c) $a_n b_{n-1} + b_n a_{n-1} + 1 = a_n a_{n-1} + b_n b_{n-1}$;

d) $a_n^2 + a_{n-1}^2 = 6a_n a_{n-1} + 2a_n + 2a_{n-1} + 3$;

e) $2(a_{n+1} - a_n) = c_{n+1} + c_n$.

21. Illeszkedik-e végtelen sok rácspont az

$$\frac{x^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} - \frac{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1$$

egyenlettel megadott hiperbolára?

22. Használjuk a cikk 3. feladatának jelöléseit. Adjuk meg n függvényeként a $K_n Q_n K_{n+1} S_{n+1}$ deltoid kerületét. Lehet-e valamelyik deltoid minden oldalhosszának mérőszáma egész szám?

Hivatkozások

[1] https://proofwiki.org/wiki/Generator_for_Almost_Isosceles_Pythagorean_Triangle

[2] http://www.fq.math.ca/Scanned/36-4/nyblom.pdf

[3] http://mathworld.wolfram.com/SquareTriangularNumber.html

[4] https://en.wikipedia.org/wiki/Square_triangular_number

[5] https://www.hindawi.com/journals/ijmms/2016/5189057/

Koncz Levente, Számadó László

Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

I. rész

1. Egy szabályos n-szög alapú egyenes hasáb lapátlóinak száma, testátlóinak száma és a 24 valamilyen sorrendben egy számtani sorozat egymást követő tagjait alkotják. Határozzuk meg n lehetséges értékeit. (*11 pont*)

2. Tekintsük a következő állításokat.

A: Két irracionális szám összege mindig irracionális.

B: Van olyan számsorozat, amely korlátos, nem monoton és nem konvergens.

C: Ha egy ötpontú egyszerű gráf minden csúcsa legalább harmadfokú, akkor biztosan tartalmaz kört.

a) Döntsük el, hogy igazak vagy hamisak az állítások. Válaszainkat indokoljuk. (*8 pont*)

b) Fogalmazzuk meg a *C* állítás megfordítását. Döntsük el, hogy igaz vagy hamis az állítás megfordítása. Válaszunkat indokoljuk. (*4 pont*)

3. Egy négyszög két szomszédos oldalának hossza 3, illetve 4 cm, közbezárt szögük 60°. A négyszög húr- és érintőnégyszög is egyben.

a) Mekkora a négyszög másik két oldala? (*7 pont*)

b) Számítsuk ki a négyszög beírt és köré írt körének sugarát. (*7 pont*)

(Válaszainkat cm-ben, két tizedesjegyre kerekítve adjuk meg.)

4. *a*) Mutassuk meg, hogy az $f(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}$ függvény páratlan és korlátos függvény. (*7 pont*)

b) Egy gömb alakú higanycsepp n egyforma, kisebb cseppre esett szét. Ezáltal a kis cseppek összfelszíne éppen négyszerese lett az eredeti higanycsepp felszínének. Határozzuk meg n értékét. (*7 pont*)

II. rész

5. *a*) Cinkelt érmét szeretnénk készíteni. A „Trükkös hatos” nevű játékban akkor nyerünk, ha az érme hatszori feldobásakor pontosan négyszer lesz fej és kétszer írás. Milyen módon cinkeljük az érmét (vagyis mekkora legyen a fej dobásának a valószínűsége), ha a lehető legnagyobb valószínűséggel szeretnénk nyerni? (*8 pont*)

b) Legfeljebb hány különböző pozitív prímszám adható meg úgy, hogy közülük bármely három összege is prímszám legyen?

Adjunk példát a maximális elemszámra és mutassuk meg, hogy több prímszámot nem tudunk megadni a kívánt módon. (*8 pont*)

6. *a*) Egy családban három gyerek van: Anna, Béla és Csaba. Minden nap kisorsolják, hogy ki vigye le sétáltatni kutyájukat, Buksit (egy kalapba teszik egy-egy cédulára írva a nevüket, majd húznak egy cédulát).

Hány olyan sorsolás van, amelynél egy hetes időszakot véve, minden gyerek sorra kerül a kutyasétáltatás során? (*9 pont*)

b) Igazoljuk (teljes indukcióval vagy más módszerrel), hogy ha $n \geqslant 9$ pozitív egész szám, akkor $2^n > 32n$. (*7 pont*)

7. *a*) Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet: (*8 pont*)

$$\operatorname{tg} x \cdot \sin 4x = \frac{1}{2}.$$

b) Adjuk meg azokat a t pozitív egész számokat, amelyekre a fenti egyenletnek a $[2018; t]$ intervallumon pontosan 2018 darab valós megoldása van.

Számításaink során a π minél pontosabb értékével számoljunk. (*8 pont*)

8. Húzzunk érintőket az $y=x^2$ parabola $A(-1;1)$ és $B(2;4)$ pontjaiba.

a) Írjuk fel az érintők egyenletét. (*3 pont*)

b) Mutassuk meg, hogy az érintők a $C\left(\frac{1}{2};-2\right)$ pontban metszik egymást. (*2 pont*)

A parabola két részre osztja az ABC háromszöget, egy konvexre és egy konkávra.

c) Számítsuk ki az ABC háromszög területét. (*5 pont*)

d) Határozzuk meg a konvex és a konkáv alakzat területét. (*6 pont*)

9. A Bástya SE sakkcsapata nemrég indult először a nemzeti csapatbajnokságban. Egy találkozón 2 csapat küzd meg egymással, mindkét csapat 12 játékossal játszik. Ennek a 12 játékosnak van egy előre rögzített erősségi sorrendje és az egyik csapat legerősebbje játszik a másik csapat legerősebbjével, a második legerősebbek is egymással, stb. Így egy találkozón 12 partira kerül sor. Egy partinak 3 kimenetele lehet: győzelem esetén 1, vereség esetén 0, míg döntetlen esetén fél pontot kap a játékos. Tegyük fel, hogy egy-egy parti kimenetele nem függ a játékosok sakktudásától, mindegyik kimenetel egyformán valószínű. A csapat által elért pontszámot úgy kapjuk meg, hogy összeadjuk az egyes csapaton belüli játékosok által elért pontokat.

a) Mutassuk meg, hogy csak úgy lehet döntetlen (azaz amikor 6 pontot ér el mindkét csapat) egy találkozó, ha egy csapaton belül ugyanannyiszor nyernek és veszítenek. (*2 pont*)

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy – a fenti feltételek mellett – a Bástya SE döntetlent ér el első mérkőzésén? (*7 pont*)

c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy az első három találkozójuk döntetlen lesz és a negyedik meccset megnyerik? Az egyes találkozókon elért eredményeket egymástól függetleneknek tekinthetjük.

Válaszainkat négy tizedesjegyre kerekítve adjuk meg. (*2 pont*)

A csapat legjobb pontszerzője 9 partit játszott az idény folyamán. Az általa szerzett pontok átlaga $\frac{2}{3}$, míg a szórásnégyzete $\frac{1}{6}$.

d) Határozzuk meg, hogy a játékos hány partiban nyert, vesztett illetve ért el döntetlent. (*5 pont*)

Fridrik Richárd (Szeged)

Tájékoztató a folyóirat előfizetéséről

A Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok megrendelhető a kiadónál, a MATFUND Alapítványnál a szerkesztőség címén; valamint a következő címen: `http://www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.h.shtml`. Előfizetési díj a 2018–2019-es tanévre (2018 szeptemberétől 2019 májusáig) 8100 Ft. Azonos címre küldendő, 6-nál nagyobb példányszámú megrendelés esetén a csoportos előfizetési díj a korábbi évekhez képest változott, a részletes árak a fenti oldalon olvashatók. Csekket és számlát a szeptemberi számmal együtt küldünk, a fizetés csak ezután történhet.

Lapunk előfizetői az előfizetett példány címlapján látható előfizetői azonosító segítségével a kitűzött feladatainkhoz már a lap nyomtatott változatának megjelenésével egyidejűleg hozzáférhetnek.