ket elküldhetik postán, vagy személyesen juttathatják el szerkesztőségünkbe. Szép, érdekes és nem közismert feladatokat bárki javasolhat kitűzésre. A javasolt feladatokat (megoldásokkal együtt) a szerkesztőség címére küldjék el. A diákok elfogadott javaslatait év végén beszámítjuk a különdíjért folyó versenybe.

Szeretnénk, ha a kitűzött kérdések nem zárulnának le véglegesen a beküldési határidővel, a közölt megoldással. Erre teremt lehetőséget az internetes KöMaL fórum. Bármely, a lapunkban megjelent feladathoz, cikkhez kapcsolódó megjegyzést, általánosítást szívesen látunk és alkalomadtán közöljük.

Végezetül mindenkinek eredményes tanévet és sikeres versenyzést kíván

a Szerkesztőség

Matematika feladatok megoldása

B. 4921. *Bizonyítsuk be, hogy ha n és k pozitív egészek, akkor $n+k$ egész szám közül mindig ki lehet választani legalább $(k+1)$-et úgy, hogy az összegük n-nel osztható legyen.*

(*5 pont*) Javasolta: *Gyenes Zoltán* (Budapest)

I. megoldás. Azt fogjuk bizonyítani, hogy ha k természetes szám és n pozitív egész szám, akkor igaz az állítás.

Alkalmazzunk k-ra vonatkozó teljes indukciót. Tegyük fel, hogy minden természetes számra igaz az állítás k-ig, be kell látnunk, hogy $k+1$-re is igaz.

Ha a számok $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n+k+1}$, akkor az indukciós feltevés alapján az $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n+k}$ számok közül kiválasztható $x \geqslant k+1$ darab, amelyeknek az összege osztható n-nel. Ha $x \geqslant k+2$, akkor az állítás igaz, ugyanezt a legalább $(k+1)+1$ darab számot ki tudjuk választani az $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n+k+1}$ számok közül is. Ha $x=k+1$, akkor vegyük ki a számhalmazból ezt a $k+1$ darab számot, az így megmaradó $b_1, b_2, \ldots, b_n$ számok közül, az indukciós feltevés miatt, szintén ki lehet választani legalább $0+1=1$ számot, úgy hogy az összegük n-nel osztható. Ezt a néhány számot és az előbb kivett $k+1$ számot összeadva szintén n-nel osztható lesz az összeg, ezért kiválasztható legalább $k+2$ darab szám.

A befejezéshez már csak azt kell igazolnunk, hogy $k=0$-ra is igaz az állítás, azaz n darab szám közül kiválasztható legalább 1 darab úgy, hogy az összegük osztható n-nel.

Ha a számok között van olyan, amelyik osztható n-nel, akkor vegyük ezt a számot.

Ha nincs közöttük n-nel osztható, akkor a számokat $a_1, a_2, \ldots, a_n$-nel jelölve tekintsük az alábbi összegek n-es maradékait:

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1, \\ S_2 &= a_1 + a_2, \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3, \\ &\vdots \\ S_n &= a_1 + a_2 + \ldots + a_n. \end{aligned}$$

Mivel mindegyik egész szám, és n-nel osztva az egész számok n-féle maradékot adhatnak, a skatulya elv miatt vagy van közöttük 0 maradékot adó, vagy van legalább két azonos maradékot adó összeg. Ha előfordul a 0 maradék, akkor találtunk néhány számot, amelyeknek az összege osztható n-nel. Ha pedig van legalább két azonos maradékú összeg, S_i és S_j $(i > j)$, akkor $S_i - S_j = a_{j+1} + a_{j+2} + \ldots + a_i$ osztható n-nel, ezért szintén találtunk közöttük olyan számokat, amelyeknek az összege osztható n-nel.

Beke Csongor (Budapest, Békásmegyeri Veres Péter Gimn., 10. évf.)
dolgozata alapján

II. megoldás. Felhasználjuk azt az ismert, és az előző megoldásban is bizonyított tényt, hogy n egész szám közül mindig kiválasztható néhány úgy, hogy az összegük osztható n-nel.

Ennek ismeretében eljárást adunk a megfelelő legalább $(k+1)$ darab egész szám megtalálására.

Válasszunk ki az $n+k$ darab egész közül n számot. Ebből az n darab egész számból azt a néhányat, amelynek összege osztható n-nel félretesszük. Ezután a megmaradó számok közül ismét kiválasztunk n darabot. Ezek közül is félretesszük azokat, amelyek összege osztható n-nel. Ezt az eljárást addig ismételjük, amíg csak lehetséges, vagyis amint az eljárás véget ér, legfeljebb $n-1$ számot nem raktunk félre. A félretett számok száma tehát legalább $(k+1)$ és olyan csoportokban tettük félre, hogy mindegyik csoport összege osztható n-nel, tehát az összesnek az összege is az n többszöröse. Ezzel az állítást igazoltuk.

Szabó Blanka (Debreceni Fazekas Mihály Gimn., 11. évf.)
dolgozata alapján

Összesen 74 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 62 tanuló, 4 pontot szerzett 2 versenyző, 3 pontos 1 dolgozat. 2 pontot kapott 5, 1 pontot 3, 0 pontot 1 tanuló.

B. 4925. *Igazoljuk, hogy ha az $a_1; a_2; \ldots; a_{2017}$ nemnegatív valós számok átlaga 1, akkor teljesül a következő egyenlőtlenség:*

$$\frac{a_1}{a_1^{2018} + a_2 + a_3 + \ldots + a_{2017}} + \frac{a_2}{a_2^{2018} + a_3 + a_3 + \ldots + a_{2017} + a_1} + \ldots + \\ + \frac{a_{2017}}{a_{2017}^{2018} + a_1 + a_2 + \ldots + a_{2016}} \leqslant 1.$$

(*4 pont*)

Megoldás. Mivel a számok átlaga 1, ezért az összegük 2017. A számok nemnegatívak, és van köztük pozitív is, ezért az egyenlőtlenség bal oldalán szereplő kifejezés értelmes, hiszen mindegyik nevezőben legalább egy pozitív összeadandó szerepel, és így valamennyi nevező pozitív.

Megmutatjuk, hogy az egyenlőtlenség bal oldalán szereplő összegben mind a 2017 összeadandó legfeljebb $\frac{1}{2017}$. Az összeg szimmetriája miatt elegendő igazolni, hogy

$$\frac{a_1}{a_1^{2018}+a_2+a_3+\ldots+a_{2017}} \leqslant \frac{1}{2017}.$$

Szorozva a pozitív nevezőkkel:

$$2017a_1 \leqslant a_1^{2018}+a_2+a_3+\ldots+a_{2017}.$$

Mindkét oldalhoz a_1-et adva, és felhasználva, hogy $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{2017}=2017$ adódik:

$$2018a_1 \leqslant a_1^{2018}+2017.$$

Osztva 2018-cal és a 2017-et szétbontva 2017 darab 1 összegére:

$$a_1 \leqslant \frac{a_1^{2018}+1+1+\ldots+1}{2018}.$$

Ez pedig a nemnegatív számok számtani és mértani közepére vonatkozó egyenlőtlenség miatt teljesül, hiszen az egyenlőtlenség bal oldalán az $a_1^{2018}, 1, 1, \ldots, 1$ számok (összesen 2018-tagú) mértani közepe, míg a jobb oldalon ugyanezen számok számtani közepe áll. Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $a_1=1$.

Ezzel igazoltuk, hogy a bizonyítandó egyenlőtlenség valamennyi törtje nem nagyobb, mint $\frac{1}{2017}$, és így a teljes összeg nem nagyobb, mint 1. Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha valamennyi a_i megegyezik 1-gyel.

Megjegyzés. A $2018a_1 \leqslant a_1^{2018}+2017$ egyenlőtlenséget változatos módon bizonyították a feladatbeküldők. Ezekből mutatunk be kettőt.

1. Az egyenlőtlenség ekvivalens a

$$2017(a_1-1) \leqslant a_1^{2018}-a_1 = a_1\big(a_1^{2017}-1\big) = a_1(a_1-1)\big(a_1^{2016}+a_1^{2015}+\ldots+a_1+1\big)$$

egyenlőtlenséggel. Itt, ha $a_1=1$, akkor nyilván az egyenlőség igaz, különben osszunk a nem nulla (a_1-1)-gyel.

Ha $a_1>1$ (nem változik az egyenlőtlenség iránya), akkor

$$2017 \leqslant a_1\big(a_1^{2016}+a_1^{2015}+\ldots+a_1+1\big)$$

nyilván teljesül, hiszen a jobb oldalon egy 1-nél nagyobb, és egy 2017-nél nagyobb szám szorzata áll (ugyanis a jobb oldali zárójelben álló 2017 tag közül 2016 nagyobb, mint 1, az utolsó pedig pontosan 1).

Ha viszont $a_1<1$ (a negatív (a_1-1)-gyel osztva megváltozik az egyenlőtlenség iránya), akkor pedig a

$$2017 \geqslant a_1\big(a_1^{2016}+a_1^{2015}+\ldots+a_1+1\big)$$

teljesül nyilván, mert ekkor a jobb oldalon egy 1-nél kisebb, és egy 2017-nél kisebb szám szorzata áll (hiszen most a jobb oldalon lévő zárójelben lévő 2017 tag közül 2016 kisebb, mint 1, az utolsó pedig pontosan 1).

2. Használjuk a következő, ún. Bernoulli-egyenlőtlenséget: Bármely valós $a \geqslant -1$ és $n \in \mathbb{N}$ számok esetén teljesül:

$$(1+a)^n \geqslant 1 + n \cdot a.$$

Az a_1-et $(1+a)$-nak (ekkor az a_i-k nemnegativitásából következik $a \geqslant -1$), valamint n-et 2018-nak választva kapjuk, hogy $a_1^{2018} \geqslant 1 + 2018(a_1 - 1) = 2018a_1 - 2017$, ami – 2017-et adva mindkét oldalhoz – éppen a bizonyítandó egyenlőtlenség.

Több dolgozat alapján

Összesen 72 dolgozat érkezett. 4 pontot kapott 61 versenyző, 3 pontos 2, 2 pontos 4, 1 pontos 4, 0 pontos további 1 tanuló dolgozata.

B. 4928. *Az égig érő fa törzse egy láb magasan kétfelé ágazik. A továbbiakban ágnak két elágazás közti részt tekintünk, amin nincs további elágazás. Az égig érő fa minden ága egyenes és egy lábbal magasabban végződik, mint a talajhoz közelebbi vége. Egy ág gyermekeinek tekintjük az ág magasabban lévő végéből kiinduló ágakat, amiket egyúttal egymás testvéreinek is nevezünk. Az égig érő fa minden ágának van legalább két gyermeke, és ha nem pont két gyermeke van, akkor van olyan testvére, akinek pontosan két gyereke van. A testvéreknek mindig különböző számú gyerekük van. Ha egy ágnak több mint két gyereke van, akkor van olyan testvére, akinek pontosan eggyel kevesebb gyereke van, mint neki. Hány ág indul ki az n láb magasan lévő elágazásokból?*

(*6 pont*) Javasolta: *Gáspár Merse Előd* (Budapest)

Megoldás. Írjuk rá minden ágra (és a törzsre), hogy hány gyermeke van. Legyen X egy ág (vagy a törzs), aminek x gyereke van. Legyen y az X gyermekeire írt számok maximuma. Legyen z az X gyermekein nem szereplő, y-nál kisebb pozitív egész számok maximuma. A z biztosan létezik, mert az 1 nem szerepelhet az ágakon. Ekkor a $z+1$ szerepel X valamelyik gyerekén. Ha $z > 1$, akkor $z+1 > 2$, ezért a z szerepel X valamelyik gyermekén. Ez ellentmondás, ezért $z = 1$. Így a $2, 3, \ldots, y$ mind szerepelnek X gyermekein. A testvéreknek különböző számú gyermeke van, ezért ezekből pontosan egy van. Így X gyermekeinek a száma $y-1$, tehát $y = x+1$. Tehát az X gyermekeire írt számok a $2, 3, \ldots, x+1$.

Vegyünk fel az ágak között egy irányított gráfot, ahol kétféle él van: az egyik fajta egy „függőleges" él, amely egy x feliratú ágtól az $x+1$ feliratú gyermekéhez vezet, a másik fajta egy „vízszintes" él, amely egy x feliratú ágtól az $x-1$ feliratú testvéréhez vezet, ha $x > 2$. Látható, hogy a gráfban minden ághoz pontosan egyféleképpen lehet eljutni a fa törzsétől, mert egy ágtól az összes gyermekéhez pontosan egyféleképpen lehet eljutni. Az összes ágtól pontosan egy függőleges és pontosan egy vízszintes él indul, kivéve a 2-es ágakat, ahonnan csak függőleges él indul.

Az n láb magasan induló ágak száma megegyezik az $n+1$ láb magasan induló 2-es ágak számával, mert minden ágnak pontosan egy 2-es gyermeke van. Válasszunk ki egy $n+1$ láb magasan induló 2-es X ágat. X-hez létezik pontosan egy útvonal a gráfban, ami a fa törzsétől indul. Nevezzük a $+$ és $-$ jelekből álló véges sorozatokat $(+/-)$ sorozatnak. Az útvonalat leírhatjuk egy $(+/-)$ sorozattal, ahol a $+$ függőleges élet jelent, a $-$ pedig vízszintes élet. Az így kapott $(+/-)$-sorozat egyértelműen meghatározza X-et. Látható, hogy egy $+$ esetén eggyel nő a jelenlegi ágra írt szám, és a $-$ esetén eggyel csökken, ahogy a sorozat alapján haladunk a gráfban. Az útvonal első és utolsó ágán is a 2 szerepel, ezért a $+$-ok és $-$-ok száma megegyezik. Az X-hez tartozó $(+/-)$ sorozat $n+1$ darab $+$ jelet tartalmaz, mert a függőleges élekkel egy lábbal nő a magasság, a vízszintes éleknél nem változik. Így a $-$-ok száma is $n+1$. Nevezzünk egy $n+1$ darab $+$ jelet és $n+1$ darab $-$ jelet tartalmazó $(+/-)$ sorozatot *jónak,* ha az első i tagja között legalább annyi $+$ van, mint $-$ mindegyik i-re. Az útvonal összes ágán a szám legalább 2, és az első ágon a szám 2, ebből könnyen látható, hogy az X-hez tartozó $(+/-)$ sorozat jó. Az is látható, hogy ha a $(+/-)$ sorozat *jó,* akkor nem fordulhat elő, hogy egy 2-es ágról egy vízszintes élen próbálunk továbblépni. Így a *jó* $(+/-)$ sorozatok száma megegyezik az n láb magasan induló ágak számával.

A *jó* sorozatokat úgy számolhatjuk meg, hogy az összes $n+1$ darab $+$-t és $n+1$ darab $-$-t tartalmazó $(+/-)$ sorozat számából levonjuk a nem jó sorozatok számát. Az összes ilyen sorozat száma $\binom{2n+2}{n+1}$. Vegyünk egy olyan sorozatot, ami nem jó. Van olyan minimális i, amelyre teljesül, hogy az első i tag között több $-$ van, mint $+$. A minimalitás miatt az első $i-1$ között között legfeljebb annyi $-$ van, mint $+$. Ez csak úgy lehet, ha az első $i-1$ tag között ugyanannyi $+$ van, mint $-$, és az i-edik tag $-$. Változtassuk meg az i-edik tag utáni összes tagot, ezt nevezzük *módosított* sorozatnak. Ha az i-edik tagot is megváltotatnánk, akkor nyilván nem változna meg a $+$-ok és $-$-ok száma (mert egyenlőek). Így a módosított sorozatban n darab $+$ van, és $n+2$ darab $-$. Látható, hogy egy n darab $+$-t és $n+2$ darab $-$-t tartalmazó sorozat esetén is van olyan i, amire az első i elem között több $-$ van, mint $+$ (mert az egész sorozatban is több van). Vegyük észre, hogy ha a minimális i-edik tag után megváltoztatjuk az összes tagot, akkor visszakapjuk az eredeti sorozatot. Így a nem jó sorozatok száma megegyezik az n darab $+$-t és $n+2$ darab $-$-t tartalmazó sorozatok számával, ami $\binom{2n+2}{n}$.

Tehát az ágak száma: $\binom{2n+2}{n+1}-\binom{2n+2}{n}$, ami az $(n+1)$-edik Catalan-szám.

Gáspár Attila (Miskolc, Földes Ferenc Gimn., 12. évf.)
dolgozata alapján

Megjegyzés. A helyes megoldást adó versenyzők többsége valamilyen ismert problémára visszavezetve eljutott oda, hogy az n láb magasan kiinduló ágak száma az $(n+1)$-edik Catalan-szám. Ezután ennek a kiszámítását már nem részletezte.

Összesen 57 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott 24 versenyző: Biczó Benedek, Busa Máté, Daróczi Sándor, Deák Bence, Dobák Dániel, Döbröntei Dávid Bence, Füredi Erik Benjámin, Gáspár Attila, Győrffy Ádám György, Győrffy Ágoston, Győrffy Johanna, Hegedűs Dániel, Hervay Bence, Janzer Orsolya Lili, Kerekes Anna, Molnár Bálint, Nagy Nándor, Noszály Áron, Póta Balázs, Schifferer András, Soós Máté, Tóth Balázs, Weisz Máté, Zsigri Bálint. 5 pontos 3, 4 pontos 2, 3 pontos 7 tanuló dolgozata. 2 pontot szerzett 5, 1 pontot 14 tanuló. 0 pontos 2 dolgozat.