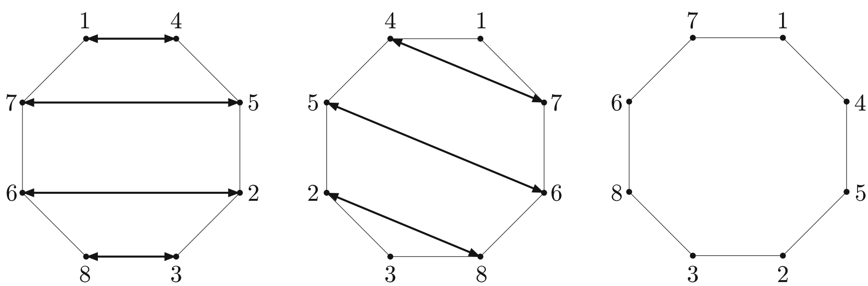
Meg akarjuk vizsgálni részletesen, hogy mit is csináltunk az 1. feladat megoldásában. Ehhez előre bocsátunk egy didaktikai megjegyzést.

Bármennyire kézenfekvő az a gondolat, hogy a permutációt ciklusokra bontva szemléljük, mégsem könnyen érthető egy, a permutációk szerkezetével most ismerkedő tanulónak. Van benne egy absztrakciós lépés. Közelebbről: egy számsorozatot, az $1, 2, \ldots, n$ számok egy adott sorrendbeli leírását nem „készen adottnak" tekintjük, hanem egy *mozgásnak, függvénynek.* A csoportelméletben ez nagyon hasznos szemlélet. Itt a feladat szövege is sugallja ezt az absztraktabb szemléletet. De ettől még igaz marad, ami minden absztrakciós lépéssel kapcsolatban igaz: aki még nem jutott el hozzá, annak van benne valami megfoghatatlan, míg aki már elsajátította, az nehezen tud emlékezni arra a szituációra, amikor még nem értette. Ez egy olyan *nehézség* a matematika tanításánál, amit ha nem veszünk nagyon komolyan, akkor nem szabad csodálkoznunk, ha a matematikát valami akár elutasító (ez a gyakoribb), akár ködösen áhítatos borzongás veszi körül. Erre mindig újra figyelmeztetnünk kell magunkat, ha nem akarunk annak a kollégámnak a sorsára jutni, aki a többi tanárral úgy utáltatta meg magát és a matematikát, hogy egy irodalomból, történelemből igen jó diákot butának titulált, „még egy elsőfokú egyenletet sem tud rendezni" felkiáltással. Hogy a mi esetünkben mi a nehézség, azt a legegyszerűbb eset részletes elemzésével is szemléltetjük. Az alábbiakban ehhez végigkövetjük a 2. feladat megoldását egy konkrét példán.

Legyen az egyszerűség kedvéért 8 tanuló az osztályban, és a névsor szerinti sorban álljanak a következő nagyság szerinti sorrendben:

$$4 \quad 3 \quad 8 \quad 5 \quad 2 \quad 7 \quad 1 \quad 6.$$

Tehát az első helyen a negyedik legmagasabb áll, a második helyen a harmadik legmagasabb stb. Amikor gondolatban átrendeztük őket, akkor az *ábrán* látható első sorrendet kapjuk.



Az első lépésben az első ábrán látható párok cserélnek helyet: (1 4), (5 7), (2 6), (3 8). Így az ábrán látható második sorrendet kapjuk. A második lépésben az 1 és a 3 helyben marad (erre a tengelyre tükrözünk), helyet cserélnek a következő párok: (4 7), (6 5), (8 2). Most az ábrán látható utolsó sorrendet kapjuk. Mint látjuk, valóban eggyel elforgattuk a kört.

De mit jelent ez a feladatunk szempontjából? Tényleg azt kaptuk, amit akartunk? És ha igen, hogyan kell a tanárnak a párokat kijelölnie?

Arról könnyen meggyőződhetünk, hogy az első lépésben *nem* a legmagasabbat és a negyedik legmagasabbat kell felcserélnünk. Jobban meg kell értenünk, mi is történt.

Nézzük, mi történt valójában az első lépésben. Az eredeti sor így nézett ki: 4 3 8 5 2 7 1 6. Itt helyet cserélt az első és a negyedik helyen álló, az ötödik és hetedik helyen álló, a második és hatodik helyen álló, valamint a harmadik és nyolcadik helyen álló. A *tényleges* sor most tehát így alakult: 5 7 6 4 1 3 2 8.

Az első ábrán látható 4 1 7 6 8 3 2 5 (4) kör az *eredetileg rendre a* 4., 1., 7. *stb. helyen állókat* jelenti, tehát a nagyság szerinti sorrend szerint írva az 5 4 1 7

6 8 3 2 (5) körről van szó. Amikor azt mondtuk, hogy a második lépésben az 1 és a 3 helyben marad, akkor azt mondtuk, hogy az *eredetileg ezeken a helyeken állók* maradnak a helyükön, vagyis a 4. és 8. legmagasabb. És ez rendben is van: ők valóban a 4., illetve a 8. helyen állnak. A második lépésben lezajló (4 7) csere azt jelenti, hogy az eredetileg a 4. és 7. helyen álló helyet cserél, ami az 5. legmagasabb és a legmagasabb helycseréjét jelenti, ez megint csak jó, hiszen most az ötödik legmagasabb áll az első helyen és a legmagasabb az ötödik helyen. Ugyanúgy ellenőrizhető, hogy a további két csere után valóban a nagyság szerinti sorrendet kapjuk.

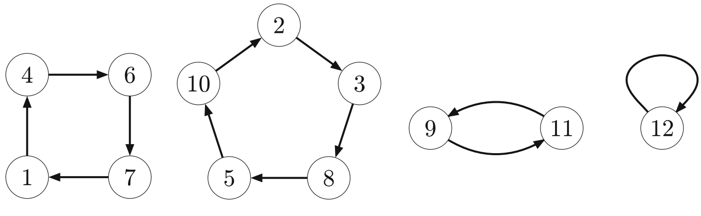
Ez a példa elég világosan mutatja, hogy *csak látszólag* egyszerű elvonatkoztatni a konkrét sorrendtől és áttérni egy *gondolatbeli* sorrendre. Valójában egy *dinamikusabb nyelvre* fordítottunk és ezzel *tettünk egy absztrakciós lépést.* Nem könnyű az eredeti nyelven követni, hogy valójában mi is történik. De vigyázzunk: nem akkor sajátítottunk el egy absztrakciós lépést, ha problémátlanul vissza tudjuk követni a konkrét esetben – ez korántsem egyszerű általában –, hanem ha biztosnak érezzük magunkat, hogy a követés nehézségei ellenére is végig tudjuk követni a konkrét történést, „át tudjuk dolgozni”! Ha erről a követésről lemondunk, akkor az absztrakció a levegőben fog lebegni, nem fogjuk látni, hova vezet tovább. Ha viszont megijedünk, hogy nem megy kapásból, akkor nem fogjuk magunknak igazán elhinni, hogy képesek vagyunk felfogni az absztraháló lépést.

Ezután rátérhetünk az 1. feladat megoldásának az elemzésére.

A névsor szerint sorban álló tanulókat megsorszámoztuk, majd ebből a sorrendből akartunk egy másik sorrendhez, azaz permutációhoz eljutni. A permutációk felírásának szokásos módja az, hogy a felső sorba felírjuk az eredeti sorrendet (ezt néha el is hagyjuk), és alá az elérendőt. Legyen ez például a következő (az egyszerűség kedvéért 12 tagú osztályt választunk):

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	3	8	6	10	7	1	5	11	2	9	12

Mi ehelyett elkészítettük a következő, irányított körök diszjunkt uniójából álló gráfot:



Ezeket a köröket nevezzük a permutáció *ciklusainak.* Most kódolhatjuk ezt a permutációt úgy is, hogy egymás után leírjuk az egyes ciklusokat és zárójellel választjuk őket el egymástól. A fenti esetben: (1 4 6 7) (2 3 8 5 10) (9 11) (12).

Ez a permutáció ciklus-szerkezete.

Nyilvánvaló, hogy ebből a felírásból is „visszafejthetjük” a permutáció eredeti felírását. Tetszőleges ilyen ciklus-szerkezetet felírhatunk, csak arra kell vigyáznunk, hogy minden elem pontosan egy ciklusban szerepeljen, és akkor egyértelműen „visszafejthető” lesz. (Megjegyezzük, hogy ha ismert a halmaz, amelyen a permutáció hat, akkor az egyelemű ciklusokat szokás nem kiírni.)

Ugyanannak a permutációnak a ciklus-szerkezetét azonban többféleképpen is felírhatjuk. Két okból is. Egyrészt a *ciklusok sorrendje* (egyelőre legalábbis) *tetszőleges*, másrészt *az egyes ciklusokat bármely tagjuktól kezdve is felírhatjuk.* Az első helyett írhatnánk pl. (6 7 1 4)-et, a második helyett pl. (3 8 5 10 2)-t, a harmadik helyett (11 9)-et is. Tehát a fenti permutációt így is írhatjuk: (11 9) (6 7 1 4) (3 8 5 10 2), és még sokféleképpen.

Ennek a ciklikus felírási módnak a csoportelméletben is sok haszna van (lásd erről pl. Hegedüs Pál feladatsorát[1]). Mi most a véletlen permutációk felé vesszük az irányt, amelyek szintén jobban megfoghatók innen nézve.

Természetesen, ha tanítani támad kedvünk a ciklikus szerkezetet, akkor érdemes gyakoroltatni konkrét permutációk felírását. És érdemes azt is kipróbálni, hogy két permutáció szorzatát hogyan kaphatjuk meg ezzel a felírással gyorsan és mechanikusan. De erre itt nincs szükségünk.

2. Véletlen permutációk

2.1. A permutációk újrakódolása

A következő feladat szintén a permutáció ciklusairól szól, de most már véletlen permutációról van szó.

3. feladat. *Az osztály most moziba megy. Egy sorba szól a jegyük, egymás mellé. Mindenki el is megy a moziba, de egyesével, véletlen sorrendben érkeznek. Ahogy megjönnek, mindenki leül az első üres székre, függetlenül attól, hogy hova szól a jegye. (Az elsőnek érkező az első helyre stb.) Amikor már mindenki leült, az utolsó helyen ülőnek eszébe jut, hogy ő mégis ott szeretne ülni, ahova a jegye szól. Megnézi, hova szól, és ha épp ott ül, akkor nem tesz semmit. Ha nem oda szól, akkor felállítja azt, aki a helyén ül és helyet foglal. Akit felállított, az most már maga is oda akar ülni, ahova a jegye szól. Két eset van: vagy épp az üres helyre szól a jegye, akkor leül oda, vagy foglalt a helye, akkor felállítja az ott ülőt, és leül a helyére. Ez folytatódik, amíg ahhoz nem érnek, akinek a jegye a még üres helyre szól. Ő is leül a helyére és kezdődhet az előadás. Mennyi a valószínűsége, hogy az első helyen ülőnek nem kell felállnia?*

1. megoldás. Ki tudjuk számolni. Az ellentét eseményt számoljuk ki, azt tehát, hogy hány olyan permutáció van, amelyben az első helyen ülőnek fel kell állnia. Az a kérdés, hogy hány olyan permutáció van, amelyben az utolsó helyen ülő és az első helyen ülő tanulók ugyanabban a ciklusban vannak. Ha ez a ciklus k embert mozgat meg, akkor még $k-2$ embert kell kiválasztanunk, ezt $\binom{n-2}{k-2}$-féleképpen tehetjük meg. Utána őket még $(k-1)!$-féleképpen lehet sorba tenni. (Az utolsó helyen ülő jegye a másik $k-1$ helyének bármelyikére szólhat, a ciklusban következőé még $k-2$ hely bármelyikére stb.). A maradó $n-k$ ember pedig akárhogy

[1] `http://specmat.wiki/index.php/Kezd%C5%91lap`.

permutálható egymás között, ez $(n-k)!$-féleképpen lehetséges. Összeszorzásukkal $(n-2)!(k-1)$ adódik. Ezt kell minden lehetséges k-ra, tehát $k=2,\dots,n$-re összeadnunk. Az összeg

$$(n-2)!\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n!}{2},$$

és ez a permutációknak pontosan a fele. Tehát $1/2$ valószínűsége van annak is, hogy az első helyen ülő tanulónak is fel kell állnia.

2. megoldás. Cseréljük meg az első és az utolsó tanuló jegyét. Ezzel párosítjuk a permutációkat. Ha az egyik permutációban az első és utolsó tanuló egy ciklusban volt, akkor a csere után külön ciklusba kerülnek és fordítva – erről a nyilak berajzolásával könnyen meggyőződhetünk. Vagyis minden párból pontosan az egyikben kell felállnia az első tanulónak is. A keresett valószínűség tehát $1/2$.

A második megoldás talán a legegyszerűbb. Az itt használt gondolatnak fontos szerepe van a permutációk elméletében, lásd például a már említett, a ciklusokról szóló feladatsort. A véletlen permutációkhoz azonban érdemes még egy megoldást megismernünk. Ehhez az egész permutációt fel kell írnunk ciklus-szerkezettel. Szükségünk van a következő ötletre (én Lovász László könyvében olvastam először):

4. feladat. *Láttuk, hogy a permutációk ciklikus felírása nem egyértelmű. Egy permutáció sokféleképp is felírható. Az egyes ciklusokon belül is bármelyik elemtől elindulhatunk, de a ciklusokat is tetszőleges sorrendben írhatjuk egymás után. Most szeretnénk egyértelműsíteni a ciklikus felírást – éspedig úgy, hogy el is hagyhatjuk a zárójeleket. Lehetséges ez?*

Megoldás. Feltesszük, hogy az első n pozitív szám permutációjáról van szó. A „csel” a következő. Először a ciklusokat rakjuk sorba, mégpedig úgy, hogy a bennük szereplő legkisebb számok növekvő sorrendet adjanak. Az első ciklus tehát az lesz, amelyben szerepel az 1, a második az lesz, amelyikben az első ciklusban nem szereplő számok közül a legkisebb áll stb. A fenti (a 2. feladat megoldása utáni) példánkban ez így volt: (1 4 6 7) (2 3 8 5 10) (9 11) (12). Most még a ciklus sorrendjét kell úgy felírni, hogy egyben kódoljuk azt is, hol van a vége. A megoldás a következő: minden ciklusban a legkisebb elemet írjuk utoljára. Így az első ciklus végét az 1 szám jelöli, a második ciklus végét az 1 előtt nem szereplő legkisebb szám megjelenése jelöli stb. A fenti példánk tehát így alakul: 4 6 7 1 3 8 5 10 2 11 9 12. Megjegyezzük, hogy ha a legnagyobb szám áll a legutolsó helyen, akkor az biztosan egyelemű ciklust alkot. Világos, hogy így az első $n$szám minden permutációját újra kódoltuk, egy-egyértelműen – egy-egy n hosszú permutációval.

A megoldásban szereplő felírási módot a következőkben „házi használatra” a permutáció *újrakódolásának* fogjuk nevezni.

5. feladat*.[2] (Gyakorló feladat.) *Melyik permutációkon nem változtat a fenti újrakódolás?*

Az újrakódolás segítségével már könnyen megadhatjuk az ígért

[2]A *-gal jelölt feladatok megoldása a cikk következő részével megjelenő függelékben található.

1. megoldást a 3. feladathoz. A feladat azt kérdezi, hogy mennyi a valószínűsége annak, hogy az 1 és az n egy ciklusban szerepel. Ez pontosan akkor következik be, ha az újrakódolás során az n az 1-es előtt áll. Ez pedig nyilván az esetek felében teljesül, hiszen a kódokat párosíthatjuk úgy, hogy felcseréljük 1 és n helyét.

Végül egy megjegyzés a 3. feladathoz: Egyik megoldásban sem játszik szerepet, hogy épp az utolsó helyen ülő áll fel és épp az első helyen ülőről szól a kérdés. *Bárhogy jelölünk ki két tanulót, mindig* 1/2 *annak a valószínűsége, hogy ők egy ciklusban lesznek (tehát ha az egyik feláll, akkor a másiknak is fel kell állnia).* Mi a valószínűsége annak, hogy a 3. feladatban *mindenkinek* fel kell állnia?

6. feladat. *a) Mi a valószínűsége annak, hogy a* 3. *feladatban mindenkinek fel kell állnia?*

b) Mi a valószínűsége annak, hogy pontosan k embernek kell felállnia?

1. megoldás. *a*) Ha mindenkinek fel kell állnia, az azt jelenti, hogy az egész permutáció egyetlen ciklus, tehát mind az n tanulót megmozgatja. Az elsőnek felálló tanuló jegye most $n-1$ másik helyre szólhat, a következőé a maradó $n-2$ helyre stb., ez összesen $(n-1)!$ lehetőség, a permutációk $1/n$-ed része. Ez a keresett valószínűség. (A megoldás egy mondatban: n elem ciklikus permutációinak száma $(n-1)!$, vagyis a permutációk n-ed része.) Ugyanígy kiszámolható az is, hogy $1/n$ a valószínűsége annak, hogy pontosan k tanulónak kell felállnia, azaz, hogy az adott tanuló egy k elemű ciklusban van benne. A számolást az olvasóra bízzuk, helyette egy másik megoldást mutatunk.

2. megoldás. A 3. feladat 3. megoldásánál alkalmazott újrakódolás is egyszerű választ tesz lehetővé mindkét kérdésre, és megvan az az előnye, hogy számolni sem kell.

a) Pontosan akkor kell mindenkinek felállnia, ha a permutáció újrakódolásában az 1-es áll az utolsó helyen. Minthogy *az újrakódolás után az* 1*-es bármelyik helyen ugyanolyan valószínűséggel áll* (hiszen minden permutáció pontosan egyszer szerepel az újrakódolásnál is), ezért $1/n$ valószínűséggel áll az utolsó helyen. Így ennyi a valószínűsége annak is, hogy mindenkinek fel kell állnia.

b) Az 1-es a k-adik helyen is ugyanezzel a valószínűséggel áll, így csak annyit kell meggondolnunk, hogy ugyanaz marad a válasz, ha nem az *utolsó* helyen ülő tanuló áll fel először, hanem az *első* helyen ülő.

Ebben az esetben viszont már az a kérdés, hogy milyen valószínűséggel szerepel az 1 egy pontosan k elemű ciklusban. Amire a válasz az, hogy ahányszor pontosan a k-adik helyen áll az újrakódolásban. És ez minden k-ra egyforma, tehát $1/n$.

A megoldásban kapott eredmény permutációkra átfogalmazva így szól:

Tétel. *Legyen n és k tetszőleges pozitív egész szám, $k \leqslant n$. Tekintsük n elem egy véletlen permutációját. Annak a valószínűsége, hogy ebben egy adott elem pontosan k hosszú ciklusban szerepel, k értékétől függetlenül $1/n$.*

Surányi László

EGMO 2018, Firenze

Az idei Európai Lány Matematikai Diákolimpia (EGMO) Olaszországban került megrendezésre. Kis csapatunk (*Janzer Lili, Kerekes Anna, Kocsis Anett* és *Vankó Miléna*) május 9-én repülőre szállt és Pisába utazott. Megnéztük a ferde tornyot és a belvárost, elkészítettük a kötelező fényképeket, majd vonattal jutottunk el Firenzébe, ahol már kisebb fogadóbizottság várt ránk: egy albán fiú, aki a továbbiakban segítette csapatunkat és egy félig magyar, félig román lány. Utóbbi magyarul köszöntött minket, így meg voltunk lepve, hogy ő nem a mi csapatunkat, hanem az íreket fogja kísérni.

Másnap a megnyitóra került sor. Eddigi életem során sok ilyen eseményen vettem részt, de ennyire szórakoztató nem sok volt közöttük. Az olasz szervezők kisebb komédiát varázsoltak a színház színpadára. Az ünnepség végén felvettük egyen pulcsijainkat, magunkhoz vettük a magyar zászlót és integetve vonultunk végig a színpadon. Ebben a lezáró részben nem csak az volt érdekes, hogy egy csodálatos színház színpadáról mosolyogtunk a nézőkre, hanem a csapatok sorrendje is. Nem a szokásos módon ABC rendben hívták az országokat, hanem átlagéletkor alapján növekvő sorrendben.

Ebéd után besétáltunk a városba. Végigsétáltunk a folyó mentén. Megnéztük az aranyművesek hídját és a dómot. Miután eleredt az eső, hazasiettünk.

A következő két napon lezajlottak a versenyek. Kicsit izgultunk, de csapatvezetőink (Zoli és Panna) biztatása megtette hatását, és sokkal jobb kedvvel mentünk be a termekbe. A feladatok között sok érdekes volt és összességében élveztük a gondolkodást. Végül 2 ezüst- és 2 bronzérmet szereztünk és hetedikek lettünk az országok listáján. Bár ez egy egészen jó eredmény, kicsit sajnáltuk, hogy mindannyian 1 vagy 2 ponttal maradtunk le a jobb éremről.

Természetesen nem hagytuk, hogy ez nagyon lelombozzon és a koordinálás napján remekül éreztük magunkat a kiránduláson. A szervezők Pisába vittek el minket, ahol egy idegenvezető mesélt nekünk a város történelméről, majd egy pizzériában ebédeltünk. Miután jól belakmároztunk és megkóstoltuk a közeli cukrászda fagyiját, továbbmentünk Luccába. Itt már csak pár órát töltöttünk, de így is nagy élmény volt. A kisvárosban sétálva sorra leltük meg a szebbnél szebb templomokat, a kellemesebbnél kellemesebb cukrászdákat és a jobbnál jobb képeslapokat.

A záró ceremóniára is Firenze egyik színházában került sor, majd egy gyönyörű palotába mentünk vacsorázni. Az étel remek volt, bár ez minden ételről elmondható, amit az út során kaptunk, a hely pedig egyszerűen mesés.

Ezután már csak a hazautazás volt hátra, de útközben még megálltunk Bolognában, ahol sétáltunk egyet, majd megkóstoltunk egy-két édességet és elindultunk a reptérre.

Így visszagondolva jobb dolgunk nem is lehetett volna. Gyönyörű helyen voltunk, finomakat ettünk és remekül éreztük magunkat.

EGMO 2018 csapat

EGMO 2018/2019 felhívás

2019. április 7. és 13. között Ukrajnában, Kijevben rendezik a nyolcadik Európai Lány Matematikai Diákolimpiát, az EGMO-t (`www.egmo.org`). Jövőre is négyfős csapattal indulhatunk, melynek összetétele 2019 elején derül ki. A válogatás szempontjai: válogatóversenyek (2018 őszén és 2019 elején) – kis mértékben az elmúlt évi is –, országos versenyek (matematika OKTV, Kürschák József Matematikai Tanulóverseny, Arany Dániel Matematikaverseny), a KöMaL A és B pontversenyei és az évközi munka.

A versenyen való sikeres szerepléshez, illetve a kiutazó csapatba kerüléshez is alapvetően nélkülözhetetlen az alapos felkészülés, ezt többféleképpen is szeretnénk segíteni. Év közben időközönként küldünk az érdeklődőknek (tematikus) feladatsorokat; az ezekre küldött megoldásokra személyesen is visszajelzünk, illetve lehet kérdezni is. Emellett az őszi válogatóig legeredményesebb diákok részt vehetnek a téli brit-magyar közös IMO felkészítő táborban. A két válogató összesített eredménye alapján a legeredményesebb diákok részt vehetnek az intenzív felkészítő hétvégén.

Érdemes minél előbb, akár már kilencedikesként bekapcsolódni, minden lány jelentkezését szeretettel várjuk, akit érdekel a versenyrészvétel lehetősége és nem riad vissza attól, hogy ezért komolyabb munkát fektessen be!

Aki szeretne részt venni a válogatásban és felkészülésben, vagy bármilyen kérdése van, írjon minél előbb az `egmo.hungary@gmail.com` címre, vagy jelentkezzen a honlapon leírtak szerint: `http://www.cs.elte.hu/~nagyzoli/EGMO.html`.

Nagy Zoltán Lóránt, Kiss Melinda Flóra és **Fekete Panna**

Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

I. rész

1. Adjuk meg azon $P(x;y)$ pontok halmazát, amelyek koordinátáira teljesül:

a) $(x^2-y^2)(x^2+y^2-4)=0$;

b) $\left(x^2-y\right)^2+\left(x^2+y^2-14y+36\right)^2=0$. (*11 pont*)

2. A $\overline{\text{SzÁMADÓ}}$ és az $\overline{\text{ADÓSzÁM}}$ egy-egy olyan hatjegyű, a $\overline{\text{SzÁM}}$ és az $\overline{\text{ADÓ}}$ pedig egy-egy olyan háromjegyű szám, amelyben az Sz, Á, M, A, D és Ó betűk különböző pozitív számjegyek.

a) Mennyi a $\overline{\text{SzÁM}}+\overline{\text{ADÓ}}$ összeg, ha $\overline{\text{SzÁMADÓ}}+\overline{\text{ADÓSzÁM}}=678\,678$?

b) Adjuk meg a $\overline{\text{SzÁMADÓ}}$ számot, ha még azt is tudjuk, hogy $\text{Sz}>\text{A}$, valamint $\overline{\text{SzÁM}}\cdot\overline{\text{ADÓ}}=90\,585$.

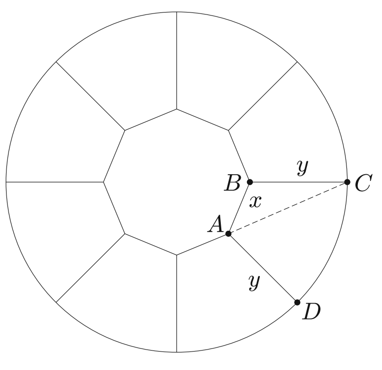
c) Mennyi az $\overline{\text{ADÓSzÁM}}$, ha $7\cdot\overline{\text{ADÓSzÁM}}=6\cdot\overline{\text{SzÁMADÓ}}$? (*12 pont*)

3. A Szép Utazások iroda tájékoztatójában a repülőgépen szállítható csomagokról ez olvasható:

„Az iroda által bérelt járatokon 15 kg/fő feladott poggyász és 1 db 8 kg/fő kézipoggyász szállítása díjtalan, a többletsúlyért fizetni kell. Mindegyik poggyásznak téglatest alakúnak kell lennie. A feladott poggyász egyik élhossza sem lehet több, mint 150 cm, és a három különböző irányú él hosszának összege nem haladhatja meg a 220 cm-t. A kézipoggyász maximális hossza 56 cm, maximális szélessége 45 cm, maximális mélysége 25 cm lehet, azonban a három méret összesen nem haladhatja meg a 115 cm-t.”

a) Bea kézipoggyásznak való kisbőröndöt vásárol az utazáshoz. A boltban a megfelelő bőröndök egyik élhossza 25 cm. Szeretné, ha az élhosszak összege a megengedett maximális, ugyanakkor a bőrönd felszíne 8500 cm^2 lenne. Milyen méretű bőrönd felelne meg ezeknek a feltételeknek?

b) László az utazáshoz bőröndöt szeretne vásárolni, amibe a feladható poggyászként engedélyezett 15 kg-ot bepakolhatja. A neki tetsző bőröndök egyik élének hossza 40 cm volt. Milyen méretű bőröndöt válasszon ezek közül, ha szeretné, hogy a térfogata maximális legyen? Mekkora lesz ekkor a bőrönd térfogata? (*14 pont*)



4. A Fővárosi Nagycirkusz 13 méter átmérőjű porondjának vázlatát mutatja az *ábra.* A vízi cirkuszi előadásban a porond kilenc, azonos területű része függőlegesen, le-föl mozgatható.

a) Mekkora a porond közepén látható szabályos nyolcszög területe?

b) A nyolc egybevágó (trapézszerű) síkidomot a könnyebb mozgatás miatt körben egy nagyon speciális anyaggal borították. Ehhez előzetesen meg kellett határozni ezeknek a síkidomoknak a kerületét. Mekkora a kerülete az $ABCD$ trapézszerű síkidomnak?

c) A nyolc egybevágó síkidom függőleges mozgatásához megépített szerkezet miatt minden ilyen síkidom alatt szükség volt egy átlós merevítőre. Adjunk képletet az AC merevítő hosszára az ábra x és y hosszúságú szakaszának ismeretében. (A képletben előforduló szögfüggvényértékek négy tizedes jegy pontossággal szerepeljenek.) (*14 pont*)

II. rész

5. Rebeka új szemüveget vásárol, de nem szeretné, hogy a lencsékért 25 000 Ft-nál többet fizessen. A szaküzletben kiderül, hogy ha hagyományos lencsét vásárolna, akkor 4280 Ft-ot fizetne a két lencséért. Rebeka tudja, hogy a minőséget a különböző típusú bevonatok javíthatják, ezért tükröződésmentes és karcolás mentes bevonatot kér a lencsékre. A bevonatok mindegyikének 99 $\mathrm{Ft/cm}^2$ az ára. (A lencsék felületét síknak vehetjük.) Azt is eldöntötte, hogy a hagyományosnál vékonyabb lencsét szeretne választani. A készlet szerint ez lehet 10, 20, 30, 40, illetve 50%-kal vékonyabb. Ezeknek a lencséknek az ára a hagyományoshoz képest rendre 40, 80, 160, 320, 640%-kal drágább.

Egy lencse határvonalát az $f(x) = 2 - \frac{2}{25}x^2$ és a $g(x) = \frac{x^2}{5} - 5$ hozzárendeléssel megadott függvények grafikonja által meghatározott síkidom határvonala adja. A koordinátarendszer egysége 5 mm-rel egyenlő. Mekkora területű részt foglal el egy lencse az asztalon? A hagyományos lencséhez képest hány százalékkal választhat vékonyabb lencsét Rebeka? (*16 pont*)

6. A Rubik-kocka feltalálásának évfordulójára díszdobozos kiadást terveznek. Az egyik változat szerint legyen a doboz egy olyan négyoldalú szabályos gúla, amelynek alapéle ugyanolyan hosszú, mint az oldaléle. Az elképzelés szerint a kocka egyik lapja illeszkedik a gúla alaplapjára, az ezzel párhuzamos lap csúcsai pedig a gúla oldaléleire.

a) Mekkora legyen a doboz éleinek hossza, ha a Rubik-kocka élhosszúsága: $a = 5{,}7$ cm?

b) A sok-sok terv közül azonnal elvetették azokat, amelyeknél a játék a doboz 35%-át sem tölti ki. A fenti terv megfelelő-e ezen feltétel ismeretében? (*16 pont*)

7. *a*) A tízes számrendszerben felírt egyjegyű a, kétjegyű $\overline{ab}$ és háromjegyű $\overline{abb}$ szám ebben a sorrendben egy számtani sorozat első, második és tizenkettedik tagja. (Azonos betűk azonos, különböző betűk különböző számjegyeket jelölnek.) Hány darab megfelelő kétjegyű szám van? Mennyi a legnagyobb megfelelő kétjegyű szám esetén a számtani sorozat első 20 tagjának összege?

b) A pozitív számokból álló (a_n) mértani sorozat kilenc egymást követő tagjából képezzünk három számot úgy, hogy összeadjuk az első hármat, aztán a következő hármat, és végül az utolsó hármat. Mutassuk meg, hogy az így kapott három szám tízes alapú logaritmusa egy számtani sorozat három egymást követő tagja lesz. (*16 pont*)

8. Az $ABCDEFGH$ téglatestben úgy jelöltük a csúcsokat, hogy az $ABCD$ alaplapra az AE, BF, CG és DH élek merőlegesek. Tudjuk, hogy a HAD szög 30°-os, a FAB szög pedig 60°-os.

a) Mekkora az AFH háromszög területe, ha a téglatest térfogata 3375 cm^3?

b) Mekkora szögben hajlik a téglatest AG testátlója az $ABCD$ laphoz?

c) Dávid a téglatest ábráját a 8 csúccsal, a 12 élével és az AH, valamint AF éllel egy gráfnak tekinti. Barbara pedig a hiányzó élek berajzolásával készített egy teljes gráfot. Azt állítja, hogy rajzolás közben minden csúcsot érintett, viszont egy élt csak egyszer rajzolt meg, és közben a ceruzáját nem kellett felemelnie a papírról. Miért tartjuk ezt hihetőnek? Melyik csúcsból kezdhette a rajzolást, és melyik csúcsba érkezhetett? (*16 pont*)

9. Legyen n pozitív egész szám. Adottak az alábbi sorozatok:

$$\{a_n\} = \big\{\lg(n+1)\big\};$$

$$\{b_n\} = \left\{\frac{n^3 - 5n^2 - n + 5}{n+1}\right\};$$

$$\{c_n\} = \big\{|n+2| + |n-6|\big\}.$$

Válaszoljunk (indoklással) mindhárom esetben, hogy a sorozat alulról, felülről korlátos vagy nem, illetve monoton vagy nem. Ha van, adjunk meg egy alsó, illetve felső korlátot. (*16 pont*)

Számadó László
Budapest

Megoldásvázlatok a 2018/6. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *Egy szabályos n-szög alapú egyenes hasáb lapátlóinak száma, testátlóinak száma és a 24 valamilyen sorrendben egy számtani sorozat egymást követő tagjait alkotják. Határozzuk meg n lehetséges értékeit.* (*11 pont*)

Megoldás. A lapátlókból kétfajta van, az oldallapokon és az alaplapokon. Minden oldallapon 2 lapátló van, így ezekből összesen $2n$ van. Az alaplapokon $\frac{n(n-3)}{2}$ lapátló van, így ezekből összesen $n(n-3)$ van. Tehát összesen

$$2n + n(n-3) = n^2 - n$$

lapátló van.

Szemeljük ki az egyik alaplap egy tetszőleges csúcsát. Ebből $n-3$ testátló húzható. Így összesen $n(n-3) = n^2 - 3n$ testátló van. Tehát valamilyen sorrendben az $n^2 - n$, $n^2 - 3n$ és a 24 egy számtani sorozat egymást követő tagjait alkotják. Nem a konkrét sorrendjük a lényeges, hanem az, hogy melyik van középen. Ezek alapján 3 esetet vizsgálunk meg és felhasználjuk, hogy számtani sorozatnál egy elem megegyezik a tőle szimmetrikusan elhelyezkedő tagok számtani közepével.

1. eset: Ha $n^2 - n$ van középen, akkor

$$n^2 - n = \frac{n^2 - 3n + 24}{2}, \quad n^2 + n - 24 = 0,$$

ennek nincs pozitív egész megoldása.

2. eset: Ha $n^2 - 3n$ van középen, akkor

$$n^2 - 3n = \frac{n^2 - n + 24}{2}, \quad n^2 - 5n - 24 = 0,$$

ennek gyökei -3 és 8. Tehát ekkor $n = 8$.

3. eset: Ha a 24 van középen, akkor

$$24 = \frac{n^2 - 3n + n^2 - n}{2}, \quad n^2 - 2n - 24 = 0,$$

ennek gyökei -4 és 6. Tehát ekkor $n = 6$.

Tehát n lehetséges értékei 6 és 8.

Ellenőrzés. $n = 6$ esetén 30 lapátlója és 18 testátlója van a hasábnak és a 18; 24; 30 valóban számtani sorozatot alkotnak. $n = 8$ esetén 56 lapátlója és 40 testátlója van a hasábnak és a 24; 40; 56 valóban számtani sorozatot alkotnak.

2. *Tekintsük a következő állításokat.*

A: Két irracionális szám összege mindig irracionális.

B: Van olyan számsorozat, amely korlátos, nem monoton és nem konvergens.

C: Ha egy ötpontú egyszerű gráf minden csúcsa legalább harmadfokú, akkor biztosan tartalmaz kört.

a) Döntsük el, hogy igazak vagy hamisak az állítások. Válaszainkat indokoljuk. (*8 pont*)

b) Fogalmazzuk meg a C állítás megfordítását. Döntsük el, hogy igaz vagy hamis az állítás megfordítása. Válaszunkat indokoljuk. (*4 pont*)

Megoldás. *a*) Az A állítás hamis, ugyanis $\sqrt{2} + \left(-\sqrt{2}\right) = 0$. Ismert, hogy $\sqrt{2}$ irracionális, így nyilván $-\sqrt{2}$ is irracionális.

A B állítás igaz, pl. $a_n = (-1)^n$. Nyilván korlátos, a korlátok -1 és 1. Nem monoton és jól ismert, hogy nem konvergens.

A C állítás igaz. Mivel az ötpontú gráfunk egyszerű és minden csúcsa legalább harmadfokú, ezért minden csúcsának foka 3 vagy 4. Az nem lehet, hogy minden csúcs foka 3, mert ekkor a fokszámösszeg nem lenne páros. Tehát biztosan van negyedfokú csúcs. Ekkor bármely másik élt berajzolva a gráfba már kör képződik.

Megjegyzés. Az ún. Dirac-tétel miatt a C-ben lévő gráfban Hamilton-kör is biztosan van.

b) A C állítás megfordítása:

Ha egy ötpontú egyszerű gráf tartalmaz kört, akkor minden csúcsa legalább harmadfokú.

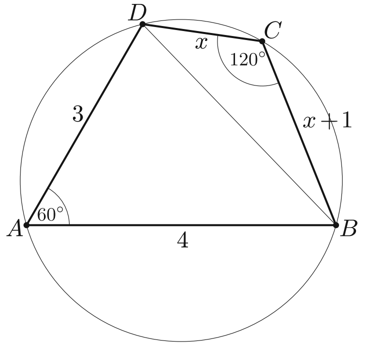
Ez hamis állítás, rengeteg ellenpélda adható. Egy a sok közül, ha berajzolunk egy három hosszú kört és a másik két csúcs izolált pont lesz.

3. *Egy négyszög két szomszédos oldalának hossza* 3, *illetve* 4 cm, *közbezárt szögük* 60°. *A négyszög húr- és érintőnégyszög is egyben.*

a) Mekkora a négyszög másik két oldala? (*7 pont*)

b) Számítsuk ki a négyszög beírt és köré írt körének sugarát. (*7 pont*)

(Válaszainkat cm*-ben, két tizedesjegyre kerekítve adjuk meg.)*



Megoldás. *a*) Használjuk az *ábra* jelöléseit. A négyszög C csúcsánál lévő szöge $120°$, mivel $ABCD$ húrnégyszög. Ha a CD oldal hossza x, akkor a BC oldal hossza $x+1$, mivel a négyszög érintőnégyszög. Írjuk fel az ABD háromszögben a koszinusztételt:

$$BD^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos 60°,$$

innen

$$BD = \sqrt{13}\,.$$

Írjuk fel a koszinusztételt a BCD háromszögben:

$$x^2 + (x+1)^2 - 2 \cdot x \cdot (x+1) \cdot \cos 120° = 13.$$

Innen $x^2 + x - 4 = 0$, a számunkra megfelelő gyök

$$x = \frac{\sqrt{17}-1}{2} \approx 1{,}56 \text{ cm}, \quad \text{így} \quad x+1 = \frac{\sqrt{17}+1}{2} \approx 2{,}56 \text{ cm}.$$

Tehát a hiányzó oldalak két tizedesjegyre kerekítve 1,56 cm és 2,56 cm hosszúak.

b) A beírt kör sugarát a $T = rs$ összefüggésből határozzuk meg.(Ez a képlet minden érintősokszögre igaz.) Mivel

$$s = \frac{3+4+1{,}56+2{,}56}{2} = 5{,}56 \text{ cm}$$

és

$$T_{ABCD} = T_{ABD} + T_{BCD} = \frac{3 \cdot 4 \cdot \sin 60°}{2} + \frac{1{,}56 \cdot 2{,}56 \cdot \sin 120°}{2} \approx 6{,}93 \text{ cm}^2,$$

ezért $r = \frac{T}{s} \approx 1{,}25$ cm.

A négyszög köré írható körének sugara megegyezik az ABD háromszög köré írható körének sugarával, így az $R = \frac{abc}{4T}$ képlet segítségével kapjuk, hogy

$$R = \frac{3 \cdot 4 \cdot \sqrt{13}}{4 \cdot \frac{3 \cdot 4 \cdot \sin 60°}{2}} \approx 2{,}08 \text{ cm}.$$

Tehát a beírt kör sugara 1,25 cm, míg a köré írható kör sugara 2,08 cm.

Megjegyzés. A köré írható kör sugarát az $R = \frac{a}{2\sin\alpha}$ összefüggésből is meghatározhattuk volna.

4. *a*) *Mutassuk meg, hogy az* $f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1}$ *függvény páratlan és korlátos függvény.* (*7 pont*)

b) *Egy gömb alakú higanycsepp* n *egyforma, kisebb cseppre esett szét. Ezáltal a kis cseppek összfelszíne éppen négyszerese lett az eredeti higanycsepp felszínének. Határozzuk meg* n *értékét.* (*7 pont*)

Megoldás. *a*) A függvény értelmezési tartománya a valós számok halmaza. Azt kell megmutatni, hogy tetszőleges valós x-re $f(-x)=-f(x)$.

Mivel $f(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}$, ezért

$$f(-x)=\frac{2^{-x}-1}{2^{-x}+1}=\frac{1-2^x}{1+2^x}=-f(x).$$

Tehát a függvény páratlan.

Mivel a függvény páratlan, ezért elég megmutatni, hogy $x\geqslant 0$ esetén korlátos. Azt állítjuk, hogy tetszőleges nemnegatív x-re $f(x)<1$. Valóban:

$$\frac{2^x-1}{2^x+1}=1-\frac{2}{2^x+1}<1.$$

Tehát a függvény korlátos, korlátok: -1 és 1.

b) Jelöljük a nagy gömb sugarát R-rel, a kicsi gömbök sugarát r-rel. A szétesés során a higany térfogata nem változik, tehát

$$n\cdot\frac{4r^3\pi}{3}=\frac{4R^3\pi}{3}.$$

Innen $R=\sqrt[3]{n}\cdot r$, azaz $\frac{r}{R}=\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$.

Az összfelszín a négyszeresére növekedett, tehát $\frac{n\cdot 4r^2\pi}{4R^2\pi}=4$, azaz $n\cdot\left(\frac{r}{R}\right)^2=4$. Innen $n\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}=4$, $\sqrt[3]{n}=4$, $n=64$ adódik.

Tehát a higanycsepp 64 részre esett szét.

Ellenőrzés a feladat szövege alapján.

II. rész

5. *a*) *Cinkelt érmét szeretnénk készíteni. A „Trükkös hatos" nevű játékban akkor nyerünk, ha az érme hatszori feldobásakor pontosan négyszer lesz fej és kétszer írás. Milyen módon cinkeljük az érmét (vagyis mekkora legyen a fej dobásának a valószínűsége), ha a lehető legnagyobb valószínűséggel szeretnénk nyerni?* (*8 pont*)

b) *Legfeljebb hány különböző pozitív prímszám adható meg úgy, hogy közülük bármely három összege is prímszám legyen?*

Adjunk példát a maximális elemszámra és mutassuk meg, hogy több prímszámot nem tudunk megadni a kívánt módon. (*8 pont*)

Megoldás. *a*) Legyen a fej dobásának valószínűsége p, az írásé $1-p$, ahol $p\in[0;1]$. A binomiális eloszlás ismert képlete szerint

$$p(\text{6 dobásból négyszer fej, kétszer írás})=\binom{6}{4}\cdot p^4\cdot(1-p)^2.$$

Ez akkor veszi fel maximumát, amikor $p^4\cdot(1-p)^2=p^6-2p^5+p^4$ maximális.

I. megoldás. Tehát az alábbi függvény maximumhelyét kell megkeresnünk: $f: [0;1] \to R$, $f(p) = p^6 - 2p^5 + p^4$. A szélsőértéket derivált segítségével határozzuk meg:

$$f'(p) = 6p^5 - 10p^4 + 4p^3.$$

Megoldjuk az $f'(p) = 0$ egyenletet:

$$2p^3 \cdot (3p^2 - 5p + 2) = 0,$$

innen a gyökök $p_1 = 0$; $p_2 = \frac{2}{3}$; $p_3 = 1$.

$f''(p) = 30p^4 - 40p^3 + 12p^2$ és $f''\left(\frac{2}{3}\right) < 0$ adódik, tehát $p = \frac{2}{3}$-ban helyi maximuma van a függvénynek. Mivel $f(0) = f(1) = 0$, ezért $p = \frac{2}{3}$ globális maximumhelye is a függvénynek.

Megjegyzés. A függvény menetének vizsgálata történhet táblázatos módszerrel is.

II. megoldás. A maximum helyét deriválás nélkül, közepekkel is meg tudjuk határozni:

$$\sqrt[6]{\frac{p}{2} \cdot \frac{p}{2} \cdot \frac{p}{2} \cdot \frac{p}{2}.(1-p) \cdot (1-p)} \leqslant \frac{4 \cdot \frac{p}{2} + 2 \cdot (1-p)}{6} = \frac{1}{3},$$

azaz $p^4 \cdot (1-p)^2 \leqslant \frac{16}{729}$ és egyenlőség fennállása $\frac{p}{2} = 1 - p$, $p = \frac{2}{3}$ esetén.

b) A 2 nem szerepelhet a kiválasztott prímszámok között, mivel másik két páratlan prímet hozzáadva 2-nél nagyobb páros eredményt kapunk, így nem lehet prím. Tehát csak páratlan prímekkel dolgozunk. A prímeket 3-mal való osztási maradék alapján három csoportba soroljuk: az első csoportban lesznek a 3-mal osztva 1, a másodikban a 3-mal osztva 2 maradékot adó prímek és a harmadik csoportba egyedül a 3 kerül, mivel az egyedüli prím, ami osztható 3-mal, maga a 3. Világos, hogy az első és a második csoportból is legfeljebb két elemet választhatunk, mivel ha legalább hármat vennénk belőlük, összegük 3-nál nagyobb, 3-mal osztható lenne, így nem lenne prím. Az is könnyen látszik, hogy ha mindhárom csoportból választunk, akkor összegük ismét 3-mal osztható lenne. Tehát legfeljebb négy prímet tudunk a feltételeknek megfelelően megadni és azt is csak úgy, ha két-két elemet választunk az első és a második csoportból.

Némi próbálkozás után megtalálhatjuk pl. az alábbi prímeket: 7; 11; 13; 23. Könnyű ellenőrizni, hogy ezek valóban jók.

6. *a*) *Egy családban három gyerek van: Anna, Béla és Csaba. Minden nap kisorsolják, hogy ki vigye le sétáltatni kutyájukat, Buksit (egy kalapba teszik egy-egy cédulára írva a nevüket, majd húznak egy cédulát).*

Hány olyan sorsolás van, amelynél egy hetes időszakot véve, minden gyerek sorra kerül a kutyasétáltatás során? (*9 pont*)

b) *Igazoljuk (teljes indukcióval vagy más módszerrel), hogy ha $n \geqslant 9$ pozitív egész szám, akkor $2^n > 32n$.* (*7 pont*)

Megoldás. *a*) *I. megoldás.* Azon sorsolások számát, amikor mindenki sorra kerül, komplementer segítségével adjuk meg. Az összes sorsolások száma $3^7 = 2187$.

A komplementer azokat az eseteket tartalmazza, amikor 1 vagy pontosan 2 gyerek kerül sorra. Azoknak az eseteknek a száma, amikor 1 gyerek kerül sorra, nyilván 3. Azoknak az eseteknek a száma, amikor pontosan 2 gyerek kerül sorra,

$$\binom{3}{2} \cdot (2^7 - 2) = 378,$$

ugyanis először kiválasztjuk, hogy melyik 2 gyerek fog sorra kerülni a hét folyamán, ez $\binom{3}{2}$. Ezután a kiválasztott 2 gyereket 2^7-féleképpen lehetne beosztani a héten, de ezekből az esetekből 2 nem lesz jó, amikor csak az egyikük van kisorsolva. Tehát $2187 - 378 - 3 = 1806$ olyan sorsolás van, amikor mindhárom gyerek sorra kerül.

II. megoldás. A feladatot úgy is megoldhatjuk, hogy megnézzük, a 7-et hányféleképpen lehet felbontani pozitív egész számok összegére. Négy eset adódik:

1. eset: $5 + 1 + 1$, ebből $\binom{3}{1} \cdot 7 \cdot 6 = 126$ sorsolás van;

2. eset: $4 + 2 + 1$, ebből $3! \cdot \binom{7}{4} \cdot \binom{3}{2} = 630$ sorsolás van;

3. eset: $3 + 3 + 1$, ebből $\binom{3}{1} \cdot \binom{7}{3} \cdot \binom{4}{3} = 420$ sorsolás van;

4. eset: $3 + 2 + 2$, ebből $\binom{3}{1} \cdot \binom{7}{3} \cdot \binom{4}{2} = 630$ sorsolás van.

Összesen $126 + 630 + 420 + 630 = 1806$ sorsolás lehetséges.

b) Teljes indukcióval bizonyítunk.

$n = 9-$re: $2^9 > 32 \cdot 9$ igaz, hiszen $512 > 288$.

Tegyük fel, hogy n-re igaz az állítás, azaz ha $n \geqslant 9$ rögzített, akkor $2^n > 32n$.

Belátjuk, hogy ekkor $(n+1)$-re is igaz az állítás, azaz $2^{n+1} > 32 \cdot (n+1)$.

Valóban: $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2 \cdot 32n = 32 \cdot 2n = 32 \cdot (n + n) \geqslant 32 \cdot (n + 1)$, tehát $2^{n+1} > 32 \cdot (n + 1)$. Az első becslésnél az indukciós feltevést használtuk fel, míg a másodiknál azt, hogy $n \geqslant 1$. Ezzel az állítást beláttuk.

7. *a*) *Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet:* (*8 pont*)

$$\operatorname{tg} x \cdot \sin 4x = \frac{1}{2}.$$

b) *Adjuk meg azokat a t pozitív egész számokat, amelyekre a fenti egyenletnek a $[2018; t]$ intervallumon pontosan 2018 darab valós megoldása van.*

Számításaink során a π minél pontosabb értékével számoljunk. (*8 pont*)

Megoldás. *a*) Először is tegyünk kikötést az egyenletben szereplő kifejezésekre. $\cos x \neq 0$, azaz $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, ahol $k \in \mathbb{Z}$. Az egyenlet megoldása során felhasználjuk a $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ és a $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ addíciós képleteket.

$$\operatorname{tg} x \cdot \sin 4x = \frac{1}{2}, \quad \frac{\sin x}{\cos x} \cdot 2 \sin 2x \cdot \cos 2x = \frac{1}{2},$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} \cdot 2 \cdot 2 \sin x \cos x \cdot (1 - 2\sin^2 x) = \frac{1}{2},$$

$$\sin^2 x \cdot (1 - 2\sin^2 x) = \frac{1}{8}, \quad 16\sin^4 x - 8\sin^2 x + 1 = 0,$$

$$(4\sin^2 x - 1)^2 = 0, \quad \sin^2 x = \frac{1}{4},$$

$\sin x = \frac{1}{2}$ vagy $\sin x = -\frac{1}{2}$.

Ezen egyenletek megoldásait összevonva adódnak a megoldások: $x_1 = \frac{\pi}{6} + k\pi$ és $x_2 = -\frac{\pi}{6} + k\pi$, ahol $k; l \in \mathbb{Z}$.

Ezek a megoldások nem ellentmondóak a kikötéssel. Ellenőrzés vagy végig ekvivalens átalakításokra való hivatkozás.

b) Írjuk le egymás után az egyenlet pár megoldását:

$$\ldots; \ -\frac{7\pi}{6}; \ -\frac{5\pi}{6}; \ -\frac{\pi}{6}; \ \frac{\pi}{6}; \ \frac{5\pi}{6}; \ \frac{7\pi}{6}; \ \frac{11\pi}{6}; \ \frac{13\pi}{6}; \ \ldots$$

Észre lehet venni, hogy a megoldások a π egész számú többszöröseitől éppen $\frac{\pi}{6}$ távolságra szimmetrikusan helyezkednek el. Mivel $642\frac{1}{6}\pi < 2018$ és $642\frac{5}{6}\pi > 2018$, így az első megoldáspár, ami beleesik a kívánt intervallumba: $642\frac{5}{6}\pi$ és $643\frac{1}{6}\pi$. Mivel 2018 darab megoldásnak kell benne lennie az intervallumban és a megoldásokat párosával érdemes felírni, ezért – mivel az első megoldáspár a 643π-re szimmetrikus – az 1009. pár az 1651π-re lesz szimmetrikus: $1650\frac{5}{6}\pi$ és $1651\frac{1}{6}\pi$. Tehát olyan t pozitív egész számot kell megadni, amelyre $1651\frac{1}{6}\pi \in [2018; t]$ és $1651\frac{5}{6}\pi \notin [2018; t]$.

Innen adódnak t lehetséges értékei: $t_1 = 5188$ és $t_2 = 5189$.

8. *Húzzunk érintőket az $y = x^2$ parabola $A(-1; 1)$ és $B(2; 4)$ pontjaiba.*

a) *Írjuk fel az érintők egyenletét.* (*3 pont*)

b) *Mutassuk meg, hogy az érintők a $C\left(\frac{1}{2}; -2\right)$ pontban metszik egymást.* (*2 pont*)

A parabola két részre osztja az ABC háromszöget, egy konvexre és egy konkávra.

c) *Számítsuk ki az ABC háromszög területét.* (*5 pont*)

d) *Határozzuk meg a konvex és a konkáv alakzat területét.* (*6 pont*)

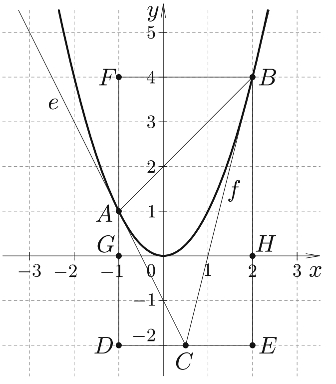
Megoldás. *a*) *I. megoldás.* Az érintő meredekségét derivált segítségével határozzuk meg: $y' = 2x$. Az e egyenes egyenlete $y - 1 = -2(x + 1)$, azaz $y = -2x - 1$, az f egyenes egyenlete $y - 4 = 4(x - 2)$, azaz $y = 4x - 4$.

II. megoldás. Az érintők egyenletét $y = mx + b$ alakban is kereshettük volna. Felhasználjuk, hogy a pont illeszkedik az egyenesre és felírjuk az érintési feltételt, mely szerint a kapott másodfokú egyenlet diszkriminánsa 0.

Az e egyenletét így meghatározva: $y = mx + b$, $A \in e$, így $1 = -m + b$, $b = 1 + m$, innen $y = mx + 1 + m$. Ez az e egyenes és az $y = x^2$ parabola érintik egymást, így az $x^2 = mx + 1 + m$, azaz $x^2 - mx - (1 + m) = 0$ egyenlet diszkriminánsa 0, azaz $m^2 + 4(1 + m) = 0$, innen $m = -2$ és $y = -2x - 1$ adódik. Az f egyenlete ugyanígy adódik.

b) Meg kell oldanunk az $y = -2x - 1$ és az $y = 4x - 4$ egyenletekből álló egyenletrendszert. Innen $-2x - 1 = 4x - 4$, $x = \frac{1}{2}$ és $y = -2$.

c) Az ABC háromszög köré egy téglalapot rajzolunk.



$$T_{ABC} = T_{DEBF} - T_{ACD} - T_{BCE} - T_{ABF} =$$

$$= 18 - \frac{9}{4} - \frac{9}{2} - \frac{9}{2} = \frac{27}{4}.$$

Megjegyzés. Az ABC háromszög területét pl. úgy is kiszámolhattuk volna, hogy (skaláris szorzattal vagy koszinusztétellel) kiszámoljuk a C-nél lévő szögét és az AC, BC oldalakat, majd használjuk a trigonometrikus területképletet.

d) A konvex alakzat területét úgy kapjuk meg, hogy kiszámoljuk az $ABHG$ derékszögű trapéz területét és abból kivonjuk a parabola alatti területet (melyet integrálással kapunk meg).

$$T_{ABHG} = \frac{1+4}{2} \cdot 3 = \frac{15}{2}, \quad \int_{-1}^{2} x^2 \, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} = 3, \quad T_{\text{konvex}} = \frac{15}{2} - 3 = \frac{9}{2}.$$

Innen a konkáv alakzat területét már könnyen megkapjuk: $T_{\text{konkáv}} = \frac{27}{4} - \frac{9}{2} = \frac{9}{4}$.

Megjegyzés. Be lehet látni, hogy ha az eredeti A és B pontok tetszőlegesek, akkor is fennáll, hogy $T_{\text{konvex}} = 2 \cdot T_{\text{konkáv}}$.

9. *A Bástya SE sakkcsapata nemrég indult először a nemzeti csapatbajnokságban. Egy találkozón 2 csapat küzd meg egymással, mindkét csapat 12 játékossal játszik. Ennek a 12 játékosnak van egy előre rögzített erősségi sorrendje és az egyik csapat legerősebbje játszik a másik csapat legerősebbjével, a második legerősebbek is egymással, stb. Így egy találkozón 12 partira kerül sor. Egy partinak 3 kimenetele lehet: győzelem esetén 1, vereség esetén 0, míg döntetlen esetén fél pontot kap a játékos. Tegyük fel, hogy egy-egy parti kimenetele nem függ a játékosok sakktudásától, mindegyik kimenetel egyformán valószínű. A csapat által elért pontszámot úgy kapjuk meg, hogy összeadjuk az egyes csapaton belüli játékosok által elért pontokat.*

a) Mutassuk meg, hogy csak úgy lehet döntetlen (azaz amikor 6 pontot ér el mindkét csapat) egy találkozó, ha egy csapaton belül ugyanannyiszor nyernek és veszítenek. *(2 pont)*

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy – a fenti feltételek mellett – a Bástya SE döntetlent ér el első mérkőzésén? *(7 pont)*

c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy az első három találkozójuk döntetlen lesz és a negyedik meccset megnyerik? Az egyes találkozókon elért eredményeket egymástól függetleneknek tekinthetjük.

Válaszainkat négy tizedesjegyre kerekítve adjuk meg. *(2 pont)*

A csapat legjobb pontszerzője 9 partit játszott az idény folyamán. Az általa szerzett pontok átlaga $\frac{2}{3}$, míg a szórásnégyzete $\frac{1}{6}$.

d) Határozzuk meg, hogy a játékos hány partiban nyert, vesztett illetve ért el döntetlent. *(5 pont)*

Megoldás. *a) I. megoldás.* A csapat egy találkozón összesen 12 partit játszik, ebből legyen x nyerése, y vesztése és $12-x-y$ döntetlene. Az összpontszámnak 6-nak kell lennie:

$$x\cdot 1+y\cdot 0+(12-x-y)\cdot\frac{1}{2}=6,\quad \text{azaz}\quad 6+\frac{x}{2}-\frac{y}{2}=6,$$

tehát $x=y$. Pont ezt kellett megmutatni.

II. megoldás. Vegyük azt az esetet, amikor mind a 12 partiban döntetlent érnek el. Ekkor teljesül, hogy ugyanannyi vereség és győzelem van. Ha egy döntetlen helyett pl. egy nyerés lenne, akkor kell egy vesztés is, hogy az átlagos pontszám ne változzon. Tehát a nyerések és vesztések száma az eredeti 0-hoz képest mindig ugyanannyival növekszik. Pont ezt kellett megmutatni.

b) Az előző feladatrészből kiderül, hogy mely esetekben lehet döntetlen a találkozó kimenetele. Ezeknek az eseményeknek a valószínűségeit meghatározzuk, majd a végén összeadjuk ezeket.

$$P(12\text{ döntetlen})=\frac{1}{3^{12}};$$

$$P(10\text{ döntetlen},\ 1\text{ nyerés},\ 1\text{ vesztés})=\frac{12\cdot 11}{3^{12}}=\frac{132}{3^{12}};$$

$$P(8\text{ döntetlen},\ 2\text{ nyerés},\ 2\text{ vesztés})=\frac{\binom{12}{2}\cdot\binom{10}{2}}{3^{12}}=\frac{2970}{3^{12}};$$

$$P(6\text{ döntetlen},\ 3\text{ nyerés},\ 3\text{ vesztés})=\frac{\binom{12}{3}\cdot\binom{9}{3}}{3^{12}}=\frac{18\,480}{3^{12}};$$

$$P(4\text{ döntetlen},\ 4\text{ nyerés},\ 4\text{ vesztés})=\frac{\binom{12}{4}\cdot\binom{8}{4}}{3^{12}}=\frac{34\,650}{3^{12}};$$

$$P(2\text{ döntetlen},\ 5\text{ nyerés},\ 5\text{ vesztés})=\frac{\binom{12}{5}\cdot\binom{7}{5}}{3^{12}}=\frac{16\,632}{3^{12}};$$

$$P(0\text{ döntetlen},\ 6\text{ nyerés},\ 6\text{ vesztés})=\frac{\binom{12}{6}}{3^{12}}=\frac{924}{3^{12}}.$$

Ezért $P(\text{döntetlen})=\frac{73\,789}{3^{12}}\approx 0{,}1388$.

c) Szimmetria okok miatt egyenlő annak a valószínűsége, hogy az adott csapat megnyeri vagy éppen elveszíti a találkozót. A döntetlen valószínűségét már kiszámoltuk, így a nyerés valószínűsége:

$$P(\text{megnyeri a találkozót a csapat})=\frac{1-P(\text{döntetlen})}{2}=0{,}4306.$$

Mivel a találkozók kimenetelei egymástól függetleneknek tekinthetők, ezért a valószínűség:

$$P(\text{első három döntetlen, 4.-et megnyerik}) = 0{,}1388^3 \cdot 0{,}4306 \approx 0{,}001\,15.$$

Tehát a keresett valószínűség kb. 0,0012.

d) A legjobb pontszerző a 9 meccsből nyerjen x-et, döntetlent érjen el y partiban és $9-x-y$ partit veszítsen el. Ekkor az átlag:

$$\frac{x\cdot 1 + y\cdot \frac{1}{2} + (9-x-y)\cdot 0}{9} = \frac{2}{3},$$

innen $x+\frac{y}{2}=6$ adódik.

A szórásnégyzet:

$$\frac{x\cdot 1^2 + y\cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (9-x-y)\cdot 0^2}{9} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{6}$$

innen $x+\frac{y}{4}=\frac{11}{2}$ adódik.

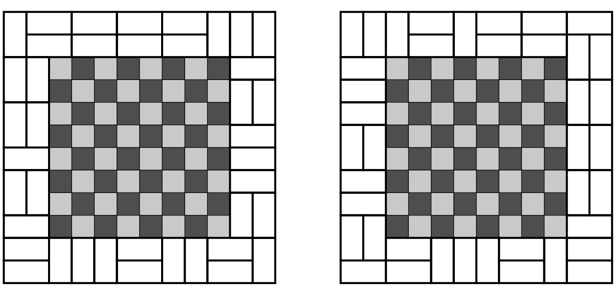
A két kapott egyenletből álló egyenletrendszert megoldva $x=5$, $y=2$, $9-x-y=2$ adódik. Tehát a legjobb pontszerző 5 partit nyert, 2-t elvesztett és 2-ben döntetlent ért el.

Ellenőrzés a feladat szövege alapján.

Fridrik Richárd
Szeged

Matematika feladatok megoldása

B. 4920. *Hányféleképpen lehet 1×2-es dominókkal átfedés és hézag nélkül lefedni a 8×8-as sakktábla körül felvett 2 egység szélességű szegélyt? (Az* ábrán *látható két lefedést különbözőnek tekintjük.)*

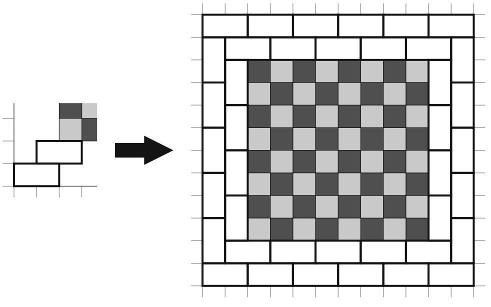


(*6 pont*) Javasolta: *Róka Sándor* (Nyíregyháza)

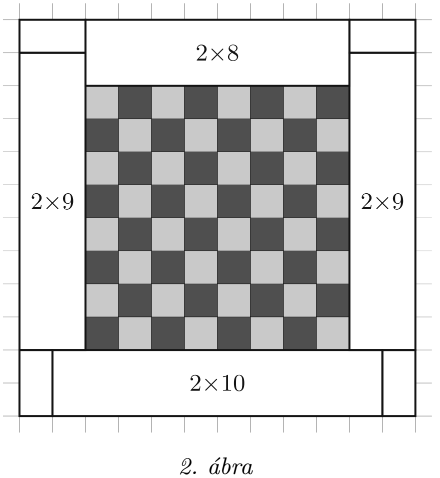
Megoldás. Először teljes indukcióval azt igazoljuk, hogy egy $2 \times n$-es téglalapot 1×2-es dominókkal F_{n+1}-féleképpen lehet lefedni, ahol F_{n+1} a Fibonacci-sorozat $(n+1)$-edik tagját jelöli ($F_1 = 1, F_2 = 1$).

A 2×1-es téglalap egyféleképpen fedhető le ($F_2 = 1$), a 2×2-es pedig kétféleképpen (2 vízszintes, vagy 2 függőleges, $F_3 = 2$). Tegyük fel, hogy az állítás igaz minden $2 \times k$ méretű téglalapra, ahol $k < n$. Tekintsük egy $2 \times n$-es téglalap lehetséges lefedéseit és bontsuk ezeket két csoportra attól függően, hogy a bal alsó sarkuk milyen állású dominóval van lefedve. (Mivel sarokban van, csak kétféleképpen lehet.) Ha függőleges ez a dominó, akkor a megmaradó rész $2 \times (n-1)$-es, amit az indukciós feltevés miatt F_n-féleképpen lehet lefedni. Ha vízszintes, akkor a bal felső sarkot már csak egyféleképpen tudjuk lefedni, egy vízszintes dominóval. Ha ezt a 2 dominót letesszük, a megmaradó rész $2 \times (n-2)$-es, amit F_{n-1}-féleképpen lehet lefedni. Ezzel minden esetet megvizsgáltunk, tehát egy $2 \times n$-eset $F_n + F_{n-1} = F_{n+1}$-féleképen lehet lefedni.

Most térjünk át a feladatra. Ha lefedjük egy sarkát, és melléteszünk egy vele párhuzamosat 1-gyel elcsúsztatva (lásd *1. ábra*), akkor a lefedést már csak egyféleképpen fejezhetjük be, mert mindig lesz egy nem lefedett mező, amit az addig lerakottak miatt csak egyféleképpen lehet lefedni (pl: a legalsó sor 3. négyzete).



1. ábra



2. ábra

Ilyen lefedésből összesen 2 van, mivel a sarkot, ahol kezdtük az eljárást függőleges és vízszintes dominóval is le lehet fedni. (Ha a másikat választjuk, akkor a fenti ábra 90°-os elforgatottját kapjuk, és akármelyik csúcsnál kezdjük, ennek a két lefedésnek a valamelyikét kapjuk.) Vagyis ha ezeket nem nézzük, akkor a lefedésekben nem fordulhat elő olyan, ami az 1. ábra bal oldalán van, azaz a többi esetben miután minden sarkot lefedtünk, a maradék részt felbonthatjuk $2 \times n$-es téglalapokra (*2. ábra*, az ábrán behúzott szakaszokat nem takarhatja dominó).

Így a sakktábla minden oldalához eredetileg egy 2×8-as téglalap tartozik, és a sakktábla mind a négy sarkára lehelyezett 1×2-es dominó ezek közül valamelyiknek az oldalát 1-gyel megnöveli. Így tartozhat 2×8-as, 2×9-es és 2×10-es téglalap egy-egy oldalhoz, de sem két 2×8-as, sem két 2×10-es nem tartozhat szomszédos oldalakhoz. Ezeket a feltételeket figyelembe véve nézzük meg, hogy mekkorák lehetnek az oldalakhoz tartozó téglalapok.

Ha van két 10-es, akkor azok csak egymással szemben lehetnek, a másik kettő pedig 8-as, mert a két 10-es „elhasználta" a sarkok növelését. A 10-es oldalpár kétféleképpen helyezkedhet el.

Ha egy 10-es van, akkor a többi három csak két 9-esből és egy 8-asból állhat (különben nem jönne ki a sarkok által nyújtott 4 növelés). A 10-es oldalt 4-féleképpen, majd a 8-ast 3-féleképpen helyezhetjük le, ez $3 \cdot 4 = 12$ lehetőség.

Ha nincs 10-es, akkor mindegyik 9-es (különben nem lenne meg a sarkok által nyújtott 4 növelés). Ekkor a sarkok 90°-os forgásszimmetriával rendelkeznek, így ha az egyiket megválasztjuk, az meghatározza a többit. Ebből az esetből tehát 2 van.

Minden sávot külön-külön kell lefedni, vagyis össze kell szorozni az egyes lefedhetőségeket. Tehát az eredeti alakzatot összesen

$$2 + 2 \cdot F_{11} \cdot F_{11} \cdot F_9 \cdot F_9 + 12 \cdot F_{11} \cdot F_{10} \cdot F_{10} \cdot F_9 + 2 \cdot F_{10} \cdot F_{10} \cdot F_{10} \cdot F_{10} =$$

$$= 2 + 2 \cdot 89^2 \cdot 34^2 + 12 \cdot 89 \cdot 55^2 \cdot 34 + 2 \cdot 55^4 = 146\,458\,404$$

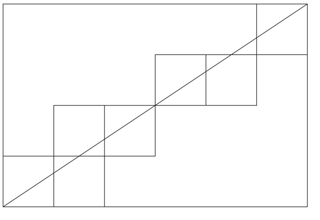
különböző módon fedhetjük le.

Szabó Dávid (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.)
dolgozata alapján

Összesen 85 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott 41, 5 pontos 7 versenyző dolgozata. 4 pontot kapott 18, 3 pontot 8, 2 pontot 7 tanuló. 1 pontos és 0 pontos 2-2 tanuló dolgozata.

B. 4934. *Tetszőleges n és k pozitív egészek esetén jelölje $f(n,k)$ azt, hogy egy $n \times k$-as rácstéglalap egyik átlója hány egységnégyzet belsején halad keresztül. Hány olyan n, k számpár van, amelyre $n \geqslant k$, és $f(n,k) = 2018$?*

(4 pont)



Megoldás. A bal alsó és a jobb felső csúcsot összekötő átló $n-1$ vízszintes és $k-1$ függőleges rácsegyenest metsz a téglalap belsejében. Pontosan akkor halad át egy, a jobb felső sarokban lévőtől különböző (rács) egységnégyzet belsején, ha annak jobb oldali függőleges vagy felső vízszintes oldalát metszi.

E metszéspontok száma összesen $(n-1) + (k-1) = n + k - 2$. Azonban két ilyen metszéspont egybe is eshet; ez éppen akkor következik be, amikor az átló a téglalap belsejében lévő rácsponton halad át. Egy ilyen rácspont a téglalap bal alsó csúcsával egy $n_1 \times k_1$-es rácstéglalapot határoz meg, ahol $\frac{n}{n_1} = \frac{k}{k_1}$, azaz

$$nk_1 = n_1 k, \quad \text{és} \quad 1 \leqslant n_1 < n,\ 1 \leqslant k_1 < k \ \text{ egészek.}$$

Jelölje n és k legnagyobb közös osztóját d, ekkor

$$n = dn^*, \quad k = dk^*, \quad \text{ahol } n^* \text{ és } k^* \text{ relatív prímek.}$$

A korábbi összefüggésbe helyettesítve:

$$dn^*k_1 = n_1dk^*, \quad \text{azaz} \quad n^*k_1 = n_1k^*.$$

Ebből következik, hogy n_1k^* osztható n^*-gal, ami a relatív prímség miatt csak akkor következik be, ha n_1 osztható n^*-gal: $n_1 = xn^*$, ahol x pozitív egész, és $n^*x < n = dn^*$ miatt $1 \leqslant x < d$; emiatt $k_1 = xk^*$.

A téglalap átlójára eső belső rácspontok száma tehát megegyezik x lehetséges értékeinek számával, $d-1$-gyel. Ennyi egységnégyzetet az $n+k-2$ formulában kétszer számoltunk, így – az eddig kihagyott jobb felső sarok egységnégyzetével együtt – az átló $(n+k-2)-(d-1)+1 = n+k-d$ egységnégyzet belsején halad keresztül.

Feladatunk ilymódon $n+k-d = 2018$ pozitív egész megoldásainak számát kérdezi, ahol $(n,k) = d$ és $n \geqslant k$. Mivel d az n-nek és a k-nak is osztója, azért $d \mid 2018 = 2 \cdot 1009$. Az 1009 prím, így d szóbajövő értékei: 1, 2, 1009 és 2018.

1. Ha $d = 1$, akkor az $n+k = 2019 = 3 \cdot 673$ egyenlet $(n,k) = 1$, $n \geqslant k \geqslant 1$ megoldásainak számát keressük. A relatív prímség feltétele nélkül a megoldások száma 1009 lenne. Ezek közül azonban nem megfelelőek azok, amelyeknél n és k is osztható 3-mal, 673-mal vagy 2019-cel. Az ilyen megoldások száma rendre $\left[\frac{1009}{3}\right] = 336$, $\left[\frac{1009}{673}\right] = 1$, illetve $\left[\frac{1009}{2019}\right] = 0$, így a valamennyi feltételnek eleget tevő megoldások száma ebben az esetben $1009 - (336+1) + 0 = 672$.

2. Ha $d = 2$, akkor az $n+k = 2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$ egyenlet $(n,k) = 2$, $n \geqslant k \geqslant 1$ megoldásainak számát keressük. Ez nyilván ugyanannyi, mint az $x+y = 1010 = 2 \cdot 5 \cdot 101$ egyenlet $(x,y) = 1$, $x \geqslant y \geqslant 1$ megoldásainak a száma. Az első esetben alkalmazott számoláshoz hasonlóan ez

$$505 - \left(\left[\frac{505}{2}\right] + \left[\frac{505}{5}\right] + \left[\frac{505}{101}\right]\right) + \left(\left[\frac{505}{10}\right] + \left[\frac{505}{202}\right] + \left[\frac{505}{505}\right]\right) - \left(\left[\frac{505}{1010}\right]\right) =$$

$$= 505 - 358 + 53 - 0 = 200.$$

3. Ha $d = 1009$, akkor az $n+k = 3027 = 3 \cdot 1009$ egyenlet $(n,k) = 1009$, $n \geqslant k \geqslant 1$ megoldásainak számát keressük. Az előző esethez hasonlóan ez ugyanannyi, mint az $x+y = 3$ egyenlet $(x,y) = 1$, $x \geqslant y \geqslant 1$ megoldásainak a száma, ami nyilván 1.

4. Ha $d = 2018$, akkor az $n+k = 4036 = 4 \cdot 1009$ egyenlet $(n,k) = 2018$, $n \geqslant k \geqslant 1$ megoldásainak számát keressük, ami 1, hiszen csak $n = k = 2018$ felel meg.

A négy esetet összegezve, a feladatnak eleget tevő számpárok száma $672 + 200 + 1 + 1 = 874$.

Döbröntei Dávid Bence (Pápa, Türr István Gimn. és Koll., 12. évf.) megoldását felhasználva

Megjegyzés. Ha az $m \geqslant 2$ egész prímtényezős alakja $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k}$, akkor bármely m darab egymást követő egész szám közül az m-hez relatív prímek száma $\varphi(m) = p_1^{a_1-1}(p_1-1) \cdot p_2^{a_2-1}(p_2-1) \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k-1}(p_k-1)$. (Ezt a megoldásban is többször használt szita formula segítségével (is) bizonyíthatjuk.) A fenti megoldásban mind a négy esetben egy $x+y=m$ típusú egyenlet olyan egész megoldásainak számát kerestük, ahol $(x,y)=1$ és $x \geqslant y \geqslant 1$. Itt $1 \leqslant y \leqslant \left[\frac{m}{2}\right]$, és az $(x,y)=1$ feltétel pontosan akkor teljesül, ha $(y,m) = 1$. Ennek figyelembe vételével több megoldó is a $\varphi(m)$ képletének alkalmazásával ért célba.

97 dolgozat érkezett. 4 pontos 49, 3 pontos 21, 2 pontos 20, 1 pontos 7 dolgozat.

B. 4946. *Az $f(x)$ valós együtthatós polinomra igaz, hogy minden, 10-es számrendszerben 5-re vagy 8-ra végződő k pozitív egész esetén $f(k)$ értéke egész szám.*

a) Igazoljuk, hogy $f(0)$ egész szám.

b) Mutassunk példát olyan $f(x)$ polinomra, amire a fenti feltételek teljesülnek, de $f(1)$ nem egész szám.

(6 pont)

Megoldás. *a)* Az $f(x)$ polinom együtthatói racionális számok; ennek okára a megjegyzésben térünk vissza.

Tegyük fel, hogy $f(x)$-nek van nem egész racionális együtthatója. Legyen

$$f(x) = \frac{b_q}{c_q}x^q + \ldots + \frac{b_1}{c_1}x + \frac{b_0}{c_0},$$

ahol $b_0, c_0, b_1, c_1, b_2, c_2, \ldots$ egészek, valamint b_i és $c_i \neq 0$ relatív prímek bármilyen i-re. Legyen n olyan pozitív egész, amelynek 10-es számrendszerbeli alakja 1-re végződik. Ekkor $8n$ biztosan 8-ra, $5n$ pedig 5-re végződik, vagyis $f(8n)$ és $f(5n)$ is egész.

Két 6-ra végződő szám szorzata is 6-ra végződik, egy 6-ra és egy 8-ra végződő szám szorzata pedig 8-ra. Így 16^m minden m pozitív egészre 6-ra végződik. Ezért $16^m \cdot 8$ is 8-ra végződik, tehát $f(16^m \cdot 8n) = f(2^{4m+3} \cdot n)$ egész. Az 5 hatványai mindig 5-re végződnek, ezért $f(5^m \cdot n)$ is egész.

Tekintsük a $c_1 \cdot c_2 \cdot c_3 \cdot \ldots \cdot c_q$ szorzatot, és osszuk el a legnagyobb 2-hatvány osztójával, majd a legnagyobb 5-hatvány osztójával is. Az így kapott páratlan, 5-tel nem osztható egész számot jelölje A, azaz

$$c_1 \cdot c_2 \cdot \ldots \cdot c_q = A \cdot 2^e \cdot 5^f.$$

Az A-t bármelyik együttható nevezőjével (c_i-vel) osztva olyan törtet kapunk, amelynek egyszerűsített nevezője csak 2-vel vagy 5-tel osztható a prímek közül, vagy a kapott hányados egész.

Az A utolsó számjegyétől függően adjuk meg a t egészet a következőképpen: Ha ez a számjegy 1, akkor legyen $t = A$. Ha 3, akkor $7A$ 1-re végződik, így legyen $t = 7A$. Ha 7, akkor legyen $t = 3A$. Ha 9, akkor pedig legyen $t = 9A$. Így t mindenképpen 1-re végződik, és t/c_i vagy egész vagy olyan tört, amelynek a nevezője nem osztható 2-től és 5-től különböző prímmel.

A fentiek alapján $f(2^{4e+3}\cdot t)$ egész. Vizsgáljuk ennek az összegnek egy, $\frac{b_0}{c_0}$-tól különböző

$$\frac{b_i\cdot 2^{i\cdot(4e+3)}\cdot t^i}{c_i}$$

tagját. A tört egyszerűsítése után a nevezőben csak 5-hatvány maradhat, mivel c_i legfeljebb 2^e-nel osztható. Így $f(2^{4e+3}\cdot t)-f(0)$ olyan törtek összege, amelyek nevezőjében 5-hatványok állnak. Mivel $f(2^{4e+3}\cdot t)$ egész, azért $f(0)$ is vagy egész, vagy olyan tört, amelynek nevezője 5-hatvány.

$f(5^f\cdot t)$ is egész a fentiek alapján. Vizsgáljuk ennek az összegnek is egy, $\frac{b_0}{c_0}$-tól különböző

$$\frac{b_i\cdot 5^{if}\cdot t^i}{c_i}$$

tagját. Az egyszerűsítés után a nevezőben itt csak 2-hatvány maradhat, mivel c_i legfeljebb 5^f-nel osztható. Tehát $f(5^f\cdot t)-f(0)$ olyan törtek összege, amelyek nevezőjében 2-hatvány áll. Mivel $f(5^f\cdot t)$ egész, $f(0)$ is egész vagy olyan tört, aminek nevezője 2-hatvány.

A két eredményt összevetve $f(0)$ szükségképpen egész.

b) Az $f(x)=\frac{(x-5)(x-8)}{10}$ polinom teljesíti a feladat feltételeit: ha $a=10k+5$ vagy $b=10k+8$ alakú szám, ahol k (nemnegatív) egész, akkor $f(a)=k(10k-3)$ és $f(b)=(10k+3)k$ egészek, viszont $f(1)=\frac{28}{10}$ nem egész.

Póta Balázs (Győr, Révai Miklós Gimn., 11. évf.) és
Schrettner Jakab (Szeged, Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium, 11. évf.)
megoldását felhasználva

Megjegyzés. Az *interpoláció* tétele szerint, ha $a_1,\ldots,a_{n+1}$ páronként különböző, $b_1,\ldots,b_{n+1}$ pedig tetszőleges valós számok, akkor létezik pontosan egy olyan legfeljebb n-edfokú $f(x)$ polinom, amelyre $f(a_k)=b_k$ minden $k=1,\ldots,n+1$-re. Világos, hogy két különböző $f_1(x)$ és $f_2(x)$ polinom nem létezhet ezekkel a tulajdonságokkal, hiszen akkor a különbségük olyan, legfeljebb n-edfokú, nem azonosan nulla polinom lenne, amelynek az $a_1,\ldots,a_{n+1}$ számok mindegyike gyöke. Ez azonban lehetetlen, mivel egy nemnulla polinomnak legfeljebb annyi gyöke lehet, mint a polinom foka.

Másrészt legyen

$$f(x)=b_1L_1(x)+\ldots+b_{n+1}L_{n+1}(x),$$

ahol mindegyik

$$L_k(x)=\frac{\prod\limits_{j:j\neq k}(x-a_j)}{\prod\limits_{j:j\neq k}(a_k-a_j)}$$

n-edfokú polinom a_k-ban 1-et, az összes többi a_j-ben pedig nullát vesz fel. Az így előállított $f(x)$ polinom tehát megfelelő. Az $f(x)$ eme alakjából látszik, hogy az együtthatói az a_k, b_k számokból véges sok összeadás, kivonás, szorzás és osztás alkalmazásával kaphatók meg; ebből speciálisan következik, hogy ha az a_k, b_k számok valamennyien racionálisak, akkor $f(x)$ együtthatói is azok.

A feladatban szereplő polinom fokát jelölje d. Az interpoláció tételét alkalmazhatjuk $n=d$-re, $a_k=5^k$-ra és $b_k=f(5^k)$-ra, ahol $k=1,\dots,d+1$; ezek a számok egészek lévén racionálisak, ezért az általuk egyértelműen meghatározott $f(x)$ együtthatói is azok.

41 dolgozat érkezett. 6 pontos 10 versenyző: Dobák Dániel, Dömböntei Dávid Bence, Gáspár Attila, Janzer Orsolya Lili, Kerekes Anna, Póta Balázs, Schrettner Jakab, Szabó Dávid, Szabó Kornél, Weisz Máté. 5 pontos 3, 4 pontos 2, 2 pontos 23, 1 pontos 2, 0 pontos 1 dolgozat.

Polygon pályázat matematikából középiskolásoknak

A Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézete pályázatot hirdet középiskolás diákok (9–12. évfolyam) számára.

A pályázat témája:

Középiskolai matematikához kapcsolódó problémák, érdekességek

Ami biztosan ide tartozik: hogyan lehet egy ismert feladatot folytatni, újszerű és érdekes feladatok vagy trükkös megoldások, régi korok matematikája, hétköznapok matematikája, a matematika és a természettudományok kapcsolata, gyakorlati alkalmazások, informatikai alkalmazások és kapcsolatok (például algoritmusok) stb. Pályázni egyénileg lehet, vagy maximum 3 fős csapattal. A pályamunkákat a Bolyai Intézet oktatóiból álló zsűri fogja elbírálni.

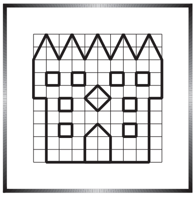
Díjak (csapat esetén a jutalom megoszlik a tagok közt):
I. díj: 25 ezer Ft értékű könyvutalvány és egy Polygon könyv,
II. díj: 20 ezer Ft értékű könyvutalvány és egy Polygon könyv,
III. díj: 15 ezer Ft értékű könyvutalvány és egy Polygon könyv,
Dicséret: Polygon könyv.

A díjazottak és a dicséretben részesültek oklevelet kapnak, amelyen a helyezésüket is feltüntetjük. A pályázó(k) által megnevezett felkészítő tanár(ok) a díjazottakkal és a dicséretben részesültekkel azonos jutalomban és szintén oklevélben részesülnek. Minden pályamunkáról szöveges szakmai értékelést készítünk, amit a díjkiosztó ünnepségen vehetnek át a versenyzők. A legjobb dolgozatokat a Polygon c. folyóirat szerkesztőbizottsága is megvizsgálja közölhetőség szempontjából. A beadott dolgozatok maximális terjedelme 10 oldal lehet (ábrákkal, képekkel, táblázatokkal, grafikonokkal együtt).

Beküldési határidő: **2018. december 15.** A pályamunkákat a következő címre kérjük beküldeni: Katonáné dr. Horváth Eszter egyetemi adjunktus, SZTE Bolyai Intézet, 6720 Szeged, Aradi vértanúk tere 1. A borítékra kérjük ráírni: Polygon pályázat matematikából, középiskolásoknak. A dolgozatokhoz az alábbi adatok mellékelését kérjük:

1. a pályázó(k) neve, lakcíme, telefonszáma, email címe,
2. a pályázó(k) iskolájának neve, címe, telefonszáma, email címe,
3. a felkészítő tanár(ok) neve, email címmel.

`http://www.math.u-szeged.hu/~horvath/palyazat.htm`.

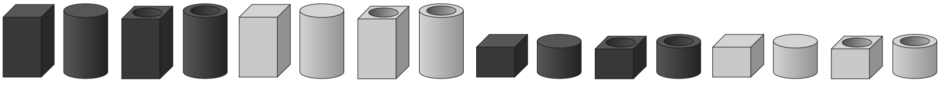


A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (594–598.)

K. 594. A 2, 3, 5, 6, 7 számjegyek valamelyikét kétszer, a többit egyszer felhasználva 3 db kétjegyű prímszámot alkotunk. Mennyi ezek összege?

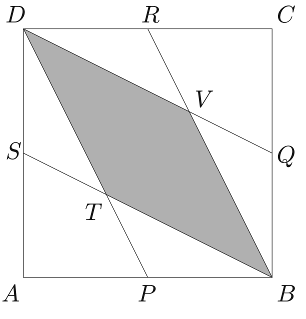
K. 595. A QUARTO egy táblás stratégiai játék (1991), két személy játssza. Blaise Müller svájci matematikus találta ki. A játékban szereplő 16 figura mindegyike különbözik valamiben a többitől. A figurák négy szempont alapján is két egyforma csoportra oszthatók:

– magas vagy alacsony;
– sötét vagy világos;
– kerek vagy szögletes;
– a teteje lyukas vagy sima.



Hányféleképpen választhatunk ki a készletből két olyan figurát, amelyek pontosan kettő vagy három tulajdonságban egyeznek meg?

K. 596. Az ABC háromszög AB, BC és CA oldalain rendre vegyük fel a P, Q és R pontokat úgy, hogy az $AP=AR$, $BP=BQ$ és $CQ=CR$ feltételek teljesüljenek. Egy adott ABC háromszög esetén hány ilyen P, Q, R ponthármas létezhet?



K. 597. Az $ABCD$ négyzet P, Q, R és S oldalfelező pontját az *ábrán* látható módon összekötöttük a négyzet csúcsaival. Határozzuk meg a $BVDT$ négyszög és az $ABCD$ négyzet területének arányát.

K. 598. A digitális órákon a számjegyek rövid pálcika-lámpákból állnak, ahogy az *ábrán* látható:

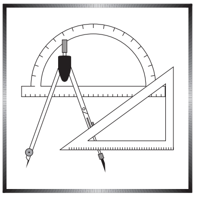
Az órák fogyasztását az határozza meg, hogy mennyi kis pálcika-lámpát kell ki-be kapcsolni, ahogy változik az idő. Például 3-ról 4-re váltásnál két pálcika-lámpát kell ki- és egyet bekapcsolni, ami három kapcsolást jelent. Egy teljes $0, 1, 2, \ldots, 9, 0$ ciklus alatt ez összesen harminc kapcsolás. Ha ugyanezeket a digitális jeleket más sorrendben használnánk a 0-tól 9-ig terjedő számok megjelenítésére, akkor kevesebb kapcsolás is elég lenne. Keressük meg a kapcsolások egy teljes ciklusra vonatkozó számának minimumát, és adjunk meg hozzá egy megfelelő számjegy-sorrendet.

Javasolta: *Ruttkai Zsófia* (Hollandia)

Beküldési határidő: 2018. november 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (1497–1503.)



Feladatok 10. évfolyamig

C. 1497. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$xy = z,$$
$$xz = y,$$
$$yz = x.$$

C. 1498. Milyen hosszú lehet legfeljebb egy 2 méter magas ember árnyéka a Földön? A Földet tekintsük egy 6370 km sugarú gömbnek, melyre a fénysugarak a Napból párhuzamosan érkeznek.

Feladatok mindenkinek

C. 1499. Határozzuk meg azt a legnagyobb pozitív egész n számot, melyre az $1, 2, \ldots, n$ számoknak van olyan sorrendje, amelyben az egymás mellé írt számok összeolvasásaként kapott egyetlen számra teljesül a következő: bármely két szomszédos a, b számjegyére az $\overline{ab}$, $\overline{ba}$ kétjegyű számok közül legalább az egyik prím.

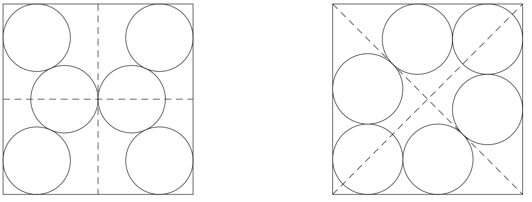
C. 1500. Az AB szakaszon kijelöljük az X és Y pontokat, majd megrajzoljuk a pozitív körüljárású $AXPQ$, $XBRS$, $BYWV$ és $YAUT$ négyzeteket, melyek középpontjait jelölje rendre K, L, M és N. Bizonyítsuk be, hogy a KM és LN szakaszok merőlegesek egymásra és egyenlő hosszúak.

(*Német versenyfeladat*)

C. 1501. Melyik az a leghosszabb számtani sorozat, amelynek tagjai 200-nál kisebb, különböző prímszámok?

Feladatok 11. évfolyamtól

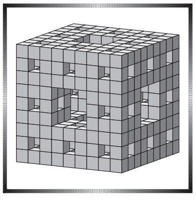
C. 1502. Hat-hat egyforma sugarú kört rajzoltunk két különböző módon egy-egy egységnégyzetbe az *ábrán* látható módon. Melyik elrendezésben nagyobb a körök sugara?



(*Német versenyfeladat*)

C. 1503. Egy adott háromszögben az a, b, c oldalak hosszának négyzetei ebben a sorrendben számtani sorozatot alkotnak. Mutassuk meg, hogy a b oldallal szemközti szög nagysága legfeljebb 60° lehet.

Beküldési határidő: 2018. november 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518



A B pontversenyben kitűzött feladatok (4974–4981.)

B. 4974. Legalább hány számot kell kiválasztani az $1, 2, \ldots, 10$ számok közül, hogy biztosan legyen közöttük néhány szám, melyek összege osztható 11-gyel, bárhogyan is történik a számok kiválasztása?

(*3 pont*) Javasolta: *Róka Sándor* (Nyíregyháza)

B. 4975. Adott négy, páronként különböző egyenes: $e \parallel f$ és $g \parallel h$, valamint egy P pont. Szerkesszünk olyan P-re illeszkedő egyenest, amely az e, f, g és h egyeneseket rendre olyan E, F, G és H pontokban metszi, amelyekre $EF = GH$.

(*3 pont*)

B. 4976. Legyen $A=\{-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4\}$. Kezdő és Második felváltva választanak ki egy-egy, még nem választott számot az A halmaz elemei közül. Az a játékos nyer, akinek előbb lesz három olyan, általa választott száma, melyek összege 0. Van-e valamelyik játékosnak nyerő stratégiája?

(*4 pont*) Javasolta: *Bán-Szabó Áron* (Budapest)

B. 4977. Bizonyítsuk be, hogy egy derékszögű háromszög beírt körének érintési pontjai által meghatározott háromszög magasságpontja a derékszögű háromszög átfogójához tartozó magasságvonalára illeszkedik.

(*4 pont*) (*Kvant*)

B. 4978. Legyen $n \geqslant 3$ egész szám és α tetszőleges valós szám. Bizonyítsuk be, hogy

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos^2\left(\alpha+\frac{2k\pi}{n}\right)=\frac{n}{2}.$$

(*5 pont*)

B. 4979. Az ABC hegyesszögű háromszögben D és E rendre az AB, illetve az AC oldalnak belső pontja. A BE és CD szakaszok metszéspontja F. Bizonyítsuk be, hogy ha $BC^2=BD\cdot BA+CE\cdot CA$, akkor $ADFE$ húrnégyszög.

(*5 pont*) Javasolta: *Róka Sándor* (Nyíregyháza)

B. 4980. Legyen $n>3$ pozitív egész, $a_1,a_2,\ldots,a_n$ pedig pozitív valós számok. Igazoljuk, hogy

$$1<\frac{a_1}{a_n+a_1+a_2}+\frac{a_2}{a_1+a_2+a_3}+\ldots+\frac{a_n}{a_{n-1}+a_n+a_1}<\left[\frac{n}{2}\right]$$

és az egyenlőtlenség bal oldala nem cserélhető nagyobb, a jobb oldala pedig kisebb számra (ahol $[x]$ az x szám egész részét jelenti).

(*6 pont*)

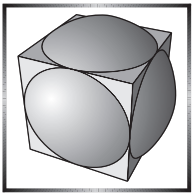
B. 4981. Egy egységkocka xy síkra vonatkozó merőleges vetületének területe A, a z tengelyre vonatkozó merőleges vetületének hossza pedig a. Bizonyítsuk be, hogy $A=a$.

(*6 pont*) Javasolta: *Erben Péter* (Budapest)

❄

Beküldési határidő: 2018. november 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄



Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (734–736.)

A. 734. Adott az n csúcsú G fagráf, a csúcsainak halmaza V, és adott a síkon egy n-elemű P ponthalmaz, melynek elemei között nincs három egy egyenesen. Igaz-e a G gráf és a P halmaz tetszőleges kiválasztása esetén, hogy G belerajzolható a P halmazba, vagyis létezik olyan $f: V \to P$ kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés, hogy ha G minden (x, y) éléhez megrajzoljuk az $\big[f(x), f(y)\big]$ szakaszt, akkor semelyik két ilyen szakasz nem metszi egymást?

Javasolta: *Váli Benedek* (Szeged)

A. 735. Van-e olyan $a_1, a_2, \ldots$ végtelen valós számsorozat, amely korlátos, nem periodikus, és teljesíti az $a_{n+1} = a_{n-1}a_n + 1$ rekurziót?

A. 736. Az Ω kör belsejében fekszik az ω kör. Az Ω körön mozog az X pont. Az X-ből ω-hoz húzott érintők az Ω kört másodszor az $A \neq X$ és $B \neq X$ pontokban metszik. Mutassuk meg, hogy az AB egyenesek vagy egy rögzített kör érintői, vagy pedig egy ponton mennek át.

❄

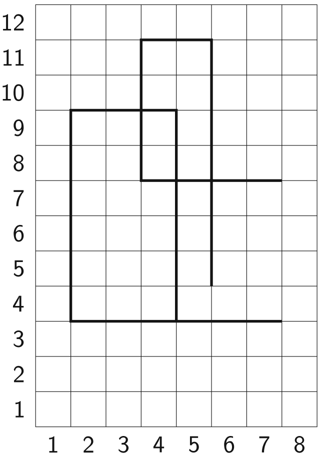
Beküldési határidő: 2018. november 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

Informatikából kitűzött feladatok

I. 463 (É). Adott egy nagyméretű négyzethálós lap, amelynek O oszlopa és S sora van. A négyzetek csúcspontjainak koordinátái egész számok, a bal alsó sarok az origó, azaz a $(0; 0)$ koordinátájú pont. A lapon egy szikével bemetszéseket készítünk, amelyek párhuzamosak a lap valamelyik oldalával. A bemetszések végpontjai egész koordinátájú pontok. Tudjuk, hogy bemetszés nem indul és nem végződik a lap szélén.

A honlapunkról letölthető `nhalo.txt` szöveges állomány első sorában a négyzetháló méretét megadó O és S értékek találhatók. A következő sorban a bemetszések B száma szerepel. Az ezt követő B sor mindegyikében egy számnégyes található, amelyből az első számpár a bevágás egyik végpontja, a második pedig a bevágás másik végpontja. A számpárok első tagja az oszlop, a második a sor koordinátája. A számokat pontosan egy szóköz választja el egymástól, a számok egyike sem nagyobb, mint 1000.



Készítsünk programot, amely a lap méretének és a bemetszések adatainak ismeretében megoldja a következő feladatokat. Minden feladat megoldása előtt írjuk ki a feladat sorszámát, pl. „`1. feladat:`", illetve a beolvasás és kiírás esetén röviden írjunk magyarázó szöveget. Az ékezetmentes kiírás is elfogadott.

1. feladat: Olvassuk be a szöveges állományból az adatokat, és tároljuk el későbbi feldolgozás céljából.

2. feladat: Írjuk ki a legkisebb sorszámú sort, amelyben nincs bemetszés, például a következő formában: „A legkisebb sorszámú bemetszés nélküli sor: 2".

3. feladat: Adjuk meg annak a legkisebb téglalapnak a területét, amely az összes bemetszést tartalmazza. A kimenet például „A legkisebb, minden bemetszést tartalmazó téglalap területe: 48".

4. feladat: Adjuk meg, hogy összesen hány pontban találkoznak merőlegesen bemetszések. A kimenet például „A metszések 10 helyen találkoznak merőlegesen".

5. feladat: Kérjünk be a felhasználótól egy oszlopszámot, és adjuk meg, hogy az adott oszlop milyen hosszúságú része nem tartalmaz bemetszést.

6. feladat: Adjuk meg a bemetszések hosszának átlagát két tizedesjegy pontossággal megjelenítve, például „A metszések átlagos hossza 4,75".

7. feladat*: Hozzuk létre a `sorok.txt` szöveges állományt, amely a négyzetháló bemetszések utáni helyzetét mutatja a sorok szerint. A szöveges állomány S sort tartalmaz, elsőként a négyzetháló legfelső egységnégyzeteit, majd sorban az utána következő négyzeteket, végül a négyzetháló legalsó sorának négyzeteit írja le. Ha egy sorban nincs függőleges bemetszés, akkor abban csak a 0 szám szerepel. Egyébként

Példa az `nhalo.txt` állományra (a / jel sortörést helyettesít)	**Példa a `sorok.txt` állományra** (a / jel sortörést helyettesít)

`8 12 / 8`
`1 3 7 3 / 1 3 1 9 / 4 3 4 9`
`1 9 4 9 / 3 7 3 11 / 3 7 7 7`
`3 11 5 11 / 5 11 5 4`
	`0 / 3 2 3 / 3 2 3 / 1 2 1 1 3`
	`1 2 1 1 3 / 1 3 1 3 / 1 3 1 3`
	`1 3 1 3 / 1 3 4 / 0 / 0 / 0`

*Ez a részfeladat az emelt szintű érettségi programozási feladatoknál összetettebb, nehezebb.

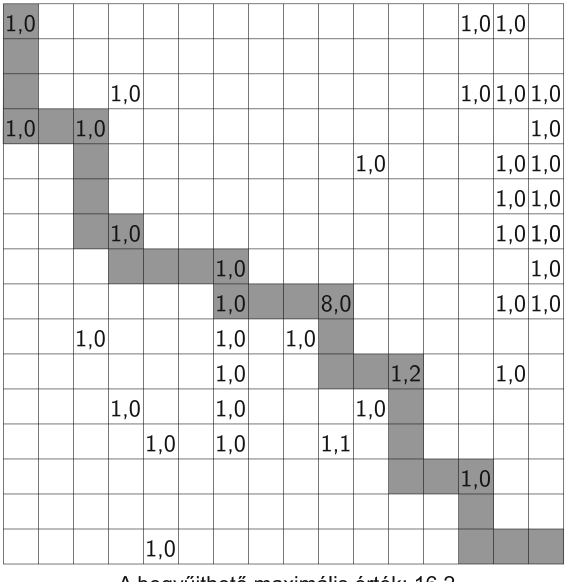
annyi egész van benne, ahány függőleges bemetszést ejtettek a sorban. Ilyenkor az egészek oszlopok szerint növekvő sorrendben mutatják a sor összefüggő, nem szétvágott négyzeteinek számát.

Beküldendő egy `i463.zip` állományban a program forráskódja és rövid dokumentációja, amely megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

I. 464. Közismert a kincsgyűjtögető játék, amelyben egy téglalap alakú tábla egyes mezőin haladva az érintett mezőkön elhelyezett kincseket megszerezhetjük. Továbblépni csak jobbra vagy lefele lehet. A cél az összességében a lehető legnagyobb értéket adó kincs begyűjtése.

A feladatot most táblázatkezelő program segítségével kell megoldanunk. A munkafüzet `térkép` munkalapján 16 sorban és 16 oszlopban helyeztünk el „kincseket”, pontosabban az azokat jelképező pozitív számokat.

Feladatunk, hogy feltételes formázás segítségével a térképre „rajzoljuk” – az alábbi mintához hasonlóan – a legnagyobb összértékű kincs begyűjtését eredményező útvonalat. A térkép alatt jelenítsük meg az elérhető legmagasabb összértéket is.



A begyűjthető maximális érték: 16,2

A segédszámításokhoz tetszőleges számú munkalapot és cellát használhatunk. A megoldáshoz csak beépített függvények használhatók. A megoldás során törekedjünk másolható képletek használatára. (A felhasznált cellák és képletek száma a megoldás értékelését nem befolyásolja.)

Értékelés: a feladat hibamentes megoldásáért 7 pont kapható. A körültekintően elkészített, minden képlet szerepét megvilágító dokumentáció 3 pontot ér.

Beküldendő egy `i464.zip` tömörített állományban a megoldást tartalmazó `i464` munkafüzet és a dokumentációt magában foglaló `i464.pdf` fájl. A dokumentáció tartalmazza a használt táblázatkezelő nevét, verziószámát és a megoldás során használt képleteket és azok szerepének leírását (a másolhatókat természetesen egyszer).

I. 465. Adott egy R sugarú kör alakú lap ($10\text{ mm} \leqslant R \leqslant 100\text{ mm}$), amelyet leteszünk a földre. A lapra N darab ($1 \leqslant N \leqslant 100$) kisebb körlapot ejtünk véletlenszerűen úgy, hogy csak azokat az ejtéseket fogadjuk el, amelyeknél az ejtett lap nem lóg ki a földön lévő lapról. Az ejtett lapok átfedhetik egymást, de teljes egészében a lefektetett nagyobb lapon vannak. Kérdés, hogy a nagy lap területének hány százaléka nincs az N darab kisebb körlappal lefedve. Készítsünk szimulációs programot, amely modellezi a jelenséget, és minél pontosabban válaszol a kérdésre.

A program a standard bemenet első sorából olvassa be R és N értékét (egészek), valamint a következő sorból a leejtett körlapok sugarát (mindegyik sugár 1 mm-nél nagyobb, de R-nél kisebb egész érték). A standard kimenetre írjuk ki a lefektetett körlap nem lefedett részének területét négyzetmilliméter pontossággal.

Bemenet	**Kimenet**
`50 8` `12 15 10 22 18 16 24 23`	`3535`

Beküldendő egy `i465.zip` állományban a program forráskódja és rövid dokumentációja, amely megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

I/S. 29. Egy ország városait kétirányú utak kötik össze, melyek használatáért díjat kell fizetni. Bármelyik városból bármelyik városba el lehet jutni az utakon. Két város között legfeljebb egy közvetlen út van. Néhány városban szupermarket is található. Az országba Q család érkezik, akik különböző vagyoni helyzetűek. Minden család szeretne olyan városba költözni, ahol nincs szupermarket. Ha egy család vagyoni helyzete K, akkor csak olyan városban lakhat, ahonnan el tud menni bevásárolni egy szupermarketbe összesen legfeljebb K útdíjat fizetve (az oda- és visszautat számolva). Adjuk meg minden családra, hogy hány olyan város van az országban, ahol nincs szupermarket, mégsem tud odaköltözni a család, mert túl költséges lenne egy szupermarketbe való eljutás a vagyoni helyzetükhöz képest.

Bemenet: Az első sor tartalmazza a városok N számát, az utak M számát, a szupermarketet tartalmazó városok D számát és a családok Q számát. A következő M sor mindegyike három számot tartalmaz: az első kettő azon városok indexe, amik között az adott út van, a harmadik szám pedig az út használatának díja. A következő sorban D szám van: azon városok indexei, amikben van szupermarket. A következő sorban Q szám van: az i-edik szám az i-edik család vagyoni helyzetét leíró K érték. A városokat 0-tól $N-1$-ig indexeljük.

Kimenet: Egy sorba írjunk ki Q darab számot: a sor i-edik száma adja meg, hogy az i-edik család hány olyan városba nem tud költözni a vagyoni helyzete miatt, ahol nincs szupermarket.

Bemenet (a / jel sortörést helyettesít)	**Kimenet**

`6 7 2 5`
`0 1 4 / 3 0 2 / 0 5 2 / 2 0 5 / 2 3 2 / 3 4 1 / 4 5 2`
`0 4`
`0 7 4 2 9`
	`4 1 2 4 0`

Korlátok: $1 \leqslant D < N \leqslant 10^5$, $1 \leqslant M \leqslant 5 \cdot 10^5$, $1 \leqslant Q \leqslant 10^5$, $0 \leqslant$ egy út díja, $K \leqslant 2 \cdot 10^9$, egészek. Időkorlát: 0,1 s, memórialimit 100 MiB.

Értékelés: a pontok 20%-a kapható, ha minden út díja 1; további 20% kapható, ha $D = 1$; további 20% kapható, ha $Q = 1$; további 40% kapható az eredeti korlátokra.

S. 128. A fáraó elrendelte egy piramis építését, ehhez kőtömböket kell szállítani a bányától Q kilométerre levő építési területig. N kereskedő megadta, hogy mettől-meddig tud tömböt szállítani. Minden kereskedő legfeljebb egyszer szállít legfeljebb egy kőtömböt. A fáraó legfeljebb M kereskedőt kérhet meg a szállításra a költségek csökkentése érdekében. Segítsünk a fáraónak kiszámolni, hogy legfeljebb hány kőtömböt tud elszállíttatni az építési területre, és ehhez minimum hány embert kell megfizetnie. Egy kereskedő akkor tudja átadni a kőtömbjét egy másiknak szállításra, ha legalább addig el tudja vinni a tömböt, ahonnan a másik indulhat.

Bemenet: Az első sor tartalmazza a kereskedők N számát, a maximálisan megkérhető kereskedők M számát, valamint a bánya és az építési terület Q távolságát. A kereskedőket 0-tól $N-1$-ig sorszámozzuk. A következő N sor mindegyike két számot tartalmaz: az adott kereskedő hányadik kilométertől hányadik kilométerig tud szállítani.

Kimenet: Az első sorba írjuk ki, hogy maximum hány kőtömböt lehet elszállítani; a következő sorba, hogy ehhez minimálisan hány kereskedőnek kell fizetni.

Bemenet (a / jel sortörést helyettesít)	**Kimenet**

`13 9 20`
`4 9 / 0 3 / 7 16 / 0 6 / 5 9 /0 4 / 4 12`
`11 20 / 9 10 / 10 14 / 14 20 / 15 20 / 17 18`
	`2`
	`7`

Korlátok: $1 \leqslant M \leqslant N \leqslant 10^5$, $0 \leqslant Q \leqslant 2 \cdot 10^9$, egészek. Időlimit: 1 s, memórialimit 100 MiB.

Értékelés: A pontok 20%-a kapható, ha maximum egy tömböt tud a fáraó elszállíttatni; további 20% kapható, ha $M = N$; további 20% kapható, ha $N \leqslant 1000$; további 10% kapható, ha $Q \leqslant 10^5$; további 30% kapható az eredeti korlátokra.

❄

A feladatok megoldásai regisztráció után a következő címen tölthetők fel:
`https://www.komal.hu/munkafuzet`
Beküldési határidő: 2018. november 10.

❄

Nyári matematika- és fizikatábor 2018. Dombóvár

2018. június utolsó hetében összesen 45 középiskolás diák gyűlt össze a Dombóvár-Gunaras Hotel Európában és Apartmanparkban. A társaság egyik fele matematikával, a másik fizikával foglalkozott, a szabadidőt pedig közösen töltötték. A tábort a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapokat kiadó MATFUND Alapítvány szervezte, a tábor vezetője *Nagyné Szokol Ágnes* volt.

A fizika szekcióba 25 középiskolás érkezett, közöttük heten határon túlról. Vladár Károly (a KöMaL fizika szerkesztőbizottságának tagja), *Asbóth János* (MTA Wigner FK, IYPT felkészítő tanár) és *Szász Krisztián* (KöMaL szerkesztőbizottság, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, IPhO felkészítő tanár) vezetése, valamint *Asztalos Bogdán* és *Olosz Balázs* (korábbi kömalozók, táborozók és egyetemisták) támogatásával a fizika iránt érdeklődők csapatokba rendeződve végeztek méréseket, vitatkoztak elméleti feladatokon.

A matematika szekcióba érkezett 20 diák számára ez a hét jelentette az utolsó edzés lehetőségét a nyár során megrendezésre került több nagy nemzetközi matematikai diákolimpiára. Felkészítőik *Dobos Sándor* (Budapesti Fazekas Mihály Gimnázium tanára, a Nemzetközi Matematikai Diákolimpiai csapat helyettes vezetője) és *Williams Kada* (KöMaL szerkesztőbizottság, egyetemi hallgató, háromszoros olimpikon) voltak.

A tábor a Nemzeti Tehetség Program keretében az Emberi Erőforrások Minisztériuma támogatásával valósult meg (NTP-TÁB-18-0047 **„KöMaL nyári matematika és fizika tehetséggondozó tábora"**).

A rendezvényt támogatta még az MTA Wigner Fizikai Kutatóközpont és az MTA Energiakutató Központ, valamint Krausz Ferenc fizikus (Max Planck Institute für Quantenoptik, Garching, Németország).

A szervezők

Matek olimpiai edzőtábor Dombóváron

A matek diákolimpiára komolyabban készülő diákok már ismerik egymást. Látják egymás nevét a KöMaL-ban, találkoznak olimpiai szakkörön, versenyeken. A 2017/18-as tanévben az utolsó olimpiai válogatót Kecskeméten szervezte a Mategye Alapítvány. Ott az IMO, MEMO csapatok kialakultak, emellett körvonalazódott az utánpótlás gerincét adó társaság is. Ez a 20 diák kapott meghívást a június végén Dombóváron rendezett olimpiai edzőtáborba.

A matematika szakmai program reggelente egyéni feladatmegoldással indult. Ezt követően csapatban lehetett dolgozni, majd közös megbeszélésen néztük át a megoldásokat. Ezeket az alkalmakat Dobos Sándor vagy Williams Kada irányította. A napi feladatsorokon szerepeltek a tavalyi olimpiára javasolt feladatok (shortlist példák), a táborvezetők és a résztvevők által választott feladatok. A tábor előtt minden diák kapott két kis füzetecskét, amelyben valamely ország versenyfeladatait találta. Ezekből kellett hármat kiválasztani „az én olimpiám” mottóra, azaz három különböző témakörből egy könnyebbet, egy közepes nehézségűt és egy nehezebbet. A táborban ezeket a feladatokat is igyekeztünk feldolgozni. A kiadott feladatok megbeszélésére még délután is volt egy hosszabb, közös alkalom.

A matekosok a KöMaL fizikatáborában jelen lévő diákokkal együtt részt vehettek esti előadásokon, szabadidős programokon, beszélgethettek, barátkozhattak és játszhattak egymással. A vb kínált közös szurkolási lehetőséget, a tábor pályáján is komoly focicsaták zajlottak.

Reméljük, jövőre is lesz hasonló tábor, ahol lehetőség van a komoly munkára és a vidám kikapcsolódásra egyaránt. Nagy ajándék, hogy a táborban az ország különböző helyeiről érkezett, közös érdeklődésű társaság jobban összekovácsolódhat.

Dobos Sándor

Nyári fizikatábor 2018.

Idén huszonöt 9–11. évfolyamos diák kapott lehetőséget az ország különböző részeiről, sőt a határon túlról is arra, hogy részt vegyen a táborban. Az érkezés napján már a vacsora után megalakultak a csapatok azzal a feltétellel, hogy mindenképpen legyen a csapat tagja egy határon túli és egy tizedikes diák. A következő egy hétben elméleti és számolós (gyakorlati) fizikaproblémákkal, illetve naponta egy-egy mérési és becslési feladattal kellett megküzdenie a csapatoknak. Minden egyes nap már reggeli után elkezdődött és egészen a vacsoráig tartott a feladatok megoldása. Ennek ellenére nem állíthatjuk, hogy elegendő lett volna rá az idő. Ezen kívül volt lehetőségünk sportra, közös társasjátékozásra, ismerkedésre, és a sok munka mellett még pihenésre is. A változékony időjárás miatt az egyik nap – a tavalyi tábori programmal ellentétben – nem a strandra mentünk, hanem túrázni, és eközben végeztük el az aznapi mérési feladatunkat. Kiemelnénk egy másik mérési feladatot, miszerint titkos ügynöki bőrbe bújva kellett kiderítenünk, mivel hallgatnak le minket. Ehhez oszcilloszkópot és jelgenerátort használhattunk.

Minden este a vacsora után előadásokat hallgattunk meg nemzetközileg elismert kutatóktól. Nekünk személy szerint *Csonka Szabolcs* „Mobiltelefonok fizikájától a kvantumszámítógépekig” és *Csanád Máté* „Részecskegyorsítókkal az ősrobbanás nyomában” című előadása tetszett a legjobban.

A tábor utolsó napján a szokásos feladatokon kívül egy „konstrukciós feladatot” is kaptunk: a piszkozatpapírjainkból kellett minél magasabb tornyot építenünk, minden más eszköz (kötél, ragasztó stb.) felhasználása nélkül, és egy egyéni totót is kitölthettünk.

Végül a tábor eredményhirdetéssel zárult, amin mindenki kapott egy könyvet – amit társainkkal és a szervezőkkel aláírattunk –, valamint frizbit és csokit.

Köszönjük a szervezőknek és a támogatóknak, hogy lehetőségünk volt részt venni az idei táborban.

Kovács Bence
ELTE Apáczai Csere János
Gyak. Gimn. és Koll., Budapest

Osvárt Bence
Szombathelyi Kanizsai
Dorottya Gimn.

A KöMaL Erdélyben is igencsak nagy hírnek örvend, ezért nagy örömmel vettük, hogy idén is részt vehettünk a nyári fizikatáborban.

A tábor ebben az évben sem okozott csalódást. Hogy is nézett ki ennek az eseménynek a menetrendje? A tábor 5 napon keresztül tartott, ahol a fő cél az volt, hogy olyan feladatokkal találkozzunk, amelyek eltérnek a hétköznapi, megszokott iskolai példáktól, és ezáltal valami újat mutassanak. A feladatokat 4 fős csapatban oldottuk meg, és a nap végére csapatonként egy mérési, egy becslési és négy számítási feladatot adtunk be. A napi időbeosztásában teljesen szabad kezet kaptunk, így a fokozott agytevékenység mellett jutott időnk sportra, hosszú beszélgetésekre, vagy akár egy közös filmnézésre, túrára is.

A feladatmegoldások is különleges módon zajlottak. Meg kellett tanulnunk csapatban dolgozni. A szervezők gondoskodtak arról, hogy jól „elkeveredjünk” az ismerkedés érdekében, és így minden csapatnak más és más szisztémája alakult ki az „együttélésre”. A feladatok megoldásához nemcsak a szervező tanároktól, hanem a jelenlévő egyetemistáktól is kérhettünk segítséget. A becslési és a mérési feladatok megoldása a saját fantáziánkra volt bízva, és némely esetben nem kevés kreativitást igényelt.

A tábor szerves részét alkotta a minden este megtartott előadások sorozata is, amelyek jelen pillanatban is zajló kutatásokról szóltak, mint például a magyar fejlesztésű RADCUBE műhold, az űridőjárás, továbbá a CERN Nagy Hadronütköztetőjében folyó nehézion-fizikai kísérletek. Bemutatták a nanotechnológia új kihívásait és a számítógépek bizonyos problémáit (pl. hogy meddig csökkenthető a chip-ek mérete), illetve új, innovatív számítógép-hűtési rendszerek problémaköreit vitattuk meg és jártuk körbe tekintélyes előadók segítségével.

Összegzésképpen, ez egy olyan tábor volt, ahol a hasznosan eltöltött idő során számtalan új módszerrel ismerkedhettünk meg, új barátságokat és ismeretségeket kötöttünk, és nem utolsósorban olyan rendhagyó előadások fül- és szemtanúi lehettünk, amelyeket máshol talán nem láthattunk-hallhattunk volna. Köszönet ezért a Szervezőknek!

Benedek Kristóf
Marosvásárhelyi Római Katolikus Teológiai Líceum

Támogatók:

Emberi Erőforrások Minisztériuma
Nemzeti Tehetség Program
mta EK
Wigner
Ri

Versenyfelhívás

Ha szereted a fizikát, a kísérletezést, jól beszélsz angolul, és egy életre szóló élményre vágysz, akkor itt a helyed!

A Fizika Világbajnokságnak is nevezett IYPT (Ifjú Fizikusok Nemzetközi Versenye, angolul International Young Physicists' Tournament) közel 35 ország csapatának nyújt lehetőséget, hogy összemérjék tudásukat, rátermettségüket és kommunikációs készségüket 17 előre megadott, ún. nyílt végű fizikai problémán keresztül.

Az IYPT a XXI. század kihívásainak megfelelő készségeket vár el az indulóktól: nemcsak a fizikában kell jártasnak lenni, hanem az eredményeket prezentálni és megvédeni is tudni kell! A résztvevő diákok a versenyt megelőzően elvégzett fizikai méréseiket és kutatásaikat egy – angol nyelven előadott – tudományos prezentáció formájában mutatják be két riválís csapatnak. A másik két csapat közül az egyik megvizsgálja az előadás fizikai tartalmát egy kulturált vita formájában, a másik pedig komplex értékelést ad az elhangzottakról. A három csapat teljesítményét fizikusokból és fizikatanárokból álló nemzetközi zsűri bírálja el.

Az IYPT verseny magyarországi első fordulójára (HYPT) az `hypt.elte.hu` oldalon való regisztráció határideje: **2018. október 22. éjfél.**

A jelentkező diákoknak egy kiválasztott problémáról 2018. november 21-ig kell elküldeni egy magyar nyelvű dolgozatot. Ezen dolgozatok alapján a legjobb beküldők az ELTE TTK-n december közepén megrendezésre kerülő szóbeli fordulón vehetnek részt. Az induló diákoknak az általuk kidolgozott feladat angol nyelvű bemutatásában kell összemérniük tudásukat.

A decemberi fordulót idén 100 000 forint összdíjazással hirdetjük meg, amiben az évfolyamonkénti első helyezett versenyzők részesülnek.

A decemberi szóbeli fordulót követően a 8 legmagasabb pontszámot elérő diák az ELTE TTK Anyagfizikai Tanszékén végezheti a további felkészüléshez szükséges kutatásait. A felkészülés során nyújtott teljesítmény alapján 3 diák indulhat az osztrák AYPT versenyen, az 5 legjobb diák pedig bekerül a Varsóban megrendezésre kerülő 32. IYPT magyar csapatába.

Jelentkezés, a feladatok szövege és további információk az `hypt.elte.hu` weboldalon, illetve az `email@hypt.elte.hu` email címen.

Néhány példa a 2019-re kitűzött IYPT feladatok közül

1. Találd fel magad! Készíts egy, a koronakisülés elvén működő egyszerű motort! Vizsgáld meg a rotor forgását meghatározó paraméterek hatását, és optimalizáld a rendszert a legnagyobb fordulatszámra adott feszültség esetén!

5. Palacktöltés. Ha egy palackba függőleges vízsugarat engedünk, hang keletkezhet, melynek tulajdonságai a feltöltés közben változhatnak. Vizsgáld meg, hogy a releváns paraméterek (pl. a vízsugár hőmérséklete, sebessége és méretei, a palack alakja és méretei) hogyan befolyásolják a létrejött hangot!

14. Hurkoló inga. Köss össze zsinórral egy nagyobb és egy kisebb tömegű testet, majd helyezd a zsinórt egy vízszintes rúdra úgy, hogy a nehezebb test a rúd közelében lógjon, míg a könnyebb testet kézzel tartsd meg. Elengedve a könnyebb testet az felcsavarodhat a rúdra, megakadályozva ezzel a nehezebb test földet érését. Vizsgáld meg a jelenséget!

A további feladatok megtalálhatók az `iypt.org` vagy a `hypt.elte.hu` oldalon.

Magyar bronzérem Pekingben

Az idén 31. alkalommal megrendezett IYPT versenyen a *magyar csapat a bronzérmet* jelentő 15. helyezést *érte el Pekingben.* Az egész éves felkészülés sikeres lezárása mellett, sikerült érdekes élményekkel gazdagodni az ázsiai gigapoliszban.

Idén is nagyon sok munka és tanulás előzte meg a nemzetközi versenyt. Az ELTE TTK épületében található diáklaborunk mellett a felkészülés során egy edzőtáboron és egy felkészülési versenyen is részt tudtunk venni. Már a felkészülési verseny is jól sikerült, hiszen a *Kovács Levente, Kadlecsik Ádám* és *Szakály Marcell* alkotta csapat második helyezést ért el a leobeni Austrian Young Physicists' Tournament versenyen, 8 ország 15 csapatát utasítva maga mögé.

A magyar csapat felkészülését idén is az ELTE TTK Anyagfizikai Tanszék és a Wigner Fizikai Kutatóközpont munkatársai (*Hömöstrei Mihály, Ispánovity Péter Dusán, Jenei Péter, Vincze Miklós, Széchenyi Gábor, Tüzes Dániel, Boross Péter,* valamint *Asbóth János*), illetve az ELTE TTK fizikatanár szakos hallgatói segítették. A magyar résztvevők a „Héron szökőkútja", a „Palack pörgetés", „Az idő súlya", a „Mozgó gyűrűk", és a „Csúcsok a hengerben" című problémákat mutatták be a zsűrinek és az ellenfél csapatoknak. A feladatokról és a megoldásokról, valamint a versenyről és a felkészülésről röviden a `hypt.elte.hu` oldalon, valamint a `facebook.com/hypt.elte.hu` csoportban kapható információ.

A verseny melletti programok idén sem maradhattak el, sőt a csapat még maradt is pár napot Pekingben, hogy jobban megismerhesse a várost és környékét. Természetesen megnéztük Peking nevezetességeit, mint pl. a Mennyei béke templomát, a Tienanmen teret vagy Peking legmagasabb felhőkarcolóját. Egész napos szórakozást jelentett még a kínai nagy fal meglátogatása is.

A 2018-as bronzérmes magyar IYPT csapat tagjai:

Földes András (Budapest, ELTE Radnóti Miklós Gyak. Gimn, 11. évf.);

Gyulai Marcell (Miskolc, Földes Ferenc Gimn., 11. évf.);

Nagy Dániel (Budapest, Balassi Bálint Gimn., 12. évf., felvételt nyert: BME mechatronika szak);

Penc Patrik (Budapest, ELTE Trefort Ágoston Gyak. Gimn., 10. évf.,);

Vavrik Márton (Budapest, Berzsenyi Dániel Gimnázium, 12. évf., felvételt nyert: BME – mérnök-informatikus szak).

Hivatalos partnereink:

Emberi Erőforrások Minisztériuma — MOL — Eötvös Loránd Fizikai Társulat — ELTE TTK: Anyagfizikai Tanszék — Nemzeti Tehetség Program

Hömöstrei Mihály, a HYPT szervezője

Gyakorló feladatsor emelt szintű fizika érettségire

Tesztfeladatok*

1. Egy folyó sebessége 2 m/s, a rajta átkelni szándékozó csónak sebessége a vízhez viszonyítva 4 m/s. A folyó szélessége 300 m. Milyen irányba kell evezni, hogy a lehető legrövidebb idő alatt átérjünk a túlsó partra? Mekkora az átkelés minimális időtartama?

A) A folyón felfelé a túlsó part irányához képest 30°-os szögben kell evezni, és az átkelés időtartama 87 s.

B) A partra merőlegesen kell evezni, és az átkelés időtartama 75 s.

C) A partra merőlegesen kell evezni, és az átkelés időtartama 67 s.

D) A folyón felfelé a túlsó part irányához képest 30°-os szögben kell evezni, és az átkelés időtartama 75 s.

2. Két test lendülete (impulzusa) egyenlő, de az egyik test tömege 2-szer akkora, mint a másik testé. Ha a két test egyenes vonalú pályán mozog, és a gyorsabb utoléri a lassabbat, akkor a tökéletesen rugalmatlan ütközés után mekkora sebességgel mozog a két test tovább?

A) A két test az ütközéskor sebességet cserél.

B) A gyorsabb test az ütközés után megáll, a lassabb pedig kétszeres sebességre gyorsul.

C) Az ütközés után mindkét test sebessége a lassabb test sebességének másfélszerese lesz.

D) Az ütközés után mindkét test sebessége a gyorsabb test sebességének kétharmad részére változik.

3. 10 cm oldalélű, 80 N súlyú kocka vízszintes asztallapon fekszik. Legalább mekkora munkát kell végezni ahhoz, hogy a kockát az egyik oldalélén keresztül átbillentsük egy másik oldallapjára?

A) 1,66 J; *B*) 3,31 J; *C*) 4 J; *D*) 5,66 J.

4. Mekkora sebességgel mozog az az autó, amelyre a 100 m sugarú dombtető legfelső pontján nem hat nyomóerő?

A) Kb. 31 m/s.

B) 98 km/h.

C) Csak az autó tömegének ismeretében lehet kiszámítani a kérdéses sebességet.

D) Az autóra minden körülmények között hat nyomóerő.

5. Válasszuk meg a félbehagyott mondat folytatását úgy, hogy az állítás *igaz* legyen! Mechanikai rezonancia esetén a rezgőmozgást végző test mozgásának

*A válaszok közül minden esetben pontosan egy a helyes.

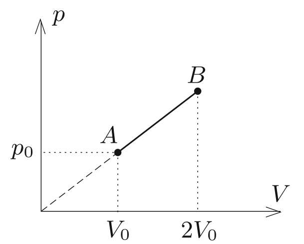
A) frekvenciája számottevően megnő;
B) amplitúdója jelentős mértékben megnő;
C) fázisa ugrásszerűen megváltozik;
D) körfrekvenciája lecsökken.

6. Melyik állítás *nem igaz* a hullámok terjedésére? Adott közegben terjedő hullám esetén
A) a hullámhossz a frekvencia reciproka;
B) a hullámhossz és a frekvencia egymással fordítottan arányos;
C) a hullámhossz és a periódusidő egymással egyenesen arányos;
D) a terjedési sebesség állandó.

7. Válasszuk meg a félbehagyott mondat folytatását úgy, hogy az állítás *igaz* legyen! Az ideális gáz sűrűsége
A) egyenesen arányos a gáz nyomásával és hőmérsékletével;
B) egyenesen arányos a gáz nyomásával és a moláris tömeggel;
C) egyenesen arányos a moláris tömeggel, és nem függ a hőmérséklettől;
D) fordítottan arányos a moláris tömeggel és a hőmérséklettel.

8. Mekkora a gáz által végzett munka az *ábrán* látható folyamatban?

A) p_0V_0; B) $1{,}5\,p_0V_0$; C) $2\,p_0V_0$; D) $3\,p_0V_0$.



9. Válasszuk meg a félbehagyott mondat folytatását úgy, hogy az állítás *igaz* legyen! Az elsőfajú örökmozgó olyan berendezés lenne, amely
A) folyamatosan energiát termelne a semmiből;
B) a tengervízben rejlő hatalmas energiát hasznosítaná;
C) az univerzum mikrohullámú háttérsugárzásából nyerne energiát;
D) az elektromágneses mező energiáját hasznosítaná 100% hatásfokkal.

10. Válasszuk ki a *helyes* állítást!
A) Az anyagok elektromos ellenállása nem függ a hőmérséklettől.
B) Az anyagok ellenállása magasabb hőmérsékleten mindig nagyobb.
C) Az anyagok ellenállása magasabb hőmérsékleten mindig kisebb.
D) Van olyan anyag, amelynek ellenállása nagyobb, és olyan is van, amelynek az ellenállása kisebb magasabb hőmérsékleten.

11. Melyik állítás *hamis* a mágneses térben mozgó egyenes vezető két végpontja között kialakuló feszültséggel kapcsolatban?
A) Az indukált feszültség függ a mozgatás sebességétől.
B) Az indukált feszültség függ a sebesség irányától.
C) Az indukált feszültség függ a vezeték mágneses indukcióvektorral bezárt szögétől.
D) Az indukált feszültség függ a vezeték vastagságától.

12. Az egyenáram mely tulajdonságával *nem* rendelkezik a váltakozó áram?

A) Nincs mágneses hatása.

B) Nem olyan veszélyes az emberi szervezetre.

C) Nem lehet vele elektrolizálni.

D) Nem lehet transzformálni.

13. Válasszuk meg a félbehagyott mondat folytatását úgy, hogy az állítás *igaz* legyen! Ha egy gyűjtőlencsére széttartó fénysugarak érkeznek, akkor

A) a lencse biztosan összegyűjti ezeket a fénysugarakat;

B) a lencse elhagyása után a fénysugarak továbbra is széttartóak maradnak;

C) a lencse párhuzamosítja a fénysugarakat;

D) mindhárom előző lehetőség előfordulhat.

14. Válasszuk meg a félbehagyott mondat folytatását úgy, hogy az állítás *igaz* legyen! A röntgensugárzás és a γ-sugárzás abban különbözik egymástól, hogy

A) a röntgensugárzás frekvenciája mindig kisebb, mint a γ-sugárzásé;

B) a röntgensugárzás frekvenciája mindig nagyobb, mint a γ-sugárzásé;

C) a röntgensugárzás mindig az elektronburokból származik, míg a γ-sugárzás az atommagból;

D) a röntgensugárzás veszélyesebb az emberi szervezetre, mint a γ-sugárzás.

15. Válasszuk meg a félbehagyott mondat folytatását úgy, hogy az állítás *igaz* legyen! Az atomreaktorokban használt szabályozórudaknak olyan anyagból kell készülniük, amelyek jól elnyelik

A) a hasadóanyagokat;

B) a hasadáskor keletkező neutronokat.;

C) a hasadáskor keletkező nagyobb tömegszámú végtermékeket;

D) a hasadáskor keletkező radioaktív sugárzásokat.

Számolásos feladatok

1. Egy kondenzátor lemezei 50 cm^2 felületű fémlapok, amelyek egymástól 2 cm távolságban vannak. A lemezek között levegő található.

a) Mekkora a kondenzátor kapacitása?

b) Erre a kondenzátorra 2 nC töltést viszünk fel. Mekkora lesz a feszültség a lemezek között, és mennyi energia tárolódik a kondenzátorban?

2. Milyen hosszú az a fonálinga, amely a 80 cm hosszúságú ingánál 1 perc alatt 2-vel többet leng?

3. 6 kg tömegű, -20 °C hőmérsékletű jeget, 4 kg tömegű, 60 °C hőmérsékletű vizet és 2 kg tömegű, 100 °C hőmérsékletű vízgőzt egy elhanyagolható hőkapacitású kaloriméterben összekeverünk. Mekkora lesz a közös hőmérséklet?

4. 18 m mély kútból vizet húzunk fel. A víz tömege a vödörrel együtt 15 kg. A lánc, amelyen a vödör függ, méterenként 0,5 kg tömegű. A víz lassú felhúzásakor a vödör egyenletes mozgást végez.

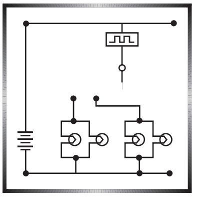
a) Ábrázoljuk a húzóerőt a vödör elmozdulásának függvényében!

b) Írjuk fel az erő-elmozdulás függvény matematikai alakját!

c) Ha a munkavégzést három fő egyenlő mértékben szeretné elvégezni, akkor a vödör mely helyzeteiben kell váltani egymást az embereknek?

Markovits Tibor (Budapest)

Fizika gyakorlatok megoldása



G. 628. és **P. 5001.** *Reggelente mindig ugyanabban az órában megfigyelhetjük, hogy a Vénusz egyre közelebb kerül a Naphoz.*

Vajon a Nap „előtt" vagy pedig a Nap „mögött" fog a Vénusz elhaladni?

(*4 pont*) Közli: *Részegh Anna,* Vácduka

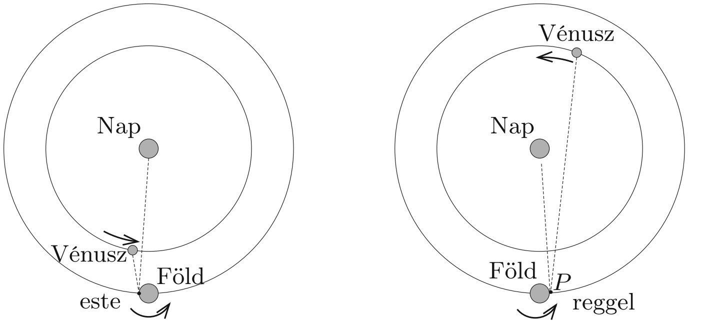
Megoldás. A Föld és a Vénusz keringési síkja, valamint a földi Egyenlítő síkja nem nagyon tér el egymástól. Tekintsünk el ettől az eltéréstől! Tudjuk továbbá, hogy a Föld és a Vénusz keringési iránya megegyezik a Föld tengely körüli forgásának irányával.

A Vénusz keringési ideje mindössze 224 földi nap, tehát a Nap–Vénusz egyenes „gyorsabban forog", mint a Nap-Föld egyenes. Emiatt a Földdel együtt keringő, egyik tengelyével mindig a Nap felé mutató vonatkoztatási rendszerből nézve a Vénusz lassabban bár, de ugyanolyan irányban kering a Nap körül, mint a Naphoz rögzített rendszerben.

A Vénusz két helyzetben is „közeledhet" a Naphoz (vagyis csökkenhet a látószögük):

(*i*) ha a Vénusz közelebb van a Földhöz, mint a Nap (a Nap és a Föld „között" helyezkedik el), lásd az *ábra bal oldali* részét;

(*ii*) ha a Vénusz a Napnál távolabb van (a Nap „túloldalán" helyezkedik el), lásd az *ábra jobb oldali* részét.



A Vénusz csak akkor látható, ha a Nap nincs a „közelében” az égbolton, tehát kora reggel vagy este (nem sokkal a naplemente után). Ha figyelembe vesszük a Föld tengely körüli forgásának irányát is, láthatjuk, hogy a P pontban álló ember *reggel* a jobb oldali ábrának megfelelő (*ii*) helyzetben figyelheti meg a Vénuszt; tehát olyankor, amikor a Nap „mögött” fog elhaladni.

Bekes Barnabás (Budapest, Városmajori Gimn. és Kós K. Ált. Isk. 10. évf.) dolgozata alapján

Összesen 72 dolgozat érkezett. Helyes 18 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 6, hiányos (1–2 pont) 28, hibás 20 dolgozat.

G. 632. *Egy* 900 km/h *sebességgel haladó repülőgép másodpercenként* 4 *liter üzemanyagot (kerozint) használ fel. Mekkora utat tesz meg percenként az az autó, amelyik* 100 *kilométerenként* 6,4 *liter benzint fogyaszt, és* 5 *óra alatt annyi benzinre van szüksége, amennyi kerozint kilométerenként fogyaszt a repülőgép?*

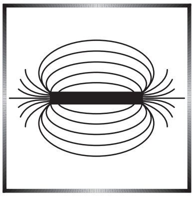
(*4 pont*) Közli: *Tornyos Tivadar Eörs,* Budapest

Megoldás. A repülőgép, amelynek sebessége 900 km/h = 250 m/s, 1 másodperc alatt 4 liter kerozint használ fel, és ennyi idő alatt 250 métert tesz meg. Ezek szerint 1 kilométer megtételéhez 16 liter üzemanyagra van szüksége.

Az autó 100 kilométert tesz meg 6,4 liter benzin felhasználásával, és mivel 16 liter üzemanyagot fogyaszt 5 óra alatt, 2 óra alatt 6,4 liter benzint használ el. Tehát a sebessége 50 km/h, így percenként 0,833 kilométert tesz meg az autó.

Csanádi Réka (Szeged, Radnóti M. Kísérleti Gimn., 9. évf.)

74 dolgozat érkezett. Helyes 70 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 2, hiányos (1–2 pont) 2 dolgozat.



Fizika feladatok megoldása

P. 4993. *A Calais-t Doverrel összekötő „Csalagút” hossza* 55 km, *ennek mintegy* 38 km-*es szakasza halad a La Manche csatorna alatt. Képzeljünk el a* 6371 km *sugarú, tökéletesen gömb alakú Földön egy* 40 km *hosszú, nyílegyenes vasúti alagutat a tenger szintje alatt, amelynek tenger alatti eleje és vége felett* 20 méter *magasan áll a víz.*

a) Milyen magasan áll a víz ennek az alagútnak a közepe felett?

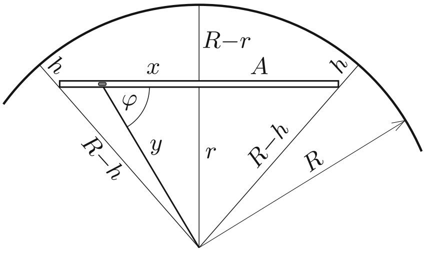
b) Ha ebben a vasúti alagútban nem lenne levegő, és eltekinthetnénk a súrlódástól is, mennyi idő alatt haladna át rajta az alagút egyik végéről nyugalmi helyzetből induló vagon csupán a Föld gravitációs vonzóerejének hatására?

c) Mekkora sebességgel száguldana át ez a vagon az alagút közepén?

(*5 pont*) Közli: *Radnai Gyula,* Budapest

Megoldás. *a*) Az alagút két vége a felszín alatt $h = 0{,}02$ km mélyen van, így távolsága a Föld középpontjától

$$R - h = 6370{,}98 \text{ km}.$$



A Pitagorasz-tételből kiszámolható, hogy az alagút közepe a Föld középpontjától

$$r = \sqrt{6370,98^2 - 20^2} \text{ km} = 6370{,}949 \text{ km}$$

távolságra van, így

$$R - r = 6371{,}000 \text{ km} - 6370{,}949 \text{ km} = 0{,}051 \text{ km} = 51 \text{ m}$$

magasan áll az alagút közepe felett a víz (lásd a nem méretarányos *ábrát*).

b) A vagon és a Föld tömegközpontjának távolsága folyamatosan változik, ezért a vagonra ható gravitációs erő is folyamatosan változik. Amikor a vagon y távolságra van a Föld középpontjától, akkor a tömegvonzás szempontjából csak az M tömegű Földnek az y sugarú gömbön belüli, m^* tömegű része jön számításba, ahol

$$m^* = M\frac{\frac{4}{3}y^3\pi}{\frac{4}{3}R^3\pi} = \frac{y^3}{R^3}M.$$

Az m tömegű vagonra ható gravitációs erő:

$$F_{\text{grav}} = \gamma\frac{mm^*}{y^2} = \gamma\frac{mM}{R^3}\,y,$$

amelynek a pálya irányába eső, a pálya középpontja felé mutató komponense:

$$F = -F_{\text{grav}}\cdot\cos\varphi = -F_{\text{grav}}\,\frac{x}{y} = -\gamma\frac{mM}{R^3}\,x.$$

A képletben x a vagon és a pálya középpontjának távolságát jelöli. Láthatjuk, hogy a testre ható erő arányos a kitéréssel és azzal ellentétes irányú, ezért a test harmonikus rezgőmozgást végez, éppen úgy, mint egy

$$D = \gamma\frac{mM}{R^3}$$

rugóállandójú rugó által kifejtett erő hatására tenné. Jelen esetben a vagon egy félperiódusnyit mozog, tehát a menetideje:

$$t = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{m}{D}} = \pi\sqrt{\frac{R^3}{\gamma M}} = 2531 \text{ s} \approx 42 \text{ perc}.$$

Megjegyzés. Felhasználva, hogy a nehézségi gyorsulás a Föld felszínén $g = \gamma M/R^2$, a vagon mozgásának ideje a $t = \pi\sqrt{R/g}$ összefüggésből is kiszámítható.

c) A vagon harmonikus rezgőmozgást végez $A = 20$ km-es amplitúdóval, ezért az alagút közepén lesz a legnagyobb a sebessége:

$$v_{\max} = A\frac{2\pi}{T} = 24{,}8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 89{,}3\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}.$$

Debreczeni Tibor (Budapest, Békásmegyeri Veres Péter Gimn., 11. évf.)

69 dolgozat érkezett. Helyes 28 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 10, hiányos (1–3 pont) 28, hibás 3 dolgozat.

P. 5006. *Egy* 200 g *tömegű strandlabdát függőlegesen lefelé erősen a talajra dobunk. A labda a legjobban benyomott állapotában egy* 10 cm *átmérőjű körlap mentén érintkezik a talajjal, és ekkor a labdában lévő levegő nyomása* 110 kPa *lesz.*

a) Mekkora a labda tömegközéppontjának legnagyobb gyorsulása, ha a talaj száraz és egy kicsit göröngyös?

b) Más értéket kapnánk-e a gyorsulásra, ha a talaj sima és nedves volna, és emiatt a labda talajjal érintkező része alatt nem maradna levegő?

(*A külső légnyomás* 100 kPa.)

(*5 pont*) Közli: *Gnädig Péter*, Vácduka

I. megoldás. *a*) A labda legjobban benyomódott állapotában

$$A = (5\ \mathrm{cm})^2\pi = 7{,}85\cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^2$$

területű körlap mentén érintkezik a talajjal. Legyen a labda teljes tömege m, a talajjal érintkező részének tömege m^*. A külső légnyomást jelöljük p_0-lal, a labdában lévő levegő legnagyobb nyomását pedig p_1-gyel (*1. ábra*).

a) A labda benyomódott részére felülről p_1A erő hat, alulról pedig (amennyiben a labda alatt levegő marad) $p_0A + K_1$ erő nyomja felfelé. K_1 a göröngyös talaj által kifejtett kényszererőt jelöli. A labda többi része „simán”, vízszintesen csatlakozik a körlap alakú részhez, így nem fejthet ki arra eredő függőleges erőt.

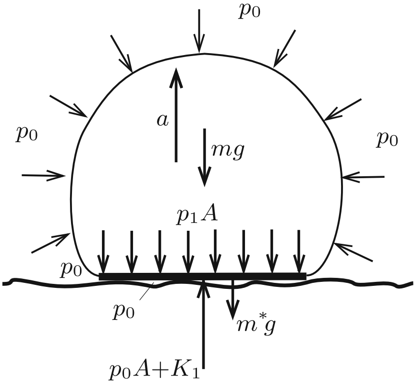
A körlap az ütközés ideje alatt nem gyorsul, hiszen az bizonyos ideig folyamatosan a talajjal érintkezik, így a mozgásegyenlete:

$$m^*g + p_1A = p_0A + K_1, \quad \text{vagyis} \quad K_1 = (p_1 - p_0)A + m^*g.$$

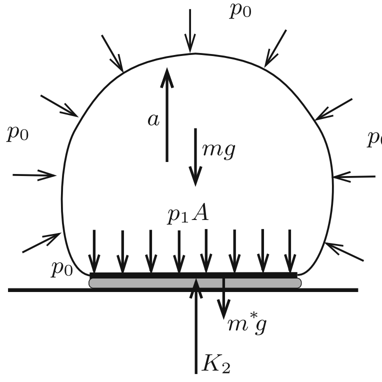
Megjegyzés: Mivel a nyomáskülönbségből származó első tag kb. 78 N, a körlapra ható nehézségi erő pedig biztosan kisebb, mint $mg = 2$ N, jó közelítéssel igaz, hogy

$$K_1 \approx (p_1 - p_0)A.$$

Vizsgáljuk most meg a labda többi részére ható *külső* erőket! A légnyomás által kifejtett erő p_0A nagyságú, és függőlegesen lefelé mutat, hiszen a légnyomásból származó erők eredője a teljes labdára nulla, és a talajjal érintkező körlapra a külső



1. ábra



2. ábra

levegő $p_0 A$ nagyságú, függőlegesen felfelé mutató erőt fejt ki. A labda egészére felírható mozgásegyenlet (a függőlegesen felfelé mutató irányt tekintve pozitívnak):

$$K_1 + p_0 A - mg - p_0 A = ma,$$

ahonnan K_1 korábban kiszámított értékének behelyettesítése után a tömegközéppont gyorsulása:

$$a = \frac{(p_1 - p_0)A}{m} - \frac{m - m^*}{m} g \approx \frac{(p_1 - p_0)A}{m} - g \approx 380\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

b) Ha a talaj felülete sima és nedves, akkor a labda alatt nem marad levegő, tehát a légnyomásból származó $p_0 A$ erő most nem lép fel. Helyette viszont a vízréteg és a talaj fejt ki a labda aljára valamekkora erőt. (A talajon lévő víz a labdán kívül is jelen van, és ott érintkezik a külső levegővel, így a nyomása gyakorlatilag p_0. Ha viszont a labda ténylegesen lezárja az alája szorult vizet, akkor a víz nyomása akár p_1 is lehet.)

A talajjal érintkező labdadarab nem gyorsul, így a mozgásegyenlete:

$$m^* g + p_1 A = K_2,$$

ahol K_2 a talaj és a vízhártya által kifejtett eredő erő (*2. ábra*). Az ábrán – az egyszerűség kedvéért – nem jelöltük, hogy a labda alja milyen mértékben érintkezik közvetlenül a talajjal, illetve a vízzel. A labda egészének mozgásegyenlete:

$$K_2 - mg - p_0 A = ma,$$

vagyis a tömegközéppont gyorsulása:

$$a = \frac{(p_1 - p_0)A}{m} - \frac{m - m^*}{m} g \approx 380\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

Ez az érték ugyanakkora, mint az *a*) esetben volt a tömegközéppont gyorsulása.

Több megoldás alapján

II. megoldás. Használjuk az I. megoldás jelöléseit! A labda lendülete a legjobban benyomódott állapotban és az azt megelőző, illetve követő pillanatokban így írható fel:

$$I^{\text{teljes}}(t) = I^{\text{felső}}(t) + I^{\text{alsó}}(t) \equiv I^{\text{felső}}(t),$$

hiszen az alsó rész az ütközés alatt folyamatosan nyugalomban van, tehát ezalatt a lendülete nulla. (Az „alsó” kifejezés a labdának a talajjal érintkező részére, a „felső” pedig a többi részre utal.)

Newton II. törvényét ilyen alakban is felírhatjuk:

$$ma = \frac{\Delta I^{\text{teljes}}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta I^{\text{felső}}(t)}{\Delta t} = F^{\text{felső}},$$

ahol

$$F^{\text{felső}} = p_1 A - p_0 A - (m - m^*)g$$

a *felső* részre ható erők (a külső és a belső légnyomásból származó erők és a nehézségi erő) eredője. Az eredő erő képletében szereplő első két tag nagyságát onnan kaphatjuk meg, hogy tudjuk: egy teljes, zárt felületre ható, a légnyomásból származó erők eredője *nulla.* A fenti összefüggés felírásánál kihasználtuk, hogy a hajlékony anyagú labda alsó része nem fejthet ki függőleges irányú erőt a felső részre, mert a két rész vízszintes érintősíkkal, „törésmentesen” csatlakozik egymáshoz.

A fenti egyenletekből a tömegközéppont gyorsulására

$$a = \frac{(p_1 - p_0)A}{m} - \frac{m - m^*}{m} g \approx 380\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

adódik. Ez az eredmény független attól, hogy a labda alsó része és a talaj között milyen a kapcsolat, vagyis hogy a talaj száraz-e vagy nedves, sima-e vagy pedig göröngyös.

(G. P.)

26 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott Bartók Imre, Csire Roland, Csuha Boglárka, Elek Péter, Fajszi Bulcsú, Fekete Balázs Attila, Kolontári Péter, Marozsák Tóbiás, Olosz Adél és Póta Balázs megoldása. Kicsit hiányos (4 pont) 1, hiányos (2–3 pont) 13, hibás 2 dolgozat.

P. 5033. *Kozmikus porból és gázokból álló, M tömegű csillagközi köd perdülete N. A belső gravitációs hatások következtében a köd teljes anyaga két kis méretű gömbbe tömörül, és így kettőscsillag alakul ki.*

a) Mekkora a kettőscsillag tömegközéppont körüli $T_{csillag}$ keringési ideje, ha a csillagok körpályán mozognak, és a tömegük m_1, illetve m_2? ($m_1 + m_2 = M$ és $m_1 \leqslant m_2$.)

b) Mekkora lehet a két csillag távolsága?

c) Ha a kialakuló kettőscsillag távolsága nem pontosan állandó, hanem kis amplitúdóval ingadozik, mekkora ennek az ingadozásnak a periódusideje?

(*6 pont*) Közli: *Mihail Sandu,* Călimăneşti, Románia

Megoldás. *a*) A kettőscsillag kialakulása során, mivel a rendszerre külső erő nem hat, és anyag sem távozik belőle, annak tömegközéppontja mindvégig nyugalomban van az alkalmasan választott koordináta-rendszer origójában, továbbá a rendszernek a tömegközéppontra vonatkoztatott perdülete (N) is időben állandó.

Legyen a két csillag távolsága r, a tömegközépponttól mért távolságuk pedig r_1 és r_2. Jelölje továbbá $\omega = 2\pi/T_{\text{csillag}}$ a csillagrendszer keringésének szögsebességét. Ekkor fennállnak az

$$r_1 = r\frac{m_2}{M}, \qquad r_2 = r\frac{m_1}{M}, \tag{1}$$

$$N = r_1 m_1(r_1\omega) + r_2 m_2(r_2\omega) = \frac{m_1 m_2}{M} r^2\omega \tag{2}$$

összefüggések.

A csillagok a tömegközéppont körüli körpályán keringenek. Az egyik (például az m_1 tömegű) csillag mozgásegyenlete:

$$\gamma\frac{m_1 m_2}{r^2} = m_1 r_1\omega^2 = \frac{m_1 m_2}{M} r\omega^2, \qquad \text{azaz} \qquad \gamma M = r^3\omega^2. \tag{3}$$

(Ugyanerre az összefüggésre vezet a másik csillag mozgásegyenlete is.)

A (2) és (3) egyenletekből r kiküszöbölésével a szögsebesség

$$\omega = \frac{\gamma^2 (m_1 m_2)^3}{M N^3} \leqslant \frac{\gamma^2 M^5}{64\, N^3}. \tag{4}$$

Az utolsó lépésnél felhasználtuk a számtani-mértani középre vonatkozó

$$\sqrt{m_1 m_2} \leqslant \frac{m_1 + m_2}{2} = \frac{M}{2}$$

egyenlőtlenséget.

A kettőscsillag-rendszer keringési ideje tehát

$$T_{\text{csillag}} = 2\pi\frac{M N^3}{\gamma^2 (m_1 m_2)^3} \geqslant 128\pi\frac{N^3}{\gamma^2 M^5}.$$

Látható, hogy a két csillag keringési ideje nem lehet egy bizonyos értéknél kisebb. A leggyorsabb keringés a szimmetrikus tömegeloszlásnak, az $m_1 = m_2 = M/2$ esetnek felel meg.

b) A (2) és (3) összefüggésekből az ω szögsebességet kiküszöbölve a csillagok távolságára

$$r = \frac{N^2 M}{\gamma (m_1 m_2)^2} \geqslant 16\frac{N^2}{\gamma M^3} \tag{5}$$

adódik. (Ismét felhasználtuk a számtani-mértani középre vonatkozó egyenlőtlenséget.)

A két csillag távolsága sem sem lehet egy bizonyos értéknél kisebb. A legkisebb csillagtávolság a szimmetrikus tömegeloszláshoz tartozik.

c) Írjuk fel az m_1 tömegű csillag sugár irányú (radiális) mozgásegyenletét, amikor a tömegközépponttól mért távolsága r_1, az r_1-nek megfelelő „gyorsulás" a_1, a szögsebessége pedig ω:

$$m_1a_1 - m_1r_1\omega^2 = -\gamma\frac{m_1m_2}{r^2}. \tag{6}$$

Itt most r_1, r és ω időben változó mennyiségek.

Megjegyzés. (6) bal oldalának második tagja azt fejezi ki, hogy a polárkoordinátarendszerben a sugár irányú gyorsulás nem egyszerűen $a(t)$, ami az $r(t)$ távolság változási sebességének „változási üteme" (második deriváltja), hanem $a_1(t) - r_1\omega^2$. A $-(m_1r_1\omega^2)$-es kifejezést (6) jobb oldalára rendezve az a tag úgy is értelmezhető, mint az ω szögsebességgel forgó vonatkoztatási rendszerben fellépő „centrifugális erő".

Felhasználva az (1) és (2) összefüggéseket (6) tovább alakítható:

$$\frac{m_1m_2}{M}a(t) - \frac{m_1m_2}{M}\left(\frac{MN}{m_1m_2}\right)^2 \cdot \frac{1}{r(t)^3} = -\gamma\frac{m_1m_2}{r(t)^2}, \tag{6'}$$

ahol $a(r)$ az $r(t)$ távolságnak megfelelő „gyorsulás". Mivel $r(t)$ csak kis amplitúdóval ingadozik az (5)-nek megfelelő egyensúlyi

$$r_0 = \frac{N^2M}{\gamma(m_1m_2)^2}$$

érték körül, kereshetjük a megoldást $r(t) = r_0 + x(t)$ alakban, ahol $x(t) \ll r_0$. Behelyettesítve ezt az alakot (6′)-be és x/r_0 elsőnél magasabb hatványait elhanyagolva, vagyis csak elsőrendben számolva a körpálya körüli ingadozásokat, a (6′) mozgásegyenlet így alakul:

$$a(t) = -\left[\frac{\gamma^2(m_1m_2)^3}{MN^3}\right]^2 \cdot x(t). \tag{7}$$

A fenti egyenlet származtatásánál kihasználtuk, hogy első (lineáris) közelítésben

$$\frac{1}{r(t)^2} \approx \frac{1}{r_0^2}\left(1 - 2\,\frac{x(t)}{r_0}\right) \qquad \text{és} \qquad \frac{1}{r(t)^3} \approx \frac{1}{r_0^3}\left(1 - 3\,\frac{x(t)}{r_0}\right).$$

A (7) egyenlet (amelyben $a(t)$ nemcsak $r(t)$ „gyorsulása", hanem az attól csak egy r_0 konstanssal különböző $x(t)$ gyorsulása is) a harmonikus rezgőmozgás mozgásegyenlete, és a szögletes zárójelben álló kifejezés a rezgés körfrekvenciájának négyzete. Ezek szerint

$$\omega_{\text{ingadozás}} = \frac{\gamma^2(m_1m_2)^3}{MN^3},$$

ami (4) szerint éppen a csillagok keringési szögsebességével egyezik meg. Ezek szerint

$$T_{\text{ingadozás}} = T_{\text{csillag}} = 2\pi \frac{MN^3}{\gamma^2(m_1 m_2)^3}.$$

Marozsák Tóbiás (Budapest, Óbudai Árpád Gimn., 12. évf.)

18 dolgozat érkezett. Helyes Fajszi Bulcsú, Marozsák Tóbiás és Tordai Tegze megoldása. Kicsit hiányos (5 pont) 7, hiányos (1–4 pont) 8 dolgozat.

P. 5036. *A Nap körül keringő egyik üstökös legkisebb távolsága a Naptól* 0,5 CSE, *a legnagyobb pedig* 31,5 CSE.

a) *Mekkora az üstökös keringési ideje?*

b) *Mekkora területet súrol az üstököst a (nyugvónak tekinthető) Nappal összekötő szakasz egy év alatt?*

(*4 pont*) *Csillagászati versenyfeladat alapján*

Megoldás. *a*) Az üstökös pályájának fél nagytengelye

$$a = \frac{31{,}5 + 0{,}5}{2}\ \text{CSE} = 16\ \text{CSE}.$$

A földpálya fél nagytengelyének hossza 1 CSE, és a Föld keringési ideje 1 év. Kepler III. törvénye szerint a keringési idők négyzetei úgy aránylanak egymáshoz, mint a pályák fél nagytengelyeinek köbei:

$$\frac{a^3_{\text{üstökös}}}{a^3_{\text{Föld}}} = 16^3 = \frac{T^2_{\text{üstökös}}}{T^2_{\text{Föld}}} = \left(\frac{T_{\text{üstökös}}}{1\ \text{év}}\right)^2,$$

innen $T_{\text{üstökös}} = \sqrt{16^3}$ év $= 64$ év.

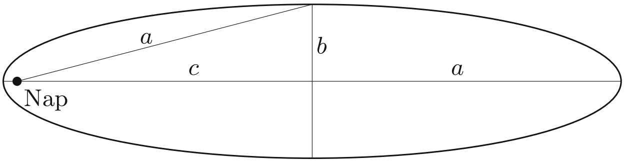
b) Kepler II. törvénye szerint a vezérsugár egyenlő idők alatt egyenlő területeket súrol:

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \text{állandó}.$$

Mivel 64 év a keringési idő, egy év alatt az ellipszis $A_0 = ab\pi$ területének $\frac{1}{64}$ részét súrolja az üstököst a Nappal összekötő szakasz (b az ellipszis fél kistengelye).

A Nap és az ellipszispálya középpontja $c = 16\ \text{CSE} - 0{,}5\ \text{CSE} = 15{,}5\ \text{CSE}$ távolságra van egymástól. A fél kistengely hossza Pitagorasz tételéből számítható (lásd az *ábrát*):

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{16^2 - 15{,}5^2}\ \text{CSE} = 3{,}97\ \text{CSE}.$$



Így az ellipszispálya területe $A_0 = (16\ \mathrm{CSE}) \cdot (3{,}97\ \mathrm{CSE}) \cdot \pi = 199{,}5\ \mathrm{CSE}^2$, a vezérsugár tehát évente

$$\frac{A_0}{64} \approx 3{,}12\ \mathrm{CSE}^2 \approx 7 \cdot 10^{22}\ \mathrm{m}^2$$

területet súrol.

Markó Gábor (Győr, Révai Miklós Gimn., 10. évf.)

41 dolgozat érkezett. Helyes 24 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 10, hiányos (1–2 pont) 6, hibás 1 dolgozat.

Fizikából kitűzött feladatok

M. 380. Mérjük meg egy főtt tojás tehetetlenségi nyomatékát a szimmetriatengelyére vonatkozólag!

(*6 pont*) Közli: *Simon Péter,* Pécs

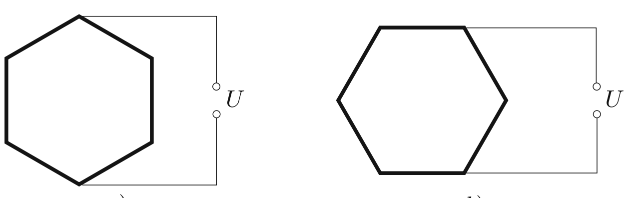
G. 645. A NASA vákuumkamrájában filmre vették, ahogyan a kalapács és a madártoll is egyformán, $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$ gyorsulással esik a föld felé, egyszerre indítva őket egyszerre érnek talajt. Ha a filmet kétszeres sebességgel vetítik, mekkora lesz az így lejátszott moziban a kalapács és a toll gyorsulása?

(*3 pont*)

G. 646. Egy kémiaszertárban egyforma üvegekben tárolják a vegyszereket. Az egyik üveg tele van glicerinnel, a másik éterrel. A glicerines üveg tömege 2290 gramm, az éteresé 1471 gramm. Mekkora az üres üveg tömege?

(*3 pont*)

G. 647. Két – látszólag egyforma – vízforraló kancsóban szabályos hatszögben meghajlított fűtőszálat találunk. Az egyik kancsóban az *a*) *ábra,* a másikban a *b*) *ábra* szerint kötötték be a fűtőszálat. Melyik kancsóban forr fel hamarabb a víz?



a) *b*)

(*3 pont*)

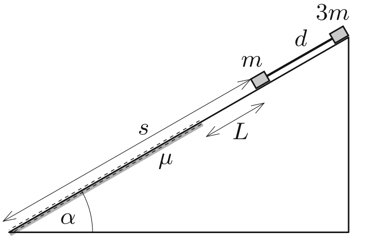
G. 648. Egy kis bogár indul el egy 10 cm oldalélű fakocka P csúcsából. Legalább mennyi időre van szüksége a bogárnak ahhoz, hogy elérjen a kocka legtávolabbi Q csúcsához, ha a bogár sebessége 1 cm/s? Hányféle úton mozoghat a bogár, hogy a legrövidebb idő alatt odaérjen?

(*4 pont*)

P. 5056. Egy 40 N/m rugóállandójú, elhanyagolható tömegű rugó függőleges helyzetben áll az asztalon. A rugó tetejéhez erősített, ugyancsak elhanyagolható tömegű lemezre egy 0,2 kg tömegű, kis méretű testet ejtünk, a lemeztől mérve 0,4 m magasságból. Mennyi ideig lesz a kis test a lemezen, ha nem tapad hozzá?

(*5 pont*) Közli: *Kobzos Ferenc,* Dunaújváros

P. 5057. Egy $\alpha = 30^\circ$ hajlásszögű lejtőre helyezünk egy $m = 0{,}5$ kg tömegű és egy $3m$ tömegű kicsiny testet, amelyek elhanyagolható tömegű, $d = 50$ cm hosszúságú, merev rúddal vannak összekapcsolva. A lejtő felső része súrlódásmentes, az alsó részén a súrlódási együttható $\mu = 0{,}2$.



Kezdetben az m tömegű test $L = 40$ cm távolságra van attól a határvonaltól, ahol már van súrlódás, és $s = 120$ cm távol van a lejtő aljától. A két (pontszerűnek tekinthető) testből álló rendszert magára hagyjuk.

a) Adjuk meg a rúdban ébredő erőt a megtett út függvényében!

b) Mennyi idő alatt ér le az m tömegű test a lejtő aljára?

(*5 pont*) Közli: *Kotek László,* Pécs

P. 5058. Egy hóbortos alaszkai vállalkozó különleges kalandparkot működtet. Egy nagyon magas jéghegy belsejében csavarvonal alakú bobpályát épít. A csavarvonal tengelye függőleges, átmérője d, menetemelkedése h. A pálya a hegy tetejétől indul, és a hegy aljánál egy rövid, súrlódásmentesnek tekinthető kanyar után s hosszúságú, vízszintes, egyenes szakaszban végződik. A pálya nagyon hosszú (az utasok számára „végtelen hosszúnak” tűnik), és a bobok (amelyeken sem kormány, sem fék nincsen) éppen a vízszintes szakasz végén állnak meg. (Az egyszerűség kedvéért tekintsük a bobokat tömegpontoknak.)

a) Mekkora a csúszási súrlódási együttható a bob fémteste és a jég között?

b) Mekkora a bobok legnagyobb sebessége?

Adatok: $d = 10$ m, $h = 1{,}5$ m, $s = 270$ m.

(*5 pont*) Közli: *Gnädig Péter,* Vácduka

P. 5059. Mennyi idő alatt esik be egy test a Napba, ha a Naptól 50 CSE távolságból, kezdősebesség nélkül indul? Mennyi idő alatt teszi meg a pályája felét?

(*5 pont*) *Némedi István* (1932–1998) feladata nyomán

P. 5060. Két egyforma üvegballont keskeny, rövid cső köt össze, melynek belső térfogata elhanyagolható. A bennük lévő levegő hőmérséklete 27 °C. Hány százalékkal nő a levegő nyomása a ballonokban, ha az egyik ballont 177 °C-ra melegítjük, miközben a másikat 27 °C-on tartjuk?

(*4 pont*) *Példatári feladat nyomán*

P. 5061. Egy állandó tömegű ideális gázzal végzett folyamat egyenlete: $pV^n =$ $=$ állandó.

a) Mekkora n értéke, ha a folyamat izotermikus, izobár, vagy adiabatikus?

b) Mekkora lehet n értéke levegő esetén, ha a folyamat közben a gáz hőt ad le, és mégis felmelegszik?

(*4 pont*) Közli: *Radnai Gyula,* Budapest

P. 5062. Kísérletek alapján tudjuk, hogy a vezetők ellenállása függ a hőmérséklettől. Egyes ötvözetek esetén az ellenállás hőfoktényezője negatív, míg mások esetében pozitív. Ennek felhasználásával különböző ötvözetekből készült vezetékek összekapcsolásával olyan huzalellenállásokat gyárthatunk, amelyek ellenállása széles tartományban független a hőmérséklettől. Az alábbi táblázatban konstantán és manganin esetében adtuk meg a vezeték egységnyi hosszára vonatkoztatott, 0 °C-on mért ellenállásértékeket (r) és az ötvözeteket jellemző hőfoktényezőket (α):

	r [Ω/m]	α [1/°C]
konstantán	6,3	$-5{,}0 \cdot 10^{-5}$
manganin	5,3	$+1{,}4 \cdot 10^{-5}$

Milyen hosszúságú konstantánból és manganinból készült vezetékdarabokat kell sorba kötnünk ahhoz, hogy hőmérséklet-független, 5,0 Ω-os ellenálláshoz jussunk?

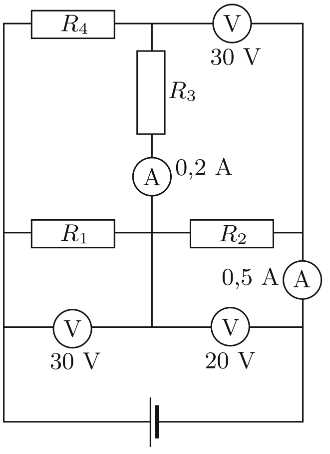
(*3 pont*) *Tornyai Sándor fizikaverseny,* Hódmezővásárhely

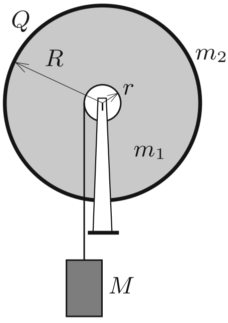
P. 5063. Az *ábra* szerinti kapcsolásban ideálisnak tekinthető műszerek vannak, amelyek a feltüntetett értékeket mutatják. Mekkorák az R_1, R_2, R_3 és R_4 ellenállások?

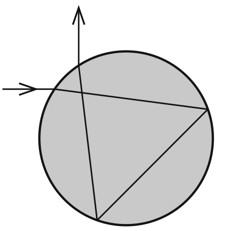
(*4 pont*) Közli: *Zsigri Ferenc,* Budapest

P. 5064. Az *ábrán* látható, súrlódásmentesen tengelyezett, $R = 20$ cm sugarú, $m_1 = 0{,}2$ kg tömegű, tömör szigetelőkorong peremére $m_2 = 0{,}05$ kg tömegű rézgyűrűt erősítettünk, amelynek $Q = 8 \cdot 10^{-6}$ C töltést adtunk. A korong tengelyére rögzített, $r = 5$ cm sugarú csigára tekert vékony fonálon egy $M = 10$ kg tömegű nehezék függ, amelyet egy adott pillanatban lökésmentesen elengedünk. Indítás után $t = 3$ s múlva mekkora lesz a korong keltette mágneses indukció a korong közepénél? (Az önindukció jelensége figyelmen kívül hagyható.)

(*5 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest







P. 5063. **P. 5064.** **P. 5065.**

P. 5065. Egy gömb alakú vízcseppre érkező fénysugár az *ábrán* látható módon, két belső visszaverődés után a bejövő sugárra merőleges irányban lép ki a vízcseppből. Mekkora a beesési szög? (A víz törésmutatója $n = \frac{4}{3}$.)

(*5 pont*) Közli: *Cserti József,* Budapest

P. 5066. Egy átlátszó közegben z irányban változik az optikai törésmutató. Erre merőlegesen, az x tengely irányában vékony fénysugarat indítunk, amely a közegben a pozitív z irányba eltérülve parabolaív mentén halad. A törésmutató értéke $z = 0$-nál n_0, míg $z = h$-nál $\sqrt{2}\, n_0$. Hogyan függ a törésmutató z-től?

(*6 pont*) Közli: *Vigh Máté,* Budapest

Beküldési határidő: 2018. november 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS
(Volume 68. No. 7. October 2018)

Problems in Mathematics

New exercises for practice – competition K (see page 416): **K. 594.** Three two-digit prime numbers are formed by using one of the digits 2, 3, 5, 6, 7 twice and every other digit once. What is the sum of the three numbers? **K. 595.** QUARTO is a strategy board game (1991) for two players, invented by the Swiss mathematician Blaiseb Müller. The game includes a set of 16 pieces, each different from all others in some way. The pieces can be divided into two sets of eight by each of four different attributes: – tall or short; – black or white; – round or square; – hollow or solid at the top. In how many different ways is it possible to select two pieces that agree in exactly two or three attributes? **K. 596.** Let P, Q and R denote points on sides AB, BC and CA of a triangle ABC, respectively, such that $AP = AR$, $BP = BQ$ and $CQ = CR$ should hold. How many different sets of such points P, Q, R may exist for a given triangle ABC? **K. 597.** The midpoints P, Q, R and S of the sides of a square $ABCD$ are connected to the vertices as shown in the *figure.* Determine the ratio of the area of quadrilateral $BVDT$ to that of the square $ABCD$. **K. 598.** On a digital clock display, digits consist of small illuminated line segments as shown in the *figure.* The energy consumption of the clock depends on the number of small line segments switched on or off as time elapses. For example, when a 3 changes to a 4, two line segments are switched off and one is switched on, which means 3 switch operations. During a full cycle of $0, 1, 2, \ldots, 9, 0$, this adds up to a total of 30 switch operations. If the same digit symbols were used to designate the numbers 0 to 9 in some different order, the number of switch operations could be reduced. Find the minimum number of switch operations that could be achieved in a full cycle, and give an example for a possible order of digits. (Proposed by *Zs. Ruttkai,* the Netherlands)

New exercises for practice – competition C (see page 417): **Exercises up to grade 10: C. 1497.** Solve the following simultaneous equations: $xy = z$, $xz = y$, $yz = x$. **C. 1498.** What is the maximum possible length of the shadow of a 2-metre-tall man on the Earth if the Earth is considered a sphere of radius 6370 km, illuminated by parallel light rays from the Sun? **Exercises for everyone: C. 1499.** Find the largest positive integer n for which there exists an appropriate order of the numbers $1, 2, \ldots, n$ such that the large number obtained by writing all the numbers together in a row has the following property: for any pair a, b of successive digits, at least one of the two-digit numbers $\overline{ab}$, $\overline{ba}$ is a prime. **C. 1500.** On a line segment AB, the points X and Y are marked, and the squares $AXPQ$, $XBRS$, $BYWV$ and $YAUT$ are drawn, with their vertices labelled in counterclockwise order. The centres of the squares are denoted by K, L, M and N, respectively. Prove that the line segments KM and LN are perpendicular and equal in length. (*German competition problem*) **C. 1501.** Find the longest arithmetic sequence of distinct prime numbers less than 200. **Exercises upwards of grade 11: C. 1502.** In each *figure,* there are six circles of equal radius drawn in a unit square. In which arrangement do the circles have a larger radius? (*German competition problem*) **C. 1503.** In a triangle, the squares of the sides a, b, c, in this order, form an arithmetic sequence. Show that the measure of the angle opposite to side b is at most 60°.

New exercises – competition B (see page 418): **B. 4974.** At least how many numbers should be selected out of $1, 2, \ldots, 10$ so that we can be certain that every such selection will contain a set of numbers whose sum is divisible by 11? (*3 points*) (Proposed by *S. Róka,* Nyíregyháza) **B. 4975.** Given a point P and four pairwise different lines $e \parallel f$ and $g \parallel h$, construct a line through P that intersects the lines e, f, g, h, respectively at points E, F, G, H such that $EF = GH$. (*3 points*) **B. 4976.** Let $A = \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$. First and Second take turns in selecting a number (not selected before) out of the elements of set A. The player first collecting three numbers that add up to zero wins the game. Is there a player who has a winning strategy? (*4 points*) (Proposed by *Á. Bán-Szabó,* Budapest) **B. 4977.** Prove that the orthocentre of the triangle formed by the points of tangency of the incircle on the sides of a right-angled triangle lies on the altitude drawn to the hypotenuse. (*4 points*) (*Kvant*) **B. 4978.** Let $n \geqslant 3$ be an integer and let α denote an arbitrary real number. Prove that $\sum_{k=0}^{n-1} \cos^2\left(\alpha + \frac{2k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2}$. (*5 points*) **B. 4979.** In an acute angled triangle ABC, D and E are interior points of the sides AB and AC, respectively. The line segments BE and CD meet at F. Prove that if $BC^2 = BD \cdot BA + CE \cdot CA$ then the quadrilateral $ADFE$ is cyclic. (*5 points*) (Proposed by *S. Róka,* Nyíregyháza) **B. 4980.** Let $n>3$ be a positive integer, and let $a_1,a_2,\dots,a_n$ be positive real numbers. Prove that $1<\frac{a_1}{a_n+a_1+a_2}+\frac{a_2}{a_1+a_2+a_3}+\dots+\frac{a_n}{a_{n-1}+a_n+a_1}<\left[\frac{n}{2}\right]$ where the left-hand side of the inequality cannot be replaced by a larger number, and the right-hand side cannot be replaced by a smaller number. ($[x]$ denotes the greatest integer not greater than the number x.) (*6 points*) **B. 4981.** The area of the orthogonal projection of a unit cube onto the plane xy is A, and the length of its orthogonal projection onto the z-axis is a. Prove that $A=a$. (*6 points*) (Proposed by *P. Erben,* Budapest)

New problems – competition A (see page 420): **A. 734.** Let $G=(V,E)$ be a tree graph with n vertices, and let P be a set of n points in the plane with no three points collinear. Is it true that for any choice of the graph G and set P, we can embed G in P, i.e., we can find a bijection $f:V\to P$ such that when we draw the line segment $\big[f(x),f(y)\big]$ for all $(x,y)\in E$, no two such segments intersect each other? (Proposed by *Benedek Váli,* Szeged) **A. 735.** Does there exist an infinite sequence $a_1,a_2,\dots$ of real numbers which is bounded, not periodic, and satisfies the recursion $a_{n+1}=a_{n-1}a_n+1$? **A. 736.** Circle ω lies in the interior of circle Ω, on which a point X moves. The tangents from X to ω intersect Ω for the second time at points $A\neq X$ and $B\neq X$. Prove that the lines AB are either all tangent to a fixed circle, or they all pass through a point.

Problems in Physics

(see page 442)

M. 380. Measure the rotational inertia about the symmetry axis of a hard boiled egg.

G. 645. In a NASA' vacuum chamber it was filmed that both a hammer and a feather fall towards the Earth at the same acceleration of $g=9.81$ m/s^2, and if they are released at the same instant then they hit the ground at the same time. What will the acceleration of the feather and the hammer be if the film is played at twice the speed of the recording? **G. 646.** In a chemistry laboratory chemicals are stored in alike bottles. One is full of glycerine, and the other is full of ether. The mass of the bottle filled with glycerine is 2290 grams, and that of the other bottle with ether in it has a mass of 1471 grams. What is the mass of an empty bottle? **G. 647.** In two – seemingly alike – electric kettles the heating wire is bent into the shape of a regular hexagon. In one of the kettles the heating element was connected as shown in *figure a*), whilst in the other the heating element was connected as shown in *figure b*). In which kettle will the water start to boil sooner? **G. 648.** A small bug starts crawling from the vertex P of a wooden cube of edges 10 cm. At least how long does it take for the bug to reach the furthest vertex Q of the cube, if the speed of the bug is 1 cm/s? In how many different paths can the bug move in order to reach Q in the shortest time?

P. 5056. A spring with negligibly small mass and of spring constant 40 N/m is standing on the tabletop in a vertical position, and on its top there is a sheet, which also has negligible mass. A 0.2 kg small object is dropped to the sheet from a height of 0.4 m, measured from the level of the sheet. For how long will the small object be on the sheet if it does not stick to it? **P. 5057.** A small object of mass $m=0.5$ kg and another of mass $3m$ are placed to an inclined plane of angle of elevation of $\alpha=30°$. The two small objects are attached with a negligible-mass rigid rod of length $d=50$ cm. The top part of the slope is frictionless, whilst on the bottom part of the slope the coefficient of friction is $\mu=0.2$. Initially the object of mass m was at a distance of $L=40$ cm from the boundary of that region where there is friction, and at a distance of $s=120$ cm from the bottom of the plane. The system of the two (point-like) objects is released. *a*) Give the force exerted in the rod as a function of the distance covered. *b*) How long does it take for the object of mass m to reach the bottom of the inclined plane? **P. 5058.** A whimsical Alaskan constructor runs a strange adventure park. Inside a very tall iceberg he builds a helical bob sleigh track. The symmetry axis of the helical path is vertical, its diameter is d, and the lead of the path is h. The track starts at the top of the iceberg and at the bottom of the iceberg it ends after a short frictionless bend, in a horizontal, straight path of length s. The path is very long (for the passengers it seems "infinitely long"), the bobs have neither steering wheel nor brake in them, and they stop just at the end of the horizontal part of the track. (For the sake of simplicity consider the bob sleighs point-like objects.) *a*) What is the coefficient of kinetic friction between the metal body of the bob and the ice? *b*) What is the greatest speed of the bobs? *Data:* $d = 10$ m, $h = 1.5$ m, $s = 270$ m. **P. 5059.** How long does an object take to fall into the Sun from a distance of 50 AU from the Sun, if it starts without initial speed? How long does it take to cover half of the distance? **P. 5060.** Two alike glass balloons are connected with a thin, short tube, whose inner volume is negligibly small. The temperature of the air inside the balloons is 27 °C. By what percent does the pressure of the enclosed air in the balloons increase, if one of the balloons is heated to a temperature of 177 °C, whilst the other is kept at the temperature of 27 °C? **P. 5061.** The equation of the process through which a sample of ideal gas of constant mass taken is the following: $pV^n =$ constant. *a*) What is the value of n if the process is isothermal, isobaric or adiabatic? *b*) What can the value of n be in the case of air, if the gas releases heat during the process, and still heats up? **P. 5062.** From experimental results we know that the resistance of conductors depends on their temperature. For some alloys this temperature coefficient of resistance is negative, whilst for some others it is positive. Hence, by connecting pieces of wires of different alloys, one can create a wire whose resistance is independent of the temperature in a wide temperature range. In the table below, for two alloys manganin and constantan, the resistance values r of unit-length wires measured at 0 °C, and their temperature coefficient of resistance α are given.

	r [Ω/m]	α [1/°C]
constantan	6.3	$-5.0 \cdot 10^{-5}$
manganin	5.3	$+1.4 \cdot 10^{-5}$

What length of wires made from manganin and constantan should be connected in series in order to gain an equivalent resistance of 5.0 Ω which is independent of the temperature? **P. 5063.** The meters in the circuit shown in the *figure* are ideal and their readings are indicated. Find the resistance values of the R_1, R_2, R_3 and R_4 resistors. **P. 5064.** A copper ring of mass $m_2 = 0.05$ kg and of charge $Q = 8 \cdot 10^{-6}$ C is attached to the rim of an insulating disc of mass $m_1 = 0.2$ kg and of radius $R = 20$ cm. The disc can be rotated frictionlessly. There is a $M = 10$ kg scale weight hanging at the end of a thin thread, which is coiled around a pulley of radius $r = 5$ cm on axle of the disc. The scale weight is released at a certain moment without being pushed. Calculate the magnetic induction due to the rotation of the disc at the centre of the disc, $t = 3$ s after the release of the scale weight. (The phenomenon of self-induction is negligible.) **P. 5065.** A light ray entering into a spherical water drop emerges from the drop perpendicular to its original direction, after two internal reflections, as shown in the *figure.* What is the angle of incidence? (The refractive index of water is $n = \frac{4}{3}$.) **P. 5066.** In a transparent medium the optical refractive index is changing in the direction of the axis z of the coordinate system. Perpendicular to this, in the direction of the axis x a thin light ray travels, and entering into the medium it is deflected towards the positive region of the axis z along a parabolic path. The refractive index is n_0 at $z = 0$ and $\sqrt{2}n_0$ at $z = h$. How does the refractive index depend on z?