KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK
INFORMATIKA ROVATTAL BŐVÍTVE
ALAPÍTOTTA: **ARANY DÁNIEL** 1894-ben

68. évfolyam 6. szám — Budapest, 2018. szeptember

Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta 64 oldalon. ÁRA: 950 Ft

TARTALOMJEGYZÉK

A szerkesztőség címe: 1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1.A, II. emelet 2.76.;
Telefon: 372-2500/6541; 372-2850
A lap megrendelhető az Interneten:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.h.shtml`.
Előfizetési díj egy évre: 8100 Ft

E-mail: `szerk@komal.hu`
Internet: `http://www.komal.hu`
This journal can be ordered from the Editorial office:
Pázmány Péter sétány 1.A, II. emelet 2.76., 1117–Budapest, Hungary
telephone: +36 (1) 372-2850
or on the Postal address
H–1518 Budapest 112, P.O.B. 32, Hungary,
or on the Internet:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.e.shtml`.

Beszámoló az 59. Nemzetközi Matematikai Diákolimpiáról

Az idei Nemzetközi Matematikai Diákolimpiát július 3–14. között Kolozsvárott rendezték meg. A versenyen 107 ország 594 diákja vett részt. (Eredetileg 597 volt a résztvevők száma, de az üzbég csapat 3 diákját szabálytalan versenyzés miatt kizárták.)

A legtöbb ország a megengedett maximális létszámú, 6 fős csapattal szerepelt; az alábbi listában az országnév után zárójelben tüntettem fel az adott ország versenyzőinek számát, ha ez hatnál kevesebb volt.

A résztvevő országok: *Albánia, Algéria (4), Amerikai Egyesült Államok, Argentína, Ausztrália, Ausztria, Azerbajdzsán, Banglades, Belgium, Beloruszszia, Bolívia, Bosznia-Hercegovina, Botswana, Brazília, Bulgária, Chile (4), Ciprus (5), Costa Rica (5), Csehország, Dánia, Dél-Afrika, Dél-Korea, Ecuador, Egyiptom (4), Elefántcsontpart, Észtország, Finnország, Franciaország, Fülöp-Szigetek, Ghána (5), Görögország, Grúzia, Guatemala (3), Hollandia, Honduras (3), Hong Kong, Horvátország, India, Indonézia, Irak, Irán, Írország, Izland, Izrael, Japán, Kambodzsa, Kanada, Kazahsztán, Kína, Kirgizisztán, Kolumbia, Koszovo, Lengyelország, Lettország, Litvánia, Luxemburg (2), Macedónia, Magyarország, Makaó, Malajzia, Marokkó, Mexikó, Moldova, Mongólia, Montenegro (4), Myanmar, Nagy-Britannia, Németország, Nepál, Nigéria (3), Norvégia, Olaszország, Oroszország, Örményország, Pakisztán, Panama (4), Paraguay, Peru, Portugália, Puerto Rico, Románia, El Salvador (2), Spanyolország, Sri Lanka, Svájc, Svédország, Szaúd-Arábia, Szerbia, Szingapúr, Szíria, Szlovákia, Szlovénia, Tadzsikisztán, Tajvan, Tanzánia (3), Thaiföld, Törökország, Trinidad és Tobago (3), Tunézia, Türkmenisztán, Uganda (4), Új-Zéland, Ukrajna, Uruguay, Üzbegisztán* $(6-3=3)$*, Venezuela (1), Vietnam.*

A versenyen szokás szerint mindkét napon négy és fél óra alatt 3–3 feladatot kellett megoldani. (A feladatokat alább közöljük.) Mindegyik feladat helyes megoldásáért 7 pont járt, így egy versenyző maximális teljesítménnyel 42 pontot szerezhetett. A verseny befejezése után megállapított ponthatárok szerint aranyérmet a 31–42 pontot elért, ezüstérmet a 25–30 pontos, míg bronzérmet a 16–24 ponttal rendelkező tanulók szereztek.

A magyar csapatból

Bukva Balázs (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. o.t.) és
Gáspár Attila (Miskolc, Földes Ferenc Gimn., 12. o.t.) egyaránt 29 ponttal,
Imolay András (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. o.t.) 28 ponttal,
Janzer Orsolya Lili (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. o.t.) pedig 26 ponttal *ezüstérmet* szerzett.

Egri Máté (Szombathely, Bolyai János Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. o.t.) 24 ponttal és

Matolcsi Dávid (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. o.t.) 21 ponttal *bronzérmet* nyert.

A magyar csapat vezetője *Pelikán József* (ELTE TTK, Algebra és Számelmélet Tanszék), helyettes vezetője *Dobos Sándor* (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.) volt.*Kós Géza* (MTA SZTAKI, ELTE TTK) a feladatkiválasztó bizottság tagjaként és koordinátorként működött közre az olimpián.

Az országok (nem-hivatalos) pontversenyében Magyarország a résztvevő 107 ország között a 15. helyen végzett. A csapatverseny élmezőnyének sorrendje így alakult (megszerzett pontszámaikkal):

1. USA 212, 2. Oroszország 201, 3. Kína 199, 4. Ukrajna 186, 5. Thaiföld 183, 6. Tajvan 179, 7. Dél-Korea 177, 8. Szingapúr 175, 9. Lengyelország 174, 10. Indonézia 171, 11. Ausztrália 169, 12. Nagy-Britannia 161, 13–14. Japán és Szerbia 158, **15. Magyarország 157,** 16. Kanada 156, 17. Olaszország 154, 18. Kazahsztán 151, 19. Irán 150, 20. Vietnam 148, 21. Bulgária 146, 22. Horvátország 145, 23. Szlovákia 140, 24–25. Svédország és Törökország 138, 26. Izrael 136, 27. Grúzia 133, 28–30. Brazília, India és Mongólia 132, 31. Németország 131, 32. Örményország 130, 33–34. Franciaország és Románia 129, 35. Peru 125, 36–37. Hollandia és Mexikó 123, 38. Fülöp-Szigetek 121, 39–40. Argentína és Csehország 115 ponttal.

Szeretnék köszönetet mondani a versenyzők tanárainak. Az alábbi felsorolásban minden tanár neve után monogramjukkal jelöltem azokat a diákokat, akik a tanítványaik:

Dobos Sándor (BB, EM, GA, IA, JL, MD), *Gulyás Tibor* (GA), *Gyenes Zoltán* (BB, IA, JL), *Győry Ákos* (GA), *Hujter Bálint* (BB, IA, JL), *Janzer Barnabás* (JL), *Juhász Péter* (MD), *Kiss Gergely* (MD), *Kiss Géza* (MD), *Nagy Zoltán Lóránt* (JL), *Németh Gyula* (EM), *Pósa Lajos* (GA, IA), *Surányi László* (BB), *Szűcs Gábor* (GA).

Ugyancsak szeretnék köszönetet mondani Dobos Sándornak, mint a központi olimpiai előkészítő szakkör vezetőjének, továbbá mindazoknak, akik a felkészítésben közreműködtek.

Az olimpiai csapat kijelölése idén is válogatóversenyek formájában történt. A válogatóverseny utolsó, kétnapos részét Kecskeméten rendeztük. Szeretnék köszönetet mondani a kecskeméti Mategye Alapítványnak azért, hogy a versenyt nagyvonalúan vendégül látták.

A legutóbbi olimpiákon visszatérő probléma volt, hogy a nehéznek szánt feladatok túl nehezek voltak. Tavaly például a legnehezebb 3. és 6. feladatot a 615 résztvevőből csak 2(!), illetve 14 oldotta meg. Idén valamit javult a helyzet: a 3. és 6. feladatra 11, illetve 18 teljes megoldás érkezett az 594 versenyzőtől. A könnyű feladatok sem voltak olyan könnyűek, mint tavaly: tavaly az 1. és 4. feladatra 446, illetve 394 teljes megoldás érkezett, idén ezek a számok 381, illetve 271 voltak. Két versenyzőnek (egyik az USA-ból, a másik Nagy-Britanniából) sikerült megszereznie a maximális 42 pontot – tavaly a legmagasabb pontszám 35 volt.

Voltak szervezett kirándulások (elsősorban a diákoknak); közülük a legemlékezetesebb a tordai sóbányák meglátogatása volt.

A következő matematikai diákolimpiát Anglia rendezi Bath városában, 2019. július 11–22. között.

Pelikán József

Az 59. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia feladatai*

Első nap

1. feladat. Legyen Γ a hegyesszögű ABC háromszög körülírt köre. D és E legyenek az AB, illetve AC szakaszok olyan pontjai, amelyekre $AD = AE$. A BD és CE szakaszok felezőmerőlegesei a Γ kör rövidebb AB, illetve AC íveit az F, illetve G pontokban metszik. Bizonyítsuk be, hogy a DE és FG egyenesek párhuzamosak vagy egybeesnek.

2. feladat. Határozzuk meg azokat az $n \geqslant 3$ egész számokat, amelyekre léteznek $a_1, a_2, \ldots, a_{n+2}$ valós számok, amelyekre $a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2$ és

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$$

teljesül minden $i = 1, 2, \ldots, n$ esetén.

3. feladat. Nevezzük *anti-Pascal háromszögnek* számoknak egy olyan, szabályos háromszög alakú elrendezését, amelyben az utolsó sorbeli számok kivételével minden szám a közvetlenül alatta lévő két szám különbségének az abszolút értékével egyenlő.

Alább látható egy példa egy olyan anti-Pascal háromszögre, amelynek 4 sora van, és 1-től 10-ig minden egész szám előfordul benne.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 4 & & & \\ & & 2 & & 6 & & \\ & 5 & & 7 & & 1 & \\ 8 & & 3 & & 10 & & 9 \end{array}$$

Létezik-e olyan anti-Pascal háromszög, aminek 2018 sora van, és 1-től $(1 + 2 + \ldots + 2018)$-ig minden egész szám előfordul benne?

Második nap

4. feladat. *Helynek* nevezzük a sík minden olyan (x, y) pontját, amelyre x és y olyan pozitív egészek, melyek mindegyike kisebb vagy egyenlő, mint 20.

Kezdetben a 400 hely mindegyike szabad. Anna és Balázs felváltva zsetonokat raknak a helyekre, Anna kezd. Anna minden lépésekor egy új piros zsetont helyez egy még szabad helyre olymódon, hogy semelyik két piros zseton helyének távolsága

*Az olimpia honlapja: `http://www.imo2018.org/`.

se legyen $\sqrt{5}$-tel egyenlő. Balázs minden lépésekor egy új kék zsetont helyez egy még szabad helyre. (Egy kék zseton által elfoglalt hely távolsága bármely másik foglalt helytől tetszőleges lehet.) A játék akkor ér véget, ha valamelyik játékos nem tud lépni.

Határozzuk meg a legnagyobb K értéket, amelyre igaz az, hogy Anna biztosan el tud helyezni K darab piros zsetont, bárhogyan is játszik Balázs.

5. feladat. Legyen $a_1, a_2, \ldots$ pozitív egészeknek egy végtelen sorozata. Tegyük fel, hogy van egy olyan $N > 1$ egész, hogy minden $n \geqslant N$-re

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

egész szám. Bizonyítsuk be, hogy van egy olyan M pozitív egész, hogy $a_m = a_{m+1}$ minden $m \geqslant M$-re.

6. feladat. Az $ABCD$ konvex négyszögre teljesül $AB \cdot CD = BC \cdot DA$. Az X pont az $ABCD$ négyszög olyan belső pontja, amelyre teljesül

$$XAB\sphericalangle = XCD\sphericalangle \quad \text{és} \quad XBC\sphericalangle = XDA\sphericalangle.$$

Bizonyítsuk be, hogy $BXA\sphericalangle + DXC\sphericalangle = 180°$.

Olimpiai válogatóversenyek (IMO, MEMO)

A 2019. évi IMO és MEMO versenyekre a csapatok kiválasztása az ideihez hasonlóan válogatóversenyeken történik. A lebonyolítás menete a KöMaL 2016. szeptemberi számában leírtakhoz hasonló, az idei kiírás részletei elérhetők Dobos Sándor honlapján:

`dobos.felhasznalo.fazekas.hu/olimpia/csapat.htm`.

Budapest, 2018. augusztus **Pelikán József, Dobos Sándor**

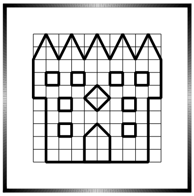
Olimpiai előkészítő szakkörök a 2018/2019. tanévben

A Bolyai János Matematikai Társulat által szervezett Olimpiai felkészülés az alábbiak szerint történik:

Budapest: az első alkalom szeptember 14-én lesz, utána kéthetente pénteken, a Budapesti Fazekas Mihály Általános Iskola és Gimnáziumban (Budapest, Horváth M. tér 8.), 14.30-tól, szakkörvezető: *Dobos Sándor.*

Csongrád megye: az első szeptember 20-án lesz, utána kéthetente csütörtökön, a Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézetében (Aradi vértanúk tere 1., I. emelet, Riesz terem), 15.00 és 17.00 között, szakkörvezető: *Kosztolányi József.*

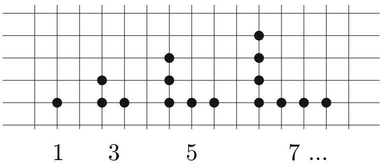
Erdős Pál Matematikai Tehetséggondozó Iskola veszprémi és szolnoki foglalkozásai 11–12. évfolyamosok számára. Az egyes foglalkozásokra a jelentkezést a diákok egyénileg végezhetik el az Erdős Iskola honlapján: `https://erdosiskola.mik.uni-pannon.hu/index.php/foglalkozasok/jelentkezes-foglalkozasra.html`. Az idei első foglalkozások Szolnokon és Veszprémben is szeptember 28. és 30. között lesznek.



Barangolás kockás papíron

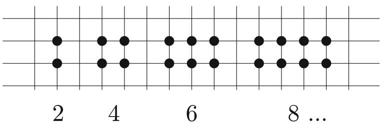
Szeretjük, ha egy számsorozat általános tagja megadható képlettel. Például a páratlan számok, a páros számok, a háromszögszámok, a négyzetszámok előállítására gyorsan tudunk képletet adni. A számok megjelenítése egy-egy megfelelő figurával sokat segíthet a képlet előállításában. A figurális számokat régen egyforma kavicsokkal ábrázolták, ma kirakhatjuk őket például színes kupakokból.

A „kockás papír” négyzetrácsán is szemléltethetők ezek a számok.



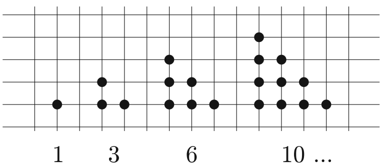
Az n-edik páratlan szám:

$$a_n = n + (n-1) = 2n - 1.$$



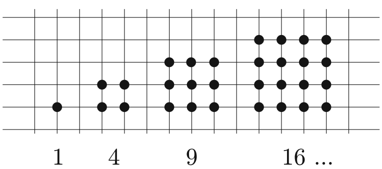
Az n-edik páros szám:

$$a_n = 2n.$$



Az n-edik háromszögszám:

$$a_n = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$



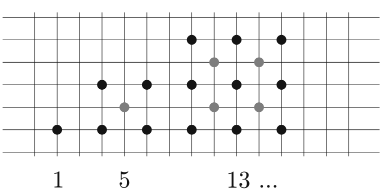
Az n-edik négyzetszám:

$$a_n = n^2.$$

Milyen képlettel tudnánk megadni a következő számsorozat n-edik tagját?

$$1, 5, 13, 25, 41, 61, 85, 113, 145, 181, 221, 265, \ldots. \tag{1}$$

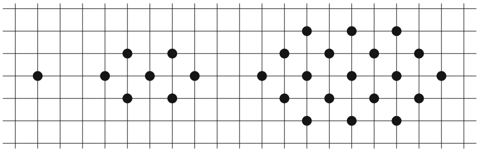
Ha két szomszédos négyzetszám figuráját egymásra illesztjük, azonnal láthatóvá válik a képlet.



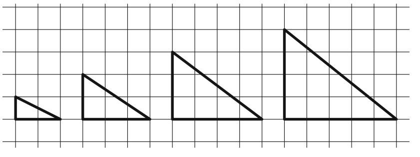
Vagyis a sorozat n-edik tagja:

$$a_n = n^2 + (n-1)^2. \tag{2}$$

Az (1) sorozat számait látva érthetetlen lett volna, ha négyzetszámoknak nevezzük ezeket. Az ábrákat szemlélve viszont jogosnak érezhetnénk, de ez az elnevezés már foglalt. Mivel a négyzetszámok megszokott ábráján minden kis négyzetnek a közepét is bejelöltük, ezért ezeket a számokat középpontos négyzetszámoknak nevezi a szakirodalom. A középpontos négyzetszámok szemléltetésénél észrevehető az is, hogy egy pont van középen, és azt négyzet alakú pontrétegek veszik körül. Adott réteg minden oldala eggyel több pontot tartalmaz, mint a korábbi réteg. Ezt felhasználva bevezethetjük a középpontos sokszögszámok fogalmát is. Az *ábrán* példaként a középpontos hatszögszámok sorozatát szemléltetjük kockás papíron.



A (2) képlet eszünkbe juttathatja a Pitagorasz-tételt. Tekintsük azokat a derékszögű háromszögeket, amelyekben a két befogó hossza két egymást követő egész számmal adható meg:



Az így kapott n-edik derékszögű háromszög átfogójának hosszát az $n+1$. középpontos négyzetszám négyzetgyöke adja: $c_n = \sqrt{(n+1)^2 + n^2}$. Az ábrasorozat harmadik tagja a jól ismert 3, 4, 5 oldalhosszúságokkal megadott Pitagorasz-féle háromszög.

Van-e még a sorozatban Pitagorasz-féle háromszög? A kérdésre az $(n+1)^2 + n^2 = c^2$ másodfokú diofantoszi egyenlet megoldása adja a választ. Ezekkel a kérdésekkel tanórán is foglalkoztunk, de az ilyen típusú egyenletek megoldása nem szerepel a középiskolai tananyagban, ezért függvénytáblázat, számológép, illetve számítógép segítségével próbálták a diákjaink ilyen háromszögeket keresni.

A függvénytáblázatban a $c < 100$-hoz megtaláljuk a Pitagorasz-féle számhármasokat. Ezek között csak egy további megfelelő van: 20, 21, 29. Grafikus számológéppel további számhármasokat is kaptunk. A számológép táblázatának első oszlopában az n, a második oszlopában a $\sqrt{(n+1)^2 + n^2}$ értékeit írattuk ki. Így a $c < 1000$-hez találtunk még két megfelelő háromszöget: 119, 120, 169, illetve 696, 697, 985.

Óvatosan kell kezelnünk a számológép táblázatának számait. A számológép például a 288, 289, 408 számhármast is megadta, de ez nyilvánvalóan rossz, hiszen a $288^2 + 289^2$ utolsó számjegye 5, míg 408^2 utolsó számjegye 4. A táblázat számait két tizedesre kerekítve a gép 408-nak vette a $\sqrt{288^2 + 289^2} \approx 408{,}001$ -et.

Szondy Dániel számítógéppel a $c < 225\,058\,682$ feltétel mellett összesen 11 számhármast talált:

	a_n	b_n	c_n
1.	3	4	5
2.	20	21	29
3.	119	120	169
4.	696	697	985
5.	4 059	4 060	5 741
6.	23 660	23 661	33 461
7.	137 903	137 904	195 025
8.	803 760	803 761	1 136 689
9.	4 684 659	4 684 660	6 625 109
10.	27 304 196	27 304 197	38 613 965
11.	159 140 519	159 140 520	225 058 681

Ezeket egyszerű "favágó" módszerrel kereste, ezért kijelenthetjük, hogy eddig teljes a lista. Az ennél nagyobb számok keresése előtt egy érdekességet vett észre. Megfigyelte, hogy az első oszlopban a két egymás után következő szám hányadosa 5,83 körüli értéket vesz fel. Ezen érdekesség alapján elkészített egy új keresési algoritmust:

(3) *A legnagyobb ismert ilyen a_n értéket (azaz a háromszög legrövidebb oldalának hosszát) szorozzuk meg az utolsó két szám hányadosával, és ennek vegyük az egészrészét, és csak az így kapott szám környezetében keressünk megfelelő számokat.*

Vagyis az új derékszögű háromszög legkisebb oldalának hosszát $\left[\frac{a_n^2}{a_{n-1}}\right]$ környékére várjuk. Ez a sejtés sikeresnek mondható, mert ilyen módon jelentős mennyiségű új számhármas adódott, de már nem lehetünk biztosak listánk teljességében:

	a_n	b_n	c_n
12.	927 538 920	927 538 921	1 311 738 121
13.	5 406 093 003	5 406 093 004	7 645 370 045
14.	31 509 019 100	31 509 019 101	44 560 482 149
15.	183 648 021 599	183 648 021 600	259 717 522 849
16.	1 070 379 110 496	1 070 379 110 497	1 513 744 654 945
17.	6 238 626 641 379	6 238 626 641 380	8 822 750 406 821
18.	36 361 380 737 780	36 361 380 737 781	51 422 757 785 981
19.	211 929 657 785 303	211 929 657 785 304	299 713 796 309 065
20.	1 235 216 565 974 040	1 235 216 565 974 041	1 746 860 020 068 409

Mi lehet az a titokzatos 5,83 körüli szám?

A megtalált húsz derékszögű háromszög két befogója majdnem egyenlő hosszúságú. Minél nagyobb sorszámú háromszögeket nézünk a sorozatból, annál jobban az egyenlőszárú derékszögű háromszögeket juttatják az eszünkbe, amelyekben a befogó hosszának $\sqrt{2}$-szöröse adja az átfogó hosszát. Ez adhatta azt a megérzést, hogy az 5,83 és a $\sqrt{2}$ között keressünk kapcsolatot. Mivel $2\sqrt{2}+3 \approx 5{,}8284$, ezért az $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2\sqrt{2}+3$ sejtést is megfogalmaztuk. A fenti majdnem egyenlőszárú derékszögű háromszögeket a továbbiakban röviden MED háromszögeknek fogjuk nevezni.

Az eddigi oldalhosszakat nézve rekurzív képletet is találtunk:

$$a_{n+1} = 6a_n - a_{n-1} + 2,$$
$$b_{n+1} = 6b_n - b_{n-1} - 2,$$
$$c_{n+1} = 6c_n - c_{n-1}.$$

Próbáltunk a Fibonacci-sorozathoz hasonló explicit képletet adni az a_n-re. A kísérletezgetések alapján igaznak tűnik a következő képlet:

$$\frac{\left(3+2\sqrt{2}\,\right)^n - \left(3-2\sqrt{2}\,\right)^n}{\sqrt{2}} = a_n + a_{n-1} + 1, \tag{4}$$

ahol 1-nél nagyobb egész szám az n. Ez egy szép sejtés, de nem az a_n-re várt képlet.

Ezek után utánanéztünk az interneten, hogy vajon mások is foglalkoztak-e már a MED háromszögekkel, s ha igen, akkor ők mire jutottak. Nem meglepő módon igen sok találatot kaptunk, a kérdésnek gazdag irodalma van. Sok érdekességre is bukkantunk, ezek közül – a teljesség igénye nélkül – itt csak néhányat említünk. Az [1]-ben például találunk egy bizonyítást arra, hogy végtelen sok ilyen háromszög van, és egy konstrukciót is kapunk ilyenek előállítására. Az azonban nem derül ki ebből a bizonyításból, hogy az így konstruálható háromszögeken kívül is vannak-e MED háromszögek.

A [2]-ben találunk egy rövid bizonyítást arra nézve, hogy végtelen sok olyan háromszögszám van, amely egyben négyzetszám is. Könnyű ellenőrizni, hogy ha $H(n) = \frac{n(n+1)}{2}$ (tehát az n-edik háromszögszám) négyzetszám, akkor $H\big(4n(n+1)\big)$ is az. Ez a konstrukció nem adja meg az összes ilyen tulajdonságú számot, viszont a [3]-ban olvasható egy bizonyítás, ami megadja az összest. A [4] szerint pedig Euler 1778-ban általános formulát talált az E_k-ra, azaz a k-adik háromszögszám-négyzetszámra:

$$E_k = \left(\frac{\left(3+2\sqrt{2}\,\right)^k - \left(3-2\sqrt{2}\,\right)^k}{4\sqrt{2}}\right)^2.$$

Ezt azért tartjuk érdekesnek, mert nagyon hasonlít az $a_n + a_{n-1} + 1$-re általunk talált (4) összefüggésre. Kis átrendezéssel kapjuk, hogy $a_n + a_{n-1} + 1 = 4\sqrt{E_k}$.

A [2] egyik állítása háromszögszám-négyzetszámok és a MED háromszögek közti szoros kapcsolatot is igazolja.

Állítás: Végtelen sok MED háromszög van, s ezek oldalhosszúságainak általános alakja:

$$\left(\frac{4\sqrt{E}_k-1+\sqrt{8E_k+1}}{2};\frac{4\sqrt{E}_k+1+\sqrt{8E_k+1}}{2};2\sqrt{E}_k+\sqrt{8E_k+1}\right).$$

Behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy az $E_1=1$ a $(3,4,5)$, az $E_2=36$ pedig a $(20,21,29)$ MED háromszöget adja. Az érdeklődő olvasó az állítás (középiskolás ismeretekkel is követhető) bizonyítását a [2]-ben megtalálja.

Végül [5] nem csak a majdnem egyenlőszárú derékszögű háromszögekkel, hanem a majdnem derékszögű, ezen belül a majdnem derékszögű egyenlőszárú háromszögekkel is foglalkozik, sőt a háromszögek e két osztálya között kapcsolatot is teremt.

Egy háromszöget majdnem derékszögűnek nevezünk, ha oldalaira $x^2+y^2=$ $=z^2\pm1$ teljesül. Ezek között már sok egyenlőszárút találunk. Ilyenek például az $(5,5,7)$, $(29,29,41)$, $(169,169,239)$ vagy a $(12,12,17)$, $(70,70,99)$, $(408,408,577)$ háromszögek. Az első típusba tartozó háromszögek szára épp egy MED háromszög átfogója, alapja pedig ugyanebben a MED háromszögben a két befogó összege. A második típusba tartozó háromszögeknek az alapja két egymást követő MED háromszög átfogójának a számtani közepe, szára pedig a kisebbik MED háromszög három oldalának összege.

A kockás papíron a további barangoláshoz válasszuk a *KöMaL* 1989/10. számában megjelent Gyakorló feladatok egyetemi felvételire című összeállításból a következő feladatot:

1. feladat: *Határozzuk meg a $K(-2;1)$ középpontú és $r=5$ egység sugarú kör, valamint az $F\left(1;-\frac{11}{4}\right)$ fókuszú, $y=-\frac{13}{4}$ vezéregyenesű parabola metszéspontjait.*

Ez a feladat egy kicsit átszövegezve így hangzik:

2. feladat: *Határozzuk meg a $K(-2;1)$ középpontú, $r=5$ egység sugarú kör, valamint az $f(x)=x^2-2x-2$ hozzárendeléssel megadott függvény képének közös pontjait.*

Nézzük röviden ennek a megoldását, de természetesen ezzel az elsőt is megoldjuk.

Legyen $P(x;y)$ a feltételeknek megfelelő pont. Ekkor $PK=5$, vagyis Pitagorasz-tétellel:

$$(x+2)^2+(y-1)^2=25. \tag{5}$$

A P pontnak a megadott másodfokú függvény képére, a parabolára is illeszkedni kell, ezért az

$$y=x^2-2x-2 \tag{6}$$

összefüggésnek is teljesülnie kell.

Az (5) és a (6) egyenletekből álló kétismeretlenes egyenletrendszer megoldásai adják a P pont koordinátáit. Behelyettesítéssel az $(x+2)^2+(x^2-2x-3)^2=25$ egyenlethez jutunk, amit

$$x^4-4x^3-x^2+16x-12=0 \tag{7}$$

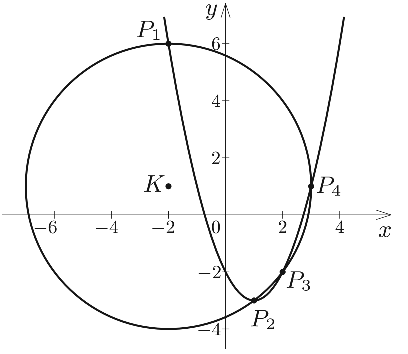
alakra tudunk rendezni. Ha ennek a negyedfokú egyenletnek van egész megoldása, akkor az $x^4-4x^3-x^2+16x$ (ami egy egész számmal egyenlő) osztható lenne ezzel az x-szel. Vagyis ebben az esetben az x csakis a 12 osztói közül kerülhet ki.

A 12 osztói: ±12, ±6, ±4, ±3, ±2, ±1. A tizenkét lehetőség kipróbálásával most szerencsénk van, mert megkapjuk a (7) egyenlet összes megoldását:

$$x_1=-2,\quad x_2=1,\quad x_3=2,\quad x_4=3.$$

A (6) felhasználásával pedig megadható a kapott négy közös pont második koordinátája is, vagyis a keresett pontok:

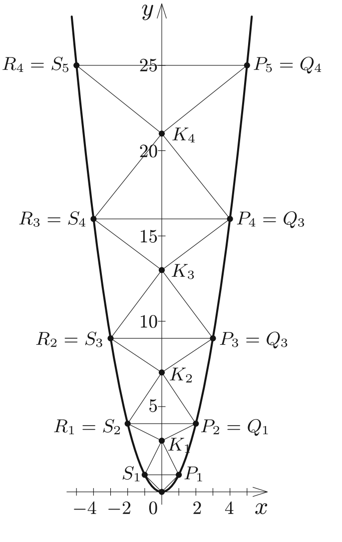
$$P_1(-2;6),\quad P_2(1;-3),\quad P_3(2;-2),\quad P_4(3;1).$$



Szeretjük, ha a gyakorló feladatokat olyan szépre tervezik, hogy a megoldások egészek. Ebben az esetben is ez történt. Adott volt a rácson egy kör, amelynek a középpontja rácspont, sugarának hossza pedig egész. Adott volt továbbá az x^2 hozzárendelésű függvény képének egy olyan eltoltja, hogy a tengelypontja rácspontra került. Szerettük volna, hogy legyen négy közös pontjuk, és ezek rácspontok legyenek.

Van-e más elrendezés a fenti feltételek mellett? Ha van, keressünk ilyeneket. Ha elkezdünk rajzolgatni a kockás papíron, akkor hamar észrevehetjük, hogy speciális elrendezést érdemes keresnünk, mert ekkor gyorsan lehet sikerélményünk. Az origóban álló normálparabola rácspontjait bejelölve egymásra rakott húrtrapézokból álló torony jelenik meg előttünk. Az építmény egy egyenlő szárú derékszögű háromszöggel indul, ahogyan ezt az *ábrán* is láthatjuk.

Bármely ilyen húrtrapéz köré írt köre és a normálparabola ezek szerint négy rácspontban metszi egymást. Vagyis végtelen sok olyan kört találtunk, amely a normálparabolát négy rácspontban metszi. Vajon ezeknek a köröknek hol van a középpontja? Van-e közöttük olyan, amelyiknek a sugara egész?



3. feladat: *Vegyük az $f(x)=x^2$ hozzárendeléssel adott függvény képéről a $P_n(n;n^2)$, $Q_n(n+1;n^2+2n+1)$, $R_n(-n-1;n^2+2n+1)$; $S_n(-n;n^2)$ pontokat, ahol n egy tetszőleges pozitív egész számot jelöl. Igazoljuk, hogy a $P_nQ_nR_nS_n$ húrtrapéz körülírt körének középpontja rácspont. Adjuk meg a középpont koordinátáját és a kör sugarának hosszát.*

Az ábra alapján a $P_1Q_1R_1S_1$ húrtrapézhoz a $K_1(0;3)$ középpont és az $r_1=\sqrt{5}$ sugár, a $P_2Q_2R_2S_2$ húrtrapézhoz a $K_2(0;7)$ középpont és az $r_2=\sqrt{13}$ sugár tartozik. Mivel $3=1^2+2$, $7=2^2+3$, ezért $K_n(0;n^2+n+1)$ a sejtésünk. Alkalmazzuk most is a Pitagorasz-tételt a rácson. Számításunk eredménye:

$$K_nP_n=K_nQ_n=\sqrt{n^2+(n+1)^2},$$

ami a sejtésünk bizonyítását jelenti. Ezek alapján a $P_nQ_nR_nS_n$ húrtrapézok körülírt körének középpontja minden esetben rácspont lesz: $K_n(0;n^2+n+1)$, a körök sugarának hossza pedig: $r_n=\sqrt{n^2+(n+1)^2}$.

Az r_n akkor lesz egész szám, ha az $n^2+(n+1)^2$ középpontos négyzetszám egyben négyzetszám is. Mi 20 ilyen középpontos négyzetszámot találtunk számítógéppel. Vagyis akkor lesz a sugár hossza egész számmal megadható, ha $K_nP_n=K_nQ_n$ egy MED háromszög átfogója, és már tudjuk, hogy végtelen sok MED háromszög van.

Vizsgálataink alapján kiderült, hogy végtelen sok szimmetrikus ábra létezik, ahol a normálparabolát négy rácspontban metsz egy rácsközepű, egész sugárhosszúságú kör. A kockás papíron rajzolgatva szerettünk volna a 2. feladatban látott további, nem szimmetrikus elrendezést is találni. A véletlen keresgélés nem kecsegtetett nagy reményekkel. Elsőként Rátki Barnabás számítógép segítségével talált egy megfelelő új ábrát. Számolással ellenőrizhető, hogy az általa megadott $A(15;20)$, $B(20;-15)$, $C(24;-7)$, $D(25;0)$ pontok illeszkednek az origó középpontú 25 sugarú körre, és az $f(x)=(x-21)^2-16$ hozzárendeléssel megadott függvény képére is. Ugyanennek az elrendezésnek különböző eltolt változatait mások is megtalálták.

Ebben az írásban ízelítőt szerettünk volna mutatni abból, hogy a füzetlapunk rácsa milyen sok érdekességet tartogat számunkra, milyen sok felfedezés várhat ránk, ha egy kicsit barangolunk a kockás papíron. Végezetül egy rövid feladatsorral szeretnék minden érdeklődőt biztatni erre a kalandozásra, újabb és újabb érdekes kérdések megfogalmazására. A figurális számokra vonatkozó bizonyításokat féltétlenül szemléltessük rácson is. A következő feladatok különböző nehézségűek, de reméljük, hogy mindenki talál kedvére valót.

Ajánlott feladatok

1. Adjunk meg néhány háromszögszámot, amely négyzetszám is.

2. Milyen figurális számot és hányadikat kapjuk, ha az n-edik négyzetszámból elvesszük az n-edik pozitív páratlan számot?

3. Adjunk meg két egymást követő háromszögszámot, melyek különbsége kétjegyű négyzetszám.

4. Adjunk az n-edik négyzetszámhoz n-et. Igazoljuk, hogy az így kapott szám egy háromszögszám duplája.

5. Igazoljuk, hogy a $2n$-edik háromszögszám az n-edik négyzetszám és az n-edik háromszögszám duplájának az összege.

6. Egy háromszögszámhoz adjuk hozzá valamelyik szomszédjának háromszorosát. Igazoljuk, hogy háromszögszámot kapunk.

7. Az első középpontos négyzetszám az 1. Adjuk meg a 77. középpontos négyzetszámot.

8. Igazoljuk, hogy minden középpontos négyzetszám páratlan.

9. Mutassuk meg, hogy ha a $(2n+1)$-edik négyzetszámhoz hozzáadjuk az n-edik vagy az $(n+1)$-edik négyzetszám négyszeresét, akkor középpontos négyzetszámot kapunk.

10. Igazoljuk, hogy a középpontos négyzetszámok néggyel osztva egyet adnak maradékul.

11. Igazoljuk, hogy egy háromszögszám négyszereséhez 1-et adva középpontos négyzetszámot kapunk.

12. Adjuk meg az n-edik középpontos hatszögszám képletét. (Az első ilyen szám az 1.)

13. Igazoljuk, hogy ha a $(2n+1)$-edik négyzetszámból elvesszük az n-edik háromszögszám kétszeresét, akkor az n-edik hatszögszámot kapjuk.

14. Igazoljuk, hogy ha az $(n+1)$-edik középpontos négyzetszámhoz hozzáadjuk az n-edik háromszögszám kétszeresét, akkor az n-edik hatszögszámot kapjuk.

15. Igazoljuk, hogy egy háromszögszám hatszorosához 1-et adva középpontos hatszögszámot kapunk.

16. Adjunk meg egy-egy olyan pitagoraszi számhármast, amelyben a legnagyobb szám (vagyis a derékszögű háromszög átfogójának hossza): 5, 13, 25, 41, 61, 85.

17. Bizonyítsuk be, hogy a másodiktól kezdve minden középpontos négyzetszám egy pitagoraszi számhármasban a legnagyobb tag.

18. Használjuk a cikk 3. feladatának jelöléseit.

a) Adjuk meg a $P_nQ_nR_nS_n$ húrtrapéz területét n függvényében.

b) Adjuk meg a $K_nQ_nK_{n+1}S_{n+1}$ deltoid területét n függvényében.

19. Megadtunk a cikkben két nem szimmetrikus kör és parabola elrendezést a kívánt feltételek mellett. Van-e további ilyen elrendezés?

20. A cikkben szereplő n-edik nevezetes derékszögű háromszög befogói a_n, b_n, az átfogója pedig c_n. Igazak-e a következő összefüggések?

a) $c_nc_{n-1} = 2a_na_{n-1} + a_n + a_{n-1} + 2$;

b) $c_nc_{n-1} = a_na_{n-1} + b_nb_{n-1} + 1$;

c) $a_n b_{n-1} + b_n a_{n-1} + 1 = a_n a_{n-1} + b_n b_{n-1}$;

d) $a_n^2 + a_{n-1}^2 = 6a_n a_{n-1} + 2a_n + 2a_{n-1} + 3$;

e) $2(a_{n+1} - a_n) = c_{n+1} + c_n$.

21. Illeszkedik-e végtelen sok rácspont az

$$\frac{x^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} - \frac{\left(y + \frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1$$

egyenlettel megadott hiperbolára?

22. Használjuk a cikk 3. feladatának jelöléseit. Adjuk meg n függvényeként a $K_n Q_n K_{n+1} S_{n+1}$ deltoid kerületét. Lehet-e valamelyik deltoid minden oldalhosszának mérőszáma egész szám?

Hivatkozások

[1] `https://proofwiki.org/wiki/Generator_for_Almost_Isosceles_Pythagorean_Triangle`

[2] `http://www.fq.math.ca/Scanned/36-4/nyblom.pdf`

[3] `http://mathworld.wolfram.com/SquareTriangularNumber.html`

[4] `https://en.wikipedia.org/wiki/Square_triangular_number`

[5] `https://www.hindawi.com/journals/ijmms/2016/5189057/`

Koncz Levente, Számadó László

Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

I. rész

1. Egy szabályos n-szög alapú egyenes hasáb lapátlóinak száma, testátlóinak száma és a 24 valamilyen sorrendben egy számtani sorozat egymást követő tagjait alkotják. Határozzuk meg n lehetséges értékeit. (*11 pont*)

2. Tekintsük a következő állításokat.

A: Két irracionális szám összege mindig irracionális.

B: Van olyan számsorozat, amely korlátos, nem monoton és nem konvergens.

C: Ha egy ötpontú egyszerű gráf minden csúcsa legalább harmadfokú, akkor biztosan tartalmaz kört.

a) Döntsük el, hogy igazak vagy hamisak az állítások. Válaszainkat indokoljuk. (*8 pont*)

b) Fogalmazzuk meg a *C* állítás megfordítását. Döntsük el, hogy igaz vagy hamis az állítás megfordítása. Válaszunkat indokoljuk. (*4 pont*)

3. Egy négyszög két szomszédos oldalának hossza 3, illetve 4 cm, közbezárt szögük 60°. A négyszög húr- és érintőnégyszög is egyben.

a) Mekkora a négyszög másik két oldala? (*7 pont*)

b) Számítsuk ki a négyszög beírt és köré írt körének sugarát. (*7 pont*)

(Válaszainkat cm-ben, két tizedesjegyre kerekítve adjuk meg.)

4. *a*) Mutassuk meg, hogy az $f(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}$ függvény páratlan és korlátos függvény. (*7 pont*)

b) Egy gömb alakú higanycsepp n egyforma, kisebb cseppre esett szét. Ezáltal a kis cseppek összfelszíne éppen négyszerese lett az eredeti higanycsepp felszínének. Határozzuk meg n értékét. (*7 pont*)

II. rész

5. *a*) Cinkelt érmét szeretnénk készíteni. A „Trükkös hatos” nevű játékban akkor nyerünk, ha az érme hatszori feldobásakor pontosan négyszer lesz fej és kétszer írás. Milyen módon cinkeljük az érmét (vagyis mekkora legyen a fej dobásának a valószínűsége), ha a lehető legnagyobb valószínűséggel szeretnénk nyerni? (*8 pont*)

b) Legfeljebb hány különböző pozitív prímszám adható meg úgy, hogy közülük bármely három összege is prímszám legyen?

Adjunk példát a maximális elemszámra és mutassuk meg, hogy több prímszámot nem tudunk megadni a kívánt módon. (*8 pont*)

6. *a*) Egy családban három gyerek van: Anna, Béla és Csaba. Minden nap kisorsolják, hogy ki vigye le sétáltatni kutyájukat, Buksit (egy kalapba teszik egyegy cédulára írva a nevüket, majd húznak egy cédulát).

Hány olyan sorsolás van, amelynél egy hetes időszakot véve, minden gyerek sorra kerül a kutyasétáltatás során? (*9 pont*)

b) Igazoljuk (teljes indukcióval vagy más módszerrel), hogy ha $n \geqslant 9$ pozitív egész szám, akkor $2^n > 32n$. (*7 pont*)

7. *a*) Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet: (*8 pont*)

$$\operatorname{tg} x \cdot \sin 4x = \frac{1}{2}.$$

b) Adjuk meg azokat a t pozitív egész számokat, amelyekre a fenti egyenletnek a $[2018; t]$ intervallumon pontosan 2018 darab valós megoldása van.

Számításaink során a π minél pontosabb értékével számoljunk. (*8 pont*)

8. Húzzunk érintőket az $y=x^2$ parabola $A(-1;1)$ és $B(2;4)$ pontjaiba.

a) Írjuk fel az érintők egyenletét. (*3 pont*)

b) Mutassuk meg, hogy az érintők a $C\left(\frac{1}{2};-2\right)$ pontban metszik egymást. (*2 pont*)

A parabola két részre osztja az ABC háromszöget, egy konvexre és egy konkávra.

c) Számítsuk ki az ABC háromszög területét. (*5 pont*)

d) Határozzuk meg a konvex és a konkáv alakzat területét. (*6 pont*)

9. A Bástya SE sakkcsapata nemrég indult először a nemzeti csapatbajnokságban. Egy találkozón 2 csapat küzd meg egymással, mindkét csapat 12 játékossal játszik. Ennek a 12 játékosnak van egy előre rögzített erősségi sorrendje és az egyik csapat legerősebbje játszik a másik csapat legerősebbjével, a második legerősebbek is egymással, stb. Így egy találkozón 12 partira kerül sor. Egy partinak 3 kimenetele lehet: győzelem esetén 1, vereség esetén 0, míg döntetlen esetén fél pontot kap a játékos. Tegyük fel, hogy egy-egy parti kimenetele nem függ a játékosok sakktudásától, mindegyik kimenetel egyformán valószínű. A csapat által elért pontszámot úgy kapjuk meg, hogy összeadjuk az egyes csapaton belüli játékosok által elért pontokat.

a) Mutassuk meg, hogy csak úgy lehet döntetlen (azaz amikor 6 pontot ér el mindkét csapat) egy találkozó, ha egy csapaton belül ugyanannyiszor nyernek és veszítenek. (*2 pont*)

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy – a fenti feltételek mellett – a Bástya SE döntetlent ér el első mérkőzésén? (*7 pont*)

c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy az első három találkozójuk döntetlen lesz és a negyedik meccset megnyerik? Az egyes találkozókon elért eredményeket egymástól függetleneknek tekinthetjük.

Válaszainkat négy tizedesjegyre kerekítve adjuk meg. (*2 pont*)

A csapat legjobb pontszerzője 9 partit játszott az idény folyamán. Az általa szerzett pontok átlaga $\frac{2}{3}$, míg a szórásnégyzete $\frac{1}{6}$.

d) Határozzuk meg, hogy a játékos hány partiban nyert, vesztett illetve ért el döntetlent. (*5 pont*)

Fridrik Richárd (Szeged)

Tájékoztató a folyóirat előfizetéséről

A Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok megrendelhető a kiadónál, a MATFUND Alapítványnál a szerkesztőség címén; valamint a következő címen: `http://www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.h.shtml`. Előfizetési díj a 2018–2019-es tanévre (2018 szeptemberétől 2019 májusáig) 8100 Ft. Azonos címre küldendő, 6-nál nagyobb példányszámú megrendelés esetén a csoportos előfizetési díj a korábbi évekhez képest változott, a részletes árak a fenti oldalon olvashatók. Csekket és számlát a szeptemberi számmal együtt küldünk, a fizetés csak ezután történhet.

Lapunk előfizetői az előfizetett példány címlapján látható előfizetői azonosító segítségével a kitűzött feladatainkhoz már a lap nyomtatott változatának megjelenésével egyidejűleg hozzáférhetnek.

A Bolyai János Matematikai Társulat (BJMT) tagjai által igénybevehető kedvezményekről kérjük, olvassa el a Társulat honlapján a „Tagsági információk"-at: `www.bolyai.hu`.

Azok, akik az idén kérik felvételüket a Bolyai János Matematikai Társulatba, felvételi kérelmük elbírálása után (legközelebb várhatóan októberben) értesítést és tagdíjbefizetési csekket kapnak, ezért külön nem szükséges előbb jelentkezniük.

A Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok példányonként 950 Ft-ért megvásárolható a szerkesztőségben.

Kérjük versenyzőinket, hogy a KöMaL 2018–2019-es tanévi matematika, fizika és informatika pontversenyének *versenykiírását* figyelmesen olvassák el!

Versenykiírás*
a KöMaL 2018–2019-es tanévre kiírt pontversenyeire

A most induló pontversenyek 2018 szeptemberétől 2019 májusáig tartanak, havonta az újonnan kitűzött feladatcsoportok megoldásait lehet beküldeni.

Kedves Versenyzőnk!

Matematikából, fizikából és informatikából, összesen 21 kategóriában indítunk különféle nehézségű pontversenyeket. Ezek a versenyek 9 hónapon keresztül, 2018 szeptemberétől 2019. június elejéig tartanak. Minden hónapban új feladatokat tűzünk ki, és a megoldásokat a következő hónap elejéig küldheted be. A verseny végeredményét 2019. szeptemberi számunkban hirdetjük ki. A díjakat jövő ősszel, a KöMaL Ifjúsági Ankéton adjuk át.

Pontversenyeinkben a részvétel a 2018/2019-es tanévben is térítésmentes. Kérjük azonban versenyzőink szüleit, hozzátartozóit, vagy az őket támogató intézményeket, cégeket, hogy előfizetésükkel és adományaikkal segítsék Lapunk fennmaradását.

Nevezés a versenyre

Versenyeinkben minden általános iskolás és középiskolás korú tanuló részt vehet.

Az Európai Unió Általános Adatvédelmi Rendelete (GDPR) értelmében szülői engedély szükséges a 16 évesnél fiatalabb versenyzőink adatainak nyilvántartásához. Az ő esetükben egy szülői nyilatkozatra is szükség van. Adatkezelési szabályzatunk a `https://www.komal.hu/info/adatkezeles.h.shtml` címen olvasható.

Regisztráció

Ha még soha nem vettél részt a KöMaL versenyeiben, az első lépés a *regisztráció a honlapunkon* (`https://www.komal.hu/u?a=reg`). A regisztráció során alapvető adatokat (név, iskola, osztály, e-mail cím) kérünk. A későbbi bejelentkezéshez szükséges jelszavadat e-mailben küldjük el.

A nagyon gyakori családnevű versenyzőknek (Horváth, Kiss, Varga stb.) javasoljuk, hogy válasszanak egy háromjegyű jelzőszámot, amit második vezetéknévként használnak (pl. Kiss 349 Anna, Szabó 344 Péter). Kérjük, hogy mind a re-

---

*Kérjük, hogy azok is figyelmesen olvassák el a versenykiírást, akik tavaly már részt vettek valamelyik versenyünkben.

gisztrációkor, mind pedig a tanév során beküldött dolgozataidon is minden esetben az így kibővített nevet használd.

A sikeres regisztráció után adhatod meg további adataidat (pl. levelezési cím: ide szoktuk küldeni az érettségizettek oklevelét; felkészítő tanárok neve), és nyilatkozhatsz a részletes pontszámok nyilvánosságáról vagy egyes konkrét versenyekben való részvételről.

Ha korábban már regisztráltál, akkor nincs szükség újabb regisztrációra; a tavalyi jelszavadat továbbra is használhatod; ugyanakkor szükséges lesz a személyes beállításaid áttekintése, felülvizsgálata.

Az egyes pontversenyekre az első dolgozat beküldésével nevezhetsz be.

A versenyekbe a tanév során később is be lehet kapcsolódni.

FONTOS! A versenyben csak a regisztráció után beküldött megoldásokat értékeljük! Regisztráció nélkül beküldött megoldásokat utólag sem veszünk figyelembe!

Az osztályok számozása

A KöMaL versenyeiben az osztályokat 1-től 12-ig számozzuk. Lehet, hogy a számozás nem azonos az iskolában használt számmal. Azok számítanak 12. osztályosnak, akik most kezdik az érettségi vizsga előtti utolsó évet. 11. és 10. osztályosnak számítanak azok, akik várhatóan 2020-ban, illetve 2021-ben fejezik be a középiskolát.

Azok, akik $8+5$ éves képzésben vesznek részt, például a nyelvi előkészítő osztályok tanulói, két egymás utáni évben is 9. osztályosnak számítanak. Kérjük, ha az osztályod sorszáma nem 1-gyel nőtt tavalyhoz képest, ezt jelezd a szerkesztőségnek e-mailben.

A regisztráció módosítása

A regisztráció után az azonosításhoz szükséges adataidat (név, iskola, osztály, e-mail cím) önállóan nem módosíthatod. Ha ezek megváltoztak, kérjük, hogy fordulj e-mailben a szerkesztőséghez.

Mindenkit óvunk a regisztráció önkényes megismétlésétől, a többszörös regisztrációtól. Nincs olyan helyzet, amikor a többszörös regisztráció segítene; csak még nagyobb zavart okoz. (Ugye nem szeretnél kétszer szerepelni a pontversenyben, feleakkora pontszámmal?)

Arcképek

Ha szeretnéd, hogy fényképed megjelenjen honlapunkon a pontverseny eredményében, küldd el a szerkesztőségnek e-mailben. Ha lehet, válassz világos, egyszínű hátteret. A képeket többnyire átméretezzük és megfelelő méretűre vágjuk, ezért érdemes nagyobb felbontást használni.

Matematika versenyek

Négyféle versenyt indítunk, növekvő nehézségi sorrendben **K**, **C**, **B** és **A** kategóriában. Egy tanuló több pontversenyben is indulhat, de K-ban és B-ben egyszerre nem. Ha kilencedik osztályos vagy, akkor a személyes beállításaid között nyilatkozhatsz, hogy melyik versenyben szeretnél részt venni.

Mindegyik versenyünkre érvényes, hogy **egy feladatra csak egy megoldást értékelünk.**

Természetesen örömmel várunk általánosításokat, megjegyzéseket, másfajta megoldási vagy kitűzésre tett javaslatokat, ezeket szívesen közöljük, sőt, a pontversenyen kívül különdíj formájában is elismerjük.

K-*jelű matematika feladatok* – az ABACUS és a KöMaL Közös pontversenye Kilencedikes Kezdőknek

A K-pontversenyben csak kilencedik osztályosok indulhatnak. Azoknak ajánljuk, akik még csak most ismerkednek a KöMaL-lal. Szeptembertől márciusig hét fordulóban, havonta öt feladat jelenik meg; ezek közül három feladat az ABACUS pontversenyével közös. Mindegyik feladat teljes megoldása 6 pontot ér. A feladatokat az *ABACUS matematikai lapok* bocsátja a KöMaL rendelkezésére.

Az ABACUS pontversenyében továbbra is az általános iskolák 3–8. osztályos tanulói vehetnek részt.

C-*jelű matematika gyakorlatok*

A C-pontverseny gyakorlatait azoknak az olvasóinknak ajánljuk, akik túl nehéznek vagy szokatlannak találják a B és az A kategória feladatait. Itt rendszeresen közlünk az iskolai tananyaghoz szorosabban kapcsolódó gyakorlatokat, azok találhatnak itt kedvükre valót, akik valamivel – de nem sokkal – szeretnének túllépni az iskolai matematika keretein, vagy emelt szintű érettségit kívánnak tenni matematikából.

A gyakorlatok egy része általános iskolásoknak is ajánlható, más részük azonban a 11–12. évfolyam tanulmányaira támaszkodik. Minden hónapban hét gyakorlatot tűzünk ki, ebből az 1–5. gyakorlatokra a legfeljebb 10. évfolyamosok, a 3–7. gyakorlatokra pedig a 11–12. évfolyamosok küldhetnek be megoldást. Minden dolgozatra legfeljebb 5 pont kapható.

A C-pontversenyt három korcsoportban értékeljük: 1–8., 9–10., illetve 11–12. osztályosok.

B-*jelű matematika feladatok*

A B-pontversenyben havonta összesen nyolc feladatot tűzünk ki, de havonta mindenkinek **legfeljebb hat** megoldását számítjuk be a pontversenybe (amelybe azonban először a nem versenyszerűeket számítjuk be, lásd lejjebb). Az eredményes versenyzéshez tehát nincs szükség valamennyi feladat megoldására; ki-ki gondolja végig, mely példákkal foglalkozna szívesen, hogyan érhetné el a legtöbb pontot.

A B-feladatok sorrendje megfelel az iskolai tananyagnak: egy feladatsoron belül az alacsonyabb sorszámúakat ajánljuk a fiatalabbaknak. A feladatok – szándékaink szerinti – nehézségét a közölt pontszám jelzi (többnyire 3–6).

A B-pontverseny eredményét öt korcsoportban tartjuk nyilván: a 8. évfolyamig, a 9., 10., 11., illetve 12. évfolyamokban.

A-*jelű nehezebb matematika feladatok*

Az A-pontverseny a legfelkészültebb diákok számára jelent kihívást. Azoknak ajánljuk, akik tudományos kutató pályára vagy nemzetközi versenyekre készülnek.

Havonta három A-feladatot tűzünk ki, mindegyik feladatra legfeljebb 7 pont kapható. Az A-verseny résztvevőit nem különítjük el évfolyamonként, mindannyian együtt versenyeznek.

Fizika versenyek

Háromféle fizika versenyt indítunk: **M**, **G** és **P** kategóriában. Egy tanuló több pontversenyben is indulhat, de a G- és a P-pontversenyek közül csak az egyiket választhatja. A legfeljebb 10. osztályosoknak honlapunkon, a személyes beállításaik között kell nyilatkozniuk, hogy a P és G versenyek közül melyikben kívánnak részt venni.

Természetesen örömmel várunk általánosításokat, megjegyzéseket, másfajta megoldási vagy kitűzésre tett javaslatokat, ezeket szívesen közöljük, sőt, a pontversenyen kívül különdíj formájában is elismerjük.

M-*pontverseny* – fizika mérési feladatok

Havonta egy mérési feladatot tűzünk ki, valamennyi korosztály számára közösen. A feladatok megoldásával 6-6 pontot lehet szerezni.

A mérés elvégzéséhez szabad egy személy (családtag, osztálytárs, barát) segítségét is igénybe venni. A segítő személy adatait a mérési jegyzőkönyv elején a versenyző adatai mellett tüntessétek fel. Idén első alkalommal (kísérleti jelleggel) megengedjük, hogy a mérést két versenyző közösen, mérőpárban végezze el. A mérőpár tagjai – akik járhatnak különböző iskolába és különböző évfolyamokba – egymástól függetlenül nevezzenek be az **M** pontversenybe. A mérésük jegyzőkönyvét elegendő 1 példányban beküldeni, de annak fejlécén minden hónapban szerepeljen mindkettőjük neve, iskolája, osztálya, e-mail címe. A mérési jegyzőkönyvért járó pontszámot a mérőpár mindkét tagja külön-külön megkapja.

G-*jelű fizika gyakorlatok*

A G-pontversenyben legfeljebb 10. osztályosok vehetnek részt. Azoknak az olvasóinknak ajánljuk, akik túl nehéznek vagy szokatlannak találják a P-feladatokat. Többnyire az iskolai tananyaghoz szorosabban kapcsolódó gyakorlatokat találnak a versenyzők, így azok is eséllyel indulhatnak, akik még nem rendelkeznek feladatmegoldó rutinnal, de a gyakorlatok megoldásával és beküldésével felkészülhetnek arra, hogy a következő években eredményesen szerepelhessenek a P-pontversenyben.

Minden hónapban négy G-gyakorlatot tűzünk ki, az elérhető pontszámokat a feladatok után feltüntetjük. Mindenki szabadon választhat a kitűzött gyakorlatok közül, de **havonta legfeljebb három** feladat megoldását (először a nem versenyszerűeket) számítjuk be a pontversenybe. A G-pontversenyt három kategóriában (legfeljebb 8. évfolyam, 9., 10. évfolyam) külön-külön összesítjük és értékeljük.

P-*jelű fizika feladatok*

Havonta kb. tíz elméleti feladatot tűzünk ki, nem nehézségi, hanem az életkornak megfelelő sorrendben. A pontszámokat a feladatok után feltüntetjük. Mindenki szabadon választhat a kitűzött elméleti feladatok közül. **Az 1–8. évfolyamosoknak havonta legfeljebb három, a 9–12. évfolyamosoknak legfeljebb öt megoldását** számítjuk be a pontversenybe (azonban először a nem versenyszerűeket).

Az elméleti versenyt korosztályonként (8. évfolyamig, 9., 10., 11., 12. évfolyam) külön-külön összesítjük és értékeljük.

Informatika versenyek

I-*pontverseny* – informatika alkalmazási és programozási feladatok

Havonta három **I** jelű és egy **I/S** jelű feladatot tűzünk ki. A feladatok egy része általános iskolásoknak is ajánlható, nagyobb része azonban a középiskolai tanulmányokra támaszkodik. Alapvető célunk, hogy e feladatok segítsék a felkészülést az informatika versenyekre és az emelt szintű érettségire. Minden hónapban a négy kitűzött feladatból a három legmagasabb pontszámot elért feladat pontszámát számítjuk be az I pontversenybe.

Az I-pontversenyben minden hónapban egy programozási, egy informatika alkalmazói feladatot, valamint egy érdekes problémát tűzünk ki. Ez utóbbi tartalmában vagy a megoldás eszközében szokatlan: Lehetséges, hogy egy kevésbé ismert szoftver megismerése szükséges hozzá, vagy egy kiegészítő programcsomag segítségével pl. grafikus felület programozását igényli. A feladatok egyike jellegében és formájában is lényegében megegyezik az érettségin kitűzött feladatokkal, ezt az (É) betűvel jelezzük a feladat sorszáma mellett. Versenyzőink ezen feladatok megoldásával a vizsgára való felkészülést gyakorolhatják és lemérhetik tudásukat.

Az I/S jelű feladatok az I jelű programozási feladatoknál nehezebb, de az S jelűeknél könnyebb programozási feladatok. A megoldáshoz szükséges ismeretek és algoritmusok megtalálhatók a két verseny honlapján, a `http://tehetseg.inf.elte.hu/nemes` és a `https://www.oktatas.hu/kozneveles/tanulmanyi_versenyek/oktv_kereteben/aktualis_versenyidoszak` oldalakon.

S-*pontverseny* – nehezebb programozási feladatok

Az **S** pontverseny egy **S**-jelű nehezebb programozási feladatból és az I-pontversenyben is résztvevő **I/S** feladatból áll. Mindkét feladat a programozási versenyekre való felkészülést szolgálja. A megoldáshoz szükséges ismeretek és ajánlott algoritmusok körét a Nemzetközi Informatikai Diákolimpiákon alkalmazott angol nyelvű leírás (IOI Syllabus) tartalmazza, lásd `https://ioinformatics.org/files/ioi-syllabus-2018.pdf`. Az S és I/S feladatok értékelésénél az eredmény helyességén kívül azt is figyelembe vesszük, hogy az algoritmusok mennyire hatékonyak, nagyméretű bemenő adatok esetén is lefutnak-e a megadott időkorláton belül.

A feladatok megjelenése

Új feladatokat havonta, szeptembertől májusig tűzünk ki. A feladatokat megtalálod nyomtatott számunkban és honlapunkon.

Honlapunkon a feladatokat, szeptember kivételével, az adott hónap 28. napján hozzuk nyilvánosságra. Előfizetőink azonban a lap nyomtatott változatának megjelenésével egyidejűleg, azonnal elérhetik a feladatok szövegét, és elkezdhetik a munkát. Amennyiben előfizettél a KöMaL-ra, a személyes beállításaid között add meg előfizetői kódodat. Az előfizetői azonosítót megtalálod a szeptemberi szám címlapjára ráragasztott címkén.

Azok az előfizetőink, akik (például életkoruknál fogva) nem versenyzőink, regisztráció és az előfizetői kód megadása után, a versenyzőkkel együtt szintén elérhetik a feladatok szövegét.

Egy előfizetői kódot csak egy személy használhat.

A dolgozatok tartalma

Kérjük, tanulmányozd a korábbi számainkban és honlapunkon megjelent megoldásokat, ezek sokat segíthetnek annak megértésében, hogy milyen formát és részletességet várunk el a beküldött megoldásoktól.

Matematika és fizika elméleti megoldások

A megoldás leírása azt jelenti, hogy az olvasót végigvezeted a megoldásod lépésein. Törekedj a rövid, olvasható leírásra. Próbáld még egyszer átgondolni a lépések sorrendjét, és lerövidíteni a megoldást. A gondos leírás sok időt igényel; ne hagyd az utolsó pillanatra.

Maximális pontszám csak teljes megoldásért jár; puszta eredményközlésért nem adunk pontot. A kimondott állításokat igazolni kell. Levezetés és hivatkozás nélkül csak a középiskolai tananyagban szereplő tételeket fogadjuk el. Közismert tételekre (pl. Menelaosz-tétel, Hölder-egyenlőtlenség stb.) elegendő a nevükkel hivatkozni, egyéb esetekben ki kell mondani a felhasznált tételt, és fel kell tüntetni az idézett forrást (cím, oldalszám vagy internet-cím). Tételekre való hivatkozáskor azt is meg kell mutatni, miért teljesülnek a tétel feltételei, és hogyan következik a tétel állításából a bizonyítás gondolatmenetének következő lépése.

Többször előfordult már, hogy egy-egy feladat szerepelt valamely példatárban, vagy megtalálták az interneten. Arra is láttunk példát, hogy egy folyóiratcikkben, vagy éppen a KöMaL egy korábbi feladatában a feladatban kitűzöttel lényegében ekvivalens, vagy annál általánosabb állítás bizonyítása szerepelt. Célunk továbbra is versenyzőink problémamegoldó képességének fejlesztése, nem pedig a keresőprogramok tesztelése, ezért **nem adunk pontot azokra a dolgozatokra, amelyek csak a megoldás helyét közlik, vagy azt mutatják meg, hogy a feladat egy nehezebb tétel speciális esete vagy triviális következménye; a végeredményhez vezető megoldást részletesen le kell írni.**

Ha a megoldáshoz könyvekben vagy az interneten talált írásokat használsz fel, és ezekből idézel, tüntesd fel a felhasznált forrásokat.

A hosszabb, összetettebb gondolatmeneteket érdemes tagolni, részekre bontani; használj, bekezdéseket, részeket, címeket és alcímeket. A különböző segédállításokra, képletekre és ábrákra könnyebb hivatkozni, ha megszámozod.

A geometria feladatok megoldásának fontos részei az ábrák, amelyeken követni és ellenőrizni lehet a lépéseket. Mindig rajzolj ábrát, az ábra nélküli megoldásokat nem tekintjük teljesnek. Bonyolultabb ábrák esetén az egyes geometriai objektumokat szövegesen is definiáld (pl. „legyen P' a P pont tükörképe az e egyenesre"). Elektronikus beküldés esetén ügyelj a megfelelő felbontásra. A felbontás akkor megfelelő, ha a számítógép képernyőjén elfér, és a fontos részletek is jók kivehetőek. A jó ábra mérete többnyire 500–1000 pixel között lehet.

A matematika példák megoldásaként csupán számítógépes programot nem fogadunk el! Ha harmincnál több esetet vizsgálsz, pedig lényegesen le lehetett volna szűkíteni az esetek számát, azt is úgy tekintjük, mintha programot írtál volna.

Mérési feladatok

A mérési jegyzőkönyv feltétlenül tartalmazza a mérés elvének áttekinthető leírását (a mérési elrendezés vázlatos rajzával, esetleg fotókkal), megfelelő számú és pontosságú mérési adatot (áttekinthető táblázatban, a mértékegységeket is meg-adva), a mérési adatok kiértékelését (lehetőleg grafikusan ábrázolva), és a hiba nagyságrendjének becslését. A mért és számított mennyiségeket ne adjuk meg indokolatlanul sok tizedesjeggyel, hanem csak a becsült hibával összhangban álló pontossággal. A mérési jegyzőkönyv legyen viszonylag tömör, de annyira áttekinthető, hogy annak alapján bárki meg tudja ismételni a leírt mérést. Nagyon sok (50-nél több) mérési adat esetén elegendő azoknak csak egy „reprezentatív” részét beküldeni és a többinek csak az átlagát közölni. A 6 oldalnál hosszabb jegyzőkönyv tartalmazzon egy rövid (kb. 1/2 oldalas) összefoglalást.

Informatika megoldások

Fontos a feladatok be/kimenetének helyes és pontos kezelése. A standard I/O-ról több feladat megoldása kapcsán is írtunk, a leírást tartalmazó stdio.pdf fájl honlapunkon elérhető a `https://www.komal.hu/verseny/stdio.pdf` címen.

Az I-jelű programozási feladatok megoldását Basic, C, C++, C#, Java, Pascal, Python nyelvek egyikén kell elkészíteni. A fejlesztéshez bármilyen fejlesztőkörnyezet (IDE) használható, azonban az értékelés mindenképpen a következőkkel történik:

- Code::Blocks 17.12 (MinGW) GCC 5.1,
- FreePascal 3, Lazarus 1.8,
- Visual Basic, C++, C# Visual Studio 2013 Express,
- Python IDLE 3.7,
- NetBeans 8.2 JDK 8, Eclipse Java Oxygen 3.

Beküldés előtt ellenőrizd, hogy a forráskód a fenti listában szereplő eszközzel is fordítható, illetve helyesen működik.

Az I-pontversenyben kitűzött alkalmazói feladatok megoldásához a Microsoft Office 2013/2016 vagy a LibreOffice 6.1 vagy az OpenOffice 4.1 irodai szoftvercsomagok valamelyike használható. A további használható alkalmazásokat egy-egy feladat leírása tartalmazza, ezek jórészt szabadon fölhasználható programok, esetleg kereskedelmi szoftverek időkorlátos próbaváltozatához kapcsolódnak.

Az I/S és S-jelű feladatok megoldását C, C++, Pascal vagy Java nyelvek valamelyikén kell elkészítened. A megoldáshoz dokumentációt kell írnod és a forráskódot kommentekkel kell kiegészítened. A különálló dokumentációban a megoldás elvi menetének, algoritmusának ismertetését várjuk. A forráskód kommentezésének lényege, hogy segítségével – a dokumentáció ismeretében – könnyen megérthető legyen az egyes kódsorok, kódrészletek feladata, szerepe a megoldás menetében.

Az I/S és S-jelű feladatok megoldását a `http://mester.inf.elte.hu` automatikus értékelő rendszer segítségével kipróbálhatod, tesztelheted. Egyszerű regisztráció után (pl. Google azonosítóval) a kitűzött feladatok megtalálhatók a **KöMaL 2018/19** téma alatt. Innen letölthető a feladatok értékeléséhez használt tesztállományok egy része. Az értékelő rendszernél fontos a formai szabályok betartása, mivel az értékelés a program kimenete alapján történik. Javasoljuk, hogy figyelmesen olvasd el a `http://mester.inf.elte.hu/faces/tudni.xhtml` leírást és annak megfelelően járj el. A feladatok megoldását (a forráskódot és a dokumentációt) a KöMaL honlapon az Elektronikus Munkafüzetbe töltsd fel.

A megoldások elkészítése és beküldése

Megoldásokat e-mailben nem fogadunk.

A matematika és fizika dolgozatokat postán küldheted be, honlapunkon megszerkesztheted vagy kész fájl formájában feltöltheted. Az informatika feladatok megoldását csak elektronikusan adhatod be.

A dolgozatok beküldése postán

A matematika és fizika feladatok megoldását papíron leírva vagy nyomtatva, postán is beküldheted.

A szerkesztőség munkatársainak általában nagy mennyiségű dolgozatot kell rövid idő alatt feldolgozniuk. A postán beküldött dolgozatok szétválogatása, javítása és a pontszámok gyors könyvelése akkor lehetséges, ha betartod az alábbi formai követelményeket:

- Minden egyes megoldás külön lapra kerüljön. Ez azért nagyon fontos, mert a különböző feladatok más-más javítóhoz kerülnek. A lapok A4 méretűek (kb. 21×30 cm) legyenek.
- Minden egyes beküldött dolgozat bal felső sarkában nyomtatott betűkkel szerepeljen:
  - a példa betűjele (A, B, C, K, M, G vagy P) és száma pirossal,
  - a teljes neved és osztályod,
  - az iskolád neve városnévvel együtt,
  - az e-mail címed.
- Minden egyes postán küldött megoldást – feladatonként külön-külön – négyrét hajts össze (több lapból álló dolgozatokat egybe) úgy, hogy a fejléc kívülre kerüljön.

Azokat a dolgozatokat, amelyeken nincs feltüntetve osztály és iskola városnévvel együtt, nem értékeljük; azokat, amelyek több feladat megoldását tartalmazzák egy lapon, vagy külalakjuk miatt értékelhetetlenek, nem versenyszerűnek tekintjük.

Postai beküldés esetén a dolgozatokat a következő címre várjuk:

KöMaL feladatok
Budapest 112, Pf. 32. 1518

A matematika és a fizika feladatokat közös borítékban is beküldheted. Ügyelj a helyes címzésre. A rossz címre küldött dolgozatokat nem tudjuk értékelni.

A postán beküldött megoldásokhoz kísérőjegyzéket kérünk a minta szerint, a borítékban egy külön papíron felsorolva az összes beküldött dolgozat jelét és számát. A név, osztály és iskola feltétlenül szerepeljen a kísérőjegyzéken!

Kísérőjegyzék
Szabó 172 István 10. évf.
Miskolc, Földes Ferenc Gimn.

A 2019. évi 6. számból a következő feladatokra küldök megoldást:
B. 4966., B. 4968., B. 4969., B. 4971., B. 4973.
Összesen 5 dolgozat.

A megoldások on-line szerkesztése az Elektronikus Munkafüzetben

Az Elektronikus Munkafüzet a honlapunk része. Webes felület, amely lehetőséget ad a megoldás közvetlen beírására, szerkesztésére. A megoldásaidat módosíthatod, átszerkesztheted a beküldési határidőig.

Képletek szerkesztéséhez a TEX rendszert használjuk. Javasoljuk, hogy honlapunkon járd végig a *TeX tanfolyamot* (`https://www.komal.hu/mf?a=tk`).

Kész fájlok feltöltése

Megoldásaidat az otthoni vagy iskolai számítógépeken is elkészítheted, és a kész fájlt honlapunkon feltöltheted. Kérjük, hogy szöveges dokumentumok esetén a többféle operációs rendszerben olvasható PDF formátumot használd. A dokumentum elején ugyanolyan fejléc (tehát a feladat száma, név, osztály, város, iskola, e-mail cím) szerepeljen, mint a postán küldött dolgozatokon.

Kézírással készült megoldást csak postai úton fogadunk el. Ha kézzel rajzolsz ábrát, és azt jól látható minőségben beszkenneled, majd beilleszted a megoldásba, azt elfogadjuk.

Az informatika megoldások beküldése

Az informatika feladatok megoldásait kizárólag elektronikus formában, a KöMaL honlapján küldheted be. Amennyiben a megoldás több fájlból áll, úgy egy, a fájlok mindegyikét és a dokumentációt is tartalmazó, a feladat sorszámával egyező nevű mappát kell ZIP tömörítéssel becsomagolva egyetlen fájlként beküldened. Ügyelj arra, hogy a tömörített állományokba futtatható fájlok (pl. a fejlesztéskor létrejövő `.exe` állomány) ne kerüljenek.

A programozási feladatoknál a forráskód első soraiban megjegyzésként szerepeljen

- a feladat száma;
- a versenyző teljes neve (jelzőszámmal) és osztálya;
- az iskola neve városnévvel együtt;
- a versenyző e-mail címe;
- az alkalmazott fordítóprogram neve és verziószáma.

Kérjük, hogy a programozási feladatoknál a program be- és kimenete mindig a feladatban megadott módon valósuljon meg. Erre azért van szükség, mert a beküldött programokat sokféle tesztadatra lefuttatjuk, és ezt igyekszünk automatizálni.

Az informatika feladatokkal kapcsolatos bárminemű kérdéseket, esetleges reklamációkat az `inf-szerk@komal.hu` címre várjuk.

A beküldési határidő

A beküldési határidő minden kategóriában a lap megjelenését követő hónap 10. napja; szombat, illetve munkaszüneti nap esetén a következő munkanap. A határidő azt jelenti, hogy a küldeményt legkésőbb a határidő napján 24 óráig kell postára adnod. (Kérjük, ellenőrizd a postai bélyegző dátumát, mert későbbi dátumot nem fogadunk el.) A határidő betartását szigorúan ellenőrizzük. **A határidő után a személyesen behozott dolgozatokat sem fogadjuk el!** Elektronikus beküldés esetén vedd figyelembe az internet esetleges hibáit és a beküldési határidő

idő előtti órákban a szerver gépünk esetleges túlterheltségét; ilyen okokra hivatkozva sem fogadunk el késedelmes dolgozatokat.

Értékelés

A pontversenyek állását és versenyzőink részletes eredményeit a honlapunkon folyamatosan közöljük. Versenyzőinket e-mailben is értesítjük a pontszámok változásairól.

Szabálytalan versenyzés

FONTOS! A versenyek egyéni versenyek; a versenyzőknek önállóan kell elkészíteniük a példák megoldásait. A mérési verseny kivételével (lásd az M pontverseny leírását) tilos a kitűzött feladatokat a beküldési határidő előtt másokkal megvitatni, másoktól segítséget kérni vagy elfogadni a feladatok megoldásához. A közösen készített vagy másolt dolgozatokat – beleértve az eredeti szerzőét is – *nem versenyszerűnek értékeljük.* A csoportosan másolt dolgozatokat visszaküldjük az osztályt tanító tanárnak. Súlyosabb, az egész pontversenyt veszélyeztető esetekben (pl. a feladatok megtárgyalása internetes fórumokon) az érintett versenyzőket kizárjuk a versenyből.

Reklamációk

A dolgozatok értékelése után az Elektronikus Munkafüzetben rövid kérdést vagy üzenetet küldhetsz a javítónak, ő pedig ugyanott válaszolhat. A különböző feladatokat különböző javítók javítják, ezért mindig csak az adott feladatról kérdezz.

Ügyelj az udvarias hangvételre. Olyan módon kérdezz, amit szemtől-szembe, akár a tanáraiddal vagy a szüleiddel szemben is helyesnek tartanál.

Eldöntetlen vita, reklamáció esetén a szerkesztőséghez fordulhatsz. Reklamációkat a feladat értékelése után két hétig fogadunk el a `szerk@komal.hu` címen.

Javasoljuk, hogy beküldött dolgozataid másolatát őrizd meg, hogy a lapban közölt megoldással össze tudd hasonlítani. Ha a dolgozat esetleg elvész a postán, csak másolat esetén tudjuk elfogadni a reklamációt.

A végeremény közzététele

A versenyek végeredménye az összes dolgozat kijavítása után, várhatóan augusztus elején a honlapunkon, majd a 2019. szeptemberi számunkban jelenik meg. A legeredményesebb versenyzők arcképét 2019. decemberi számunkban közöljük. A legjobbak a MATFUND Középiskolai Matematikai és Fizikai Alapítvány pályadíjait és tárgyjutalmakat kapnak a 2019. évi *KöMaL Ifjúsági Ankét* rendezvényén. Az okleveleket postán küldjük el.

Néhány megjegyzés

A versenyben résztvevő hozzájárul a dolgozatának név nélküli, valamint a szerkesztett változat névvel történő közléséhez.

Örömmel fogadunk feladatjavaslatokat, cikkeket, szakköri munkáról szóló beszámolókat, közlésre alkalmas iskolai pályamunkákat. Javaslataikat, közleményeiket elküldhetik postán, vagy személyesen juttathatják el szerkesztőségünkbe. Szép, érdekes és nem közismert feladatokat bárki javasolhat kitűzésre. A javasolt feladatokat (megoldásokkal együtt) a szerkesztőség címére küldjék el. A diákok elfogadott javaslatait év végén beszámítjuk a különdíjért folyó versenybe.

Szeretnénk, ha a kitűzött kérdések nem zárulnának le véglegesen a beküldési határidővel, a közölt megoldással. Erre teremt lehetőséget az internetes KöMaL fórum. Bármely, a lapunkban megjelent feladathoz, cikkhez kapcsolódó megjegyzést, általánosítást szívesen látunk és alkalomadtán közöljük.

Végezetül mindenkinek eredményes tanévet és sikeres versenyzést kíván

a Szerkesztőség

Matematika feladatok megoldása

B. 4921. *Bizonyítsuk be, hogy ha n és k pozitív egészek, akkor $n+k$ egész szám közül mindig ki lehet választani legalább $(k+1)$-et úgy, hogy az összegük n-nel osztható legyen.*

(*5 pont*) Javasolta: *Gyenes Zoltán* (Budapest)

I. megoldás. Azt fogjuk bizonyítani, hogy ha k természetes szám és n pozitív egész szám, akkor igaz az állítás.

Alkalmazzunk k-ra vonatkozó teljes indukciót. Tegyük fel, hogy minden természetes számra igaz az állítás k-ig, be kell látnunk, hogy $k+1$-re is igaz.

Ha a számok $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n+k+1}$, akkor az indukciós feltevés alapján az a_1, $a_2, a_3, \ldots, a_{n+k}$ számok közül kiválasztható $x \geqslant k+1$ darab, amelyeknek az összege osztható n-nel. Ha $x \geqslant k+2$, akkor az állítás igaz, ugyanezt a legalább $(k+1)+1$ darab számot ki tudjuk választani az $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n+k+1}$ számok közül is. Ha $x = k+1$, akkor vegyük ki a számhalmazból ezt a $k+1$ darab számot, az így megmaradó $b_1, b_2, \ldots, b_n$ számok közül, az indukciós feltevés miatt, szintén ki lehet választani legalább $0+1=1$ számot, úgy hogy az összegük n-nel osztható. Ezt a néhány számot és az előbb kivett $k+1$ számot összeadva szintén n-nel osztható lesz az összeg, ezért kiválasztható legalább $k+2$ darab szám.

A befejezéshez már csak azt kell igazolnunk, hogy $k=0$-ra is igaz az állítás, azaz n darab szám közül kiválasztható legalább 1 darab úgy, hogy az összegük osztható n-nel.

Ha a számok között van olyan, amelyik osztható n-nel, akkor vegyük ezt a számot.

Ha nincs közöttük n-nel osztható, akkor a számokat $a_1, a_2, \ldots, a_n$-nel jelölve tekintsük az alábbi összegek n-es maradékait:

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1, \\ S_2 &= a_1 + a_2, \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3, \\ &\vdots \\ S_n &= a_1 + a_2 + \ldots + a_n. \end{aligned}$$

Mivel mindegyik egész szám, és n-nel osztva az egész számok n-féle maradékot adhatnak, a skatulya elv miatt vagy van közöttük 0 maradékot adó, vagy van legalább két azonos maradékot adó összeg. Ha előfordul a 0 maradék, akkor találtunk néhány számot, amelyeknek az összege osztható n-nel. Ha pedig van legalább két azonos maradékú összeg, S_i és S_j $(i > j)$, akkor $S_i - S_j = a_{j+1} + a_{j+2} + \ldots + a_i$ osztható n-nel, ezért szintén találtunk közöttük olyan számokat, amelyeknek az összege osztható n-nel.

Beke Csongor (Budapest, Békásmegyeri Veres Péter Gimn., 10. évf.)
dolgozata alapján

II. megoldás. Felhasználjuk azt az ismert, és az előző megoldásban is bizonyított tényt, hogy n egész szám közül mindig kiválasztható néhány úgy, hogy az összegük osztható n-nel.

Ennek ismeretében eljárást adunk a megfelelő legalább $(k+1)$ darab egész szám megtalálására.

Válasszunk ki az $n+k$ darab egész közül n számot. Ebből az n darab egész számból azt a néhányat, amelynek összege osztható n-nel félretesszük. Ezután a megmaradó számok közül ismét kiválasztunk n darabot. Ezek közül is félretesszük azokat, amelyek összege osztható n-nel. Ezt az eljárást addig ismételjük, amíg csak lehetséges, vagyis amint az eljárás véget ér, legfeljebb $n-1$ számot nem raktunk félre. A félretett számok száma tehát legalább $(k+1)$ és olyan csoportokban tettük félre, hogy mindegyik csoport összege osztható n-nel, tehát az összesnek az összege is az n többszöröse. Ezzel az állítást igazoltuk.

Szabó Blanka (Debreceni Fazekas Mihály Gimn., 11. évf.)
dolgozata alapján

Összesen 74 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 62 tanuló, 4 pontot szerzett 2 versenyző, 3 pontos 1 dolgozat. 2 pontot kapott 5, 1 pontot 3, 0 pontot 1 tanuló.

B. 4925. *Igazoljuk, hogy ha az $a_1; a_2; \ldots; a_{2017}$ nemnegatív valós számok átlaga 1, akkor teljesül a következő egyenlőtlenség:*

$$\frac{a_1}{a_1^{2018} + a_2 + a_3 + \ldots + a_{2017}} + \frac{a_2}{a_2^{2018} + a_3 + a_3 + \ldots + a_{2017} + a_1} + \ldots + \\ + \frac{a_{2017}}{a_{2017}^{2018} + a_1 + a_2 + \ldots + a_{2016}} \leqslant 1.$$

(*4 pont*)

Megoldás. Mivel a számok átlaga 1, ezért az összegük 2017. A számok nemnegatívak, és van köztük pozitív is, ezért az egyenlőtlenség bal oldalán szereplő kifejezés értelmes, hiszen mindegyik nevezőben legalább egy pozitív összeadandó szerepel, és így valamennyi nevező pozitív.

Megmutatjuk, hogy az egyenlőtlenség bal oldalán szereplő összegben mind a 2017 összeadandó legfeljebb $\frac{1}{2017}$. Az összeg szimmetriája miatt elegendő igazolni, hogy

$$\frac{a_1}{a_1^{2018}+a_2+a_3+\ldots+a_{2017}} \leqslant \frac{1}{2017}.$$

Szorozva a pozitív nevezőkkel:

$$2017a_1 \leqslant a_1^{2018}+a_2+a_3+\ldots+a_{2017}.$$

Mindkét oldalhoz a_1-et adva, és felhasználva, hogy $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{2017}=2017$ adódik:

$$2018a_1 \leqslant a_1^{2018}+2017.$$

Osztva 2018-cal és a 2017-et szétbontva 2017 darab 1 összegére:

$$a_1 \leqslant \frac{a_1^{2018}+1+1+\ldots+1}{2018}.$$

Ez pedig a nemnegatív számok számtani és mértani közepére vonatkozó egyenlőtlenség miatt teljesül, hiszen az egyenlőtlenség bal oldalán az $a_1^{2018}, 1, 1, \ldots, 1$ számok (összesen 2018-tagú) mértani közepe, míg a jobb oldalon ugyanezen számok számtani közepe áll. Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $a_1=1$.

Ezzel igazoltuk, hogy a bizonyítandó egyenlőtlenség valamennyi törtje nem nagyobb, mint $\frac{1}{2017}$, és így a teljes összeg nem nagyobb, mint 1. Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha valamennyi a_i megegyezik 1-gyel.

Megjegyzés. A $2018a_1 \leqslant a_1^{2018}+2017$ egyenlőtlenséget változatos módon bizonyították a feladatbeküldők. Ezekből mutatunk be kettőt.

1. Az egyenlőtlenség ekvivalens a

$$2017(a_1-1) \leqslant a_1^{2018}-a_1 = a_1\left(a_1^{2017}-1\right) = a_1(a_1-1)\left(a_1^{2016}+a_1^{2015}+\ldots+a_1+1\right)$$

egyenlőtlenséggel. Itt, ha $a_1=1$, akkor nyilván az egyenlőség igaz, különben osszunk a nem nulla (a_1-1)-gyel.

Ha $a_1>1$ (nem változik az egyenlőtlenség iránya), akkor

$$2017 \leqslant a_1\left(a_1^{2016}+a_1^{2015}+\ldots+a_1+1\right)$$

nyilván teljesül, hiszen a jobb oldalon egy 1-nél nagyobb, és egy 2017-nél nagyobb szám szorzata áll (ugyanis a jobb oldali zárójelben álló 2017 tag közül 2016 nagyobb, mint 1, az utolsó pedig pontosan 1).

Ha viszont $a_1<1$ (a negatív (a_1-1)-gyel osztva megváltozik az egyenlőtlenség iránya), akkor pedig a

$$2017 \geqslant a_1\left(a_1^{2016}+a_1^{2015}+\ldots+a_1+1\right)$$

teljesül nyilván, mert ekkor a jobb oldalon egy 1-nél kisebb, és egy 2017-nél kisebb szám szorzata áll (hiszen most a jobb oldalon lévő zárójelben lévő 2017 tag közül 2016 kisebb, mint 1, az utolsó pedig pontosan 1).

2. Használjuk a következő, ún. Bernoulli-egyenlőtlenséget: Bármely valós $a \geqslant -1$ és $n \in \mathbb{N}$ számok esetén teljesül:

$$(1+a)^n \geqslant 1 + n \cdot a.$$

Az a_1-et $(1+a)$-nak (ekkor az a_i-k nemnegativitásából következik $a \geqslant -1$), valamint n-et 2018-nak választva kapjuk, hogy $a_1^{2018} \geqslant 1 + 2018(a_1 - 1) = 2018a_1 - 2017$, ami – 2017-et adva mindkét oldalhoz – éppen a bizonyítandó egyenlőtlenség.

Több dolgozat alapján

Összesen 72 dolgozat érkezett. 4 pontot kapott 61 versenyző, 3 pontos 2, 2 pontos 4, 1 pontos 4, 0 pontos további 1 tanuló dolgozata.

B. 4928. *Az égig érő fa törzse egy láb magasan kétfelé ágazik. A továbbiakban ágnak két elágazás közti részt tekintünk, amin nincs további elágazás. Az égig érő fa minden ága egyenes és egy lábbal magasabban végződik, mint a talajhoz közelebbi vége. Egy ág gyermekeinek tekintjük az ág magasabban lévő végéből kiinduló ágakat, amiket egyúttal egymás testvéreinek is nevezünk. Az égig érő fa minden ágának van legalább két gyermeke, és ha nem pont két gyermeke van, akkor van olyan testvére, akinek pontosan két gyereke van. A testvéreknek mindig különböző számú gyerekük van. Ha egy ágnak több mint két gyereke van, akkor van olyan testvére, akinek pontosan eggyel kevesebb gyereke van, mint neki. Hány ág indul ki az n láb magasan lévő elágazásokból?*

(*6 pont*) Javasolta: *Gáspár Merse Előd* (Budapest)

Megoldás. Írjuk rá minden ágra (és a törzsre), hogy hány gyermeke van. Legyen X egy ág (vagy a törzs), aminek x gyereke van. Legyen y az X gyermekeire írt számok maximuma. Legyen z az X gyermekein nem szereplő, y-nál kisebb pozitív egész számok maximuma. A z biztosan létezik, mert az 1 nem szerepelhet az ágakon. Ekkor a $z+1$ szerepel X valamelyik gyerekén. Ha $z > 1$, akkor $z + 1 > 2$, ezért a z szerepel X valamelyik gyermekén. Ez ellentmondás, ezért $z = 1$. Így a $2, 3, \ldots, y$ mind szerepelnek X gyermekein. A testvéreknek különböző számú gyermeke van, ezért ezekből pontosan egy van. Így X gyermekeinek a száma $y - 1$, tehát $y = x + 1$. Tehát az X gyermekeire írt számok a $2, 3, \ldots, x + 1$.

Vegyünk fel az ágak között egy irányított gráfot, ahol kétféle él van: az egyik fajta egy „függőleges” él, amely egy x feliratú ágtól az $x + 1$ feliratú gyermekéhez vezet, a másik fajta egy „vízszintes” él, amely egy x feliratú ágtól az $x - 1$ feliratú testvéréhez vezet, ha $x > 2$. Látható, hogy a gráfban minden ághoz pontosan egyféleképpen lehet eljutni a fa törzsétől, mert egy ágtól az összes gyermekéhez pontosan egyféleképpen lehet eljutni. Az összes ágtól pontosan egy függőleges és pontosan egy vízszintes él indul, kivéve a 2-es ágakat, ahonnan csak függőleges él indul.

Az n láb magasan induló ágak száma megegyezik az $n + 1$ láb magasan induló 2-es ágak számával, mert minden ágnak pontosan egy 2-es gyermeke van. Válasszunk ki egy $n + 1$ láb magasan induló 2-es X ágat. X-hez létezik pontosan egy útvonal a gráfban, ami a fa törzsétől indul. Nevezzük a $+$ és $-$ jelekből álló véges sorozatokat $(+/-)$ sorozatnak. Az útvonalat leírhatjuk egy $(+/-)$ sorozattal, ahol a $+$ függőleges élet jelent, a $-$ pedig vízszintes élet. Az így kapott $(+/-)$-sorozat egyértelműen meghatározza X-et. Látható, hogy egy $+$ esetén eggyel nő a jelenlegi ágra írt szám, és a $-$ esetén eggyel csökken, ahogy a sorozat alapján haladunk a gráfban. Az útvonal első és utolsó ágán is a 2 szerepel, ezért a $+$-ok és $-$-ok száma megegyezik. Az X-hez tartozó $(+/-)$ sorozat $n+1$ darab $+$ jelet tartalmaz, mert a függőleges élekkel egy lábbal nő a magasság, a vízszintes éleknél nem változik. Így a $-$-ok száma is $n+1$. Nevezzünk egy $n+1$ darab $+$ jelet és $n+1$ darab $-$ jelet tartalmazó $(+/-)$ sorozatot *jónak,* ha az első i tagja között legalább annyi $+$ van, mint $-$ mindegyik i-re. Az útvonal összes ágán a szám legalább 2, és az első ágon a szám 2, ebből könnyen látható, hogy az X-hez tartozó $(+/-)$ sorozat jó. Az is látható, hogy ha a $(+/-)$ sorozat *jó,* akkor nem fordulhat elő, hogy egy 2-es ágról egy vízszintes élen próbálunk továbblépni. Így a *jó* $(+/-)$ sorozatok száma megegyezik az n láb magasan induló ágak számával.

A *jó* sorozatokat úgy számolhatjuk meg, hogy az összes $n+1$ darab $+$-t és $n+1$ darab $-$-t tartalmazó $(+/-)$ sorozat számából levonjuk a nem jó sorozatok számát. Az összes ilyen sorozat száma $\binom{2n+2}{n+1}$. Vegyünk egy olyan sorozatot, ami nem jó. Van olyan minimális i, amelyre teljesül, hogy az első i tag között több $-$ van, mint $+$. A minimalitás miatt az első $i-1$ között között legfeljebb annyi $-$ van, mint $+$. Ez csak úgy lehet, ha az első $i-1$ tag között ugyanannyi $+$ van, mint $-$, és az i-edik tag $-$. Változtassuk meg az i-edik tag utáni összes tagot, ezt nevezzük *módosított* sorozatnak. Ha az i-edik tagot is megváltotatnánk, akkor nyilván nem változna meg a $+$-ok és $-$-ok száma (mert egyenlőek). Így a módosított sorozatban n darab $+$ van, és $n+2$ darab $-$. Látható, hogy egy n darab $+$-t és $n+2$ darab $-$-t tartalmazó sorozat esetén is van olyan i, amire az első i elem között több $-$ van, mint $+$ (mert az egész sorozatban is több van). Vegyük észre, hogy ha a minimális i-edik tag után megváltoztatjuk az összes tagot, akkor visszakapjuk az eredeti sorozatot. Így a nem jó sorozatok száma megegyezik az n darab $+$-t és $n+2$ darab $-$-t tartalmazó sorozatok számával, ami $\binom{2n+2}{n}$.

Tehát az ágak száma: $\binom{2n+2}{n+1}-\binom{2n+2}{n}$, ami az $(n+1)$-edik Catalan-szám.

Gáspár Attila (Miskolc, Földes Ferenc Gimn., 12. évf.)
dolgozata alapján

Megjegyzés. A helyes megoldást adó versenyzők többsége valamilyen ismert problémára visszavezetve eljutott oda, hogy az n láb magasan kiinduló ágak száma az $(n+1)$-edik Catalan-szám. Ezután ennek a kiszámítását már nem részletezte.

Összesen 57 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott 24 versenyző: Biczó Benedek, Busa Máté, Daróczi Sándor, Deák Bence, Dobák Dániel, Döbröntei Dávid Bence, Füredi Erik Benjámin, Gáspár Attila, Győrffy Ádám György, Győrffy Ágoston, Győrffy Johanna, Hegedűs Dániel, Hervay Bence, Janzer Orsolya Lili, Kerekes Anna, Molnár Bálint, Nagy Nándor, Noszály Áron, Póta Balázs, Schifferer András, Soós Máté, Tóth Balázs, Weisz Máté, Zsigri Bálint. 5 pontos 3, 4 pontos 2, 3 pontos 7 tanuló dolgozata. 2 pontot szerzett 5, 1 pontot 14 tanuló. 0 pontos 2 dolgozat.

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (589–593.)

Kérünk, hogy minden egyes postán küldött megoldást – feladatonként külön-külön – négyrét hajts össze (több lapból álló dolgozatokat egybe) úgy, hogy a fejléc kívülre kerüljön. A részleteket lásd a Versenykiírás Megoldások elkészítése és beküldése *részében.*

K. 589. Egy cég egy vállalkozóval nyírat le egy adott nagyságú füves területet. A vállalkozó kiszállási díja alkalmanként 5000 Ft. Ha havonta háromszor kell lenyírnia a füvet, akkor 1,8-szer annyi pénzt kér el alkalmanként munkadíjként, mint ha havonta négyszer kell lenyírni, mert az első esetben nagyobb a fű, így többet kell vele dolgoznia. Ezen feltételek mellett a megbízó cégnek jobban megéri havonta négyszer nyíratni a füvet, mint havonta háromszor. Legalább hány forint az egy alkalomra eső munkadíj havi négyszeri nyírás esetén? (Az egy alkalomra eső munkadíj havi 4 nyírás esetén 100 Ft-ra kerek összeg.)

K. 590. András, Béla és Csaba egy futóversenyen vettek részt. A verseny végén az derült ki, hogy András a célba érkezésekor 15 méterrel verte Bélát, és 35 méterrel verte Csabát, Béla pedig a célba érkezésekor 22 méterrel verte Csabát. Hány méter volt a futóverseny távja, ha a három fiú végig egyenletes tempóban futott a versenyen?

K. 591. Egy gyerekcsapat egy buszos kiránduláson vesz részt. A buszban 52 ülés van, amiből kettőn a tanárok ülnek. A maradék helyeken vagy egy gyerek ül, vagy a csomagja van. A busz csomagtartójába a gyerekek egyharmadának a csomagja fért be. Hányan voltak a kiránduló gyerekek, ha a buszban minden ülés maximálisan ki volt használva?

K. 592. Anna, Bea és Cili együtt dolgoznak egy munkán. Együtt 6 órával kevesebb idő alatt végeznek, mintha Anna egyedül dolgozott volna, 1 órával korábban végeznek, mint ha Bea egyedül dolgozott volna, és feleannyi idő alatt végeznek, mint ha Cili egyedül dolgozott volna. Ha Anna és Bea Cili nélkül dolgozna, akkor 80 perc alatt végeznének. Hány perc alatt végezné el a munkát Anna, illetve Bea külön-külön?

K. 593. Egy renitens osztály bojkottálni akarja a testnevelés órát, ezért a kislabhajításnál arra törekszenek, hogy a labdákat átdobják a kerítésen, és a labdák begyűjtéséig álljon az óra. Az osztály 1/6 része 5-5 labdát dob, fele 4-4 labdát, 1 tanuló 6 labdát, a többiek pedig 2-2 labdát. A labdák 75%-át sikerült is átdobni a kerítésen. Elég sok idő elment azzal, hogy mind a 66 kirepült labdát összeszedték, ezért a tanár büntetésből fejenként 3-3 kört futtatott az osztállyal a 200 méteres futópályán. Hány km-t futottak összesen a renitens osztály tanulói?

Beküldési határidő: 2018. október 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (1490–1496.)

Kérünk, hogy minden egyes postán küldött megoldást – feladatonként külön-külön – négyrét hajts össze (több lapból álló dolgozatokat egybe) úgy, hogy a fejléc kívülre kerüljön. A részleteket lásd a Versenykiírás Megoldások elkészítése és beküldése *részében.*

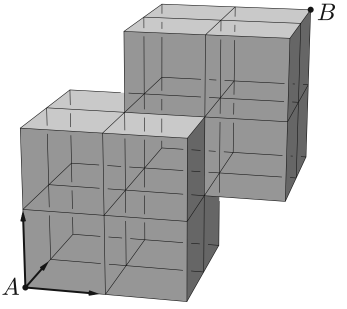
Feladatok 10. évfolyamig

C. 1490. Milyen maradékot ad az $N = 863\underbrace{99\ldots9}_{2018\text{ db}}$ (ahol a szám végén 2018 db 9-es számjegy áll) 32-vel osztva?

C. 1491. Az $ABCD$ téglalap AD oldala 1 cm hosszú. A $BAD\sphericalangle$ szögfelezője és az AC átló felező merőlegese a CD oldalon metszi egymást. Adjuk meg a CD oldal pontos értékét.

Feladatok mindenkinek

C. 1492. Hányféleképpen juthatunk el az *ábrán* látható 15 egységkockából felépített test A csúcsából a B csúcsába rácsvonalak mentén, ha csak a három megjelölt irányba haladhatunk?



C. 1493. Az egységnyi területű háromszög a, b, c oldalaira fennáll: $a \geqslant b \geqslant c$. Mutassuk meg, hogy $b \geqslant \sqrt{2}$.

C. 1494. Bizonyítsuk be, hogy ha p és q 3-nál nagyobb ikerprímek, akkor számtani közepük osztható 6-tal, a szorzatukat 1-gyel növelve pedig 36-tal osztható számot kapunk.

Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1495. Tekintsük az alábbi egyenlőségsorozatot:

$$1 + 2 = 3, \tag{1}$$

$$4 + 5 + 6 = 7 + 8, \tag{2}$$

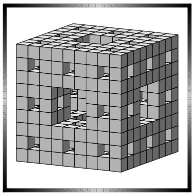
$$9 + 10 + 11 + 12 = 13 + 14 + 15. \tag{3}$$

A megfigyelt szabály alapján írjuk fel a k-adik sort és bizonyítsuk annak helyességét.

Javasolta: *Kertész Ádám* (Miami Beach)

C. 1496. Egy háromszög csúcsai körül vett 1, 2, illetve 3 cm sugarú körök páronként kívülről érintik egymást. Mekkora területet nem fednek le a körök a háromszögből?

Beküldési határidő: 2018. október 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518



A B pontversenyben kitűzött feladatok (4966–4973.)

Kérünk, hogy minden egyes postán küldött megoldást – feladatonként külön-külön – négyrét hajts össze (több lapból álló dolgozatokat egybe) úgy, hogy a fejléc kívülre kerüljön. A részleteket lásd a Versenykiírás Megoldások elkészítése és beküldése *részében.*

B. 4966. Határozzuk meg a 19. legkisebb olyan pozitív egész számot, amelyben a számjegyek összege 2018.

(*3 pont*)

B. 4967. Az $ABC\triangle$ belső pontja P, az AB oldal felezőpontja C_1, a BC oldalé A_1, a CA oldalé B_1. Húzzunk párhuzamosokat rendre az AP, BP és CP egyenesekkel az A_1, B_1, illetve C_1 pontokon keresztül. Mutassuk meg, hogy ez a három egyenes egy pontban metszi egymást.

(*3 pont*) Javasolta: *Kozma József* (Szeged)

B. 4968. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a pozitív valós számok halmazán:

$$\frac{1}{1+a+ab+abc}+\frac{1}{1+b+bc+bcd}+\frac{1}{1+c+cd+cda}+\frac{1}{1+d+da+dab}=1,$$

$$a+b+c+d=4.$$

(*4 pont*)

B. 4969. A T téglalap oldalai $a\leqslant b$. Tudjuk, hogy valamely két r sugarú kör együttesen lefedi T-t, valamint azt is tudjuk, hogy két r-nél kisebb sugarú körrel ez nem lehetséges. Határozzuk meg r-t.

(*4 pont*)

B. 4970. Adott a síkon két pont A és B, továbbá egy ezeket elválasztó e egyenes. Válasszunk az e egyenesen P és Q pontokat úgy, hogy $PAQ\sphericalangle = 90^\circ$ teljesüljön. Mutassuk meg, hogy létezik egy olyan, B-től különböző pont, amelyen a B, P és Q pontokra illeszkedő kör – a P és Q pontok választásától függetlenül – áthalad.

(*5 pont*) Javasolta: *11. C. osztály,* Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn.

B. 4971. Milyen p prímszámokhoz létezik olyan a pozitív egész, amelyre

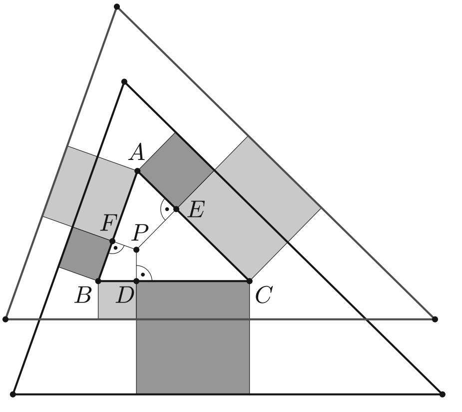
$$1 + a + a^2 + \ldots + a^{p-1}$$

osztható p^2-tel?

(*5 pont*)

B. 4972. Az ABC hegyesszögű háromszög belső P pontjának az oldalakra vett merőleges vetületei az *ábra* szerint D, E és F. Az oldalakon keletkező hat szakaszra kifelé négyzeteket rajzolunk, amiket felváltva két színnel színezünk az ábra szerint. Az azonos színű négyzetek „külső” oldalegyenesei egy-egy háromszöget határoznak meg. Mutassuk meg, hogy ez a két háromszög egybevágó.

(*6 pont*)



B. 4973. Legyenek $a_1, a_2, \ldots, a_{2018}$ olyan nemnegatív valós számok, amelyek összege 1. Adjuk meg az

$$S = \sum_{i\neq j,\ i|j} a_i a_j$$

összeg lehető legnagyobb értékét.

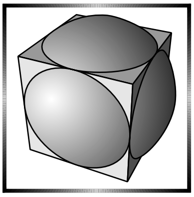
(*6 pont*) (*Argentin feladat alapán*)

Beküldési határidő: 2018. október 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

Figyelem! Az idei Kürschák József Matematikai Tanulóverseny 2018. október 5-én, pénteken 14 órakor kerül megrendezésre. A versenyzőknek előzetesen regisztrálniuk kell a versenyre, az ezzel kapcsolatos információ a

`http://bolyai.hu/kurschak.htm`

oldalon található.



Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (728–730.)

Kérünk, hogy minden egyes postán küldött megoldást – feladatonként külön-külön – négyrét hajts össze (több lapból álló dolgozatokat egybe) úgy, hogy a fejléc kívülre kerüljön. A részleteket lásd a Versenykiírás Megoldások elkészítése és beküldése *részében.*

A. 728. Egy bolha ugrál a pozitív egész számokon. Első nap tetszőleges pozitív egészre ugorhat. Ezután minden nap átugrik egy olyan számra, amely legfeljebb kétszerese az előző napi állomáshelyének.

a) Mutassuk meg, hogy a bolha megtehet végtelen sok ugrást úgy, hogy soha ne érkezzen olyan számra, amelynek a tízes számrendszerbeli jegyeinek összege megegyezik egy korábbi állomáshelyén vett jegyösszeggel.

b) Tud-e így ugrálni, ha a számok kettes számrendszerbeli alakjában vizsgáljuk a számjegyek összegét?

Dürer verseny (2015)

A. 729. Az $ABCD$ húrnégyszög átlóinak metszéspontja E, az AB oldal felezőpontja F, és az E pont merőleges vetületei a DA, AB és BC egyeneseken rendre P, Q, illetve R. Igazoljuk, hogy a P, Q, R és F pontok egy körre illeszkednek.

Javasolta: *Weisz Máté* (Szeged)

A. 730. Legyen F_n az n-edik Fibonacci-szám ($F_1=F_2=1$, $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$). Konstruáljunk végtelen sok olyan n pozitív egész számot, amelyre F_{F_n} osztható n-nel, de F_n nem osztható n-nel.

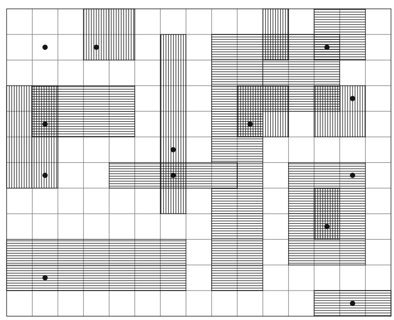
Beküldési határidő: 2018. október 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

Informatikából kitűzött feladatok

I. 460. Egy téglalap alakú üveglapra gondolatban egy $N\times M$-es ($10\leqslant N,M\leqslant 10\,000$) négyzethálót helyezünk. Az üveglapot rá merőlegesen P ($0\leqslant P\leqslant N\times M$) pontban egy-egy nem polarizált fénysugárral megvilágítjuk úgy, hogy minden fénysugár pontosan egy négyzetre essen. Az üveglapra K ($0\leqslant K\leqslant 1\,000$) darab különböző szélességű és hosszúságú, téglalap alakú polárszűrőt helyezünk el úgy, hogy oldalaik a négyzetháló rácsvonalaira esnek. A polárszűrők érintkezhetnek és átfedhetik egymást, de a lapról nem lóghatnak le. Kétféle polárszűrő van: az egyik a beérkező fényt az üveglap felső oldalával párhuzamosan, a másik arra merőlegesen polarizálja. Az a fénysugár, amely két, egymásra merőlegesen polarizáló polárszűrőre esik, nem jut át az üveglapon.

Készítsünk programot `i460` néven, amely a következő problémákat oldja meg.

A program olvassa be a standard input első sorából N-et, M-et, P-t és K-t. A következő P sorból a megvilágított négyzetek bal alsó sarkának koordinátáit, utána K sorból a polárszűrők bal alsó, illetve jobb felső sarkának koordinátáit és a polarizációt (p vagy m). A koordináták egész számok, az üveglap bal alsó sarkának koordinátái $1,1$. A program írja a standard output egymás utáni három sorába a következő feladatok megoldását:



– soroljuk fel a beolvasás sorrendjében azoknak a fényforrásoknak a sorszámát, amelyek fénye nem jut át az üveglapon a polárszűrők miatt;

– adjuk meg, hány olyan négyzet van, amelyet nem világítunk meg, de a polárszűrők miatt nem átlátszó;

– adjuk meg, melyek azok a polárszűrők, amelyeket eltávolítva a fénysugarak átlépése nem változik (több lehetséges megoldás esetén elég egyet megadni).

Példa:

Standard bemenet (a / jel újsor karaktert jelöl):	**Standard kimenet:**
15 12 13 15 2 2 / 2 6 / 2 8 / 2 11 / 4 11 / 7 6 / 7 7 10 8 / 13 4 / 13 11 / 14 1 / 14 6 / 14 9 1 2 8 4 p / 1 6 3 10 m / 2 8 6 10 p / 4 11 6 13 m 5 6 10 7 p / 7 5 8 12 m / 9 2 11 11 p / 9 9 14 12 p 10 8 12 10 m / 11 11 12 13 m / 12 3 15 7 p / 13 1 16 2 p 13 4 14 6 m / 13 8 15 10 m / 13 11 15 13 p	3 6 7 8 6 1 4 8 12

Beküldendő egy tömörített `i460.zip` állományban a program forráskódja és rövid dokumentációja, amely megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

I. 461 (É). Hanna és Panna palacsintázót üzemeltet. Szeretnének mindenkit friss palacsintával kiszolgálni, ezért a hozzávalókat egész napra előre elkészítik, és a palacsintát magát akkor sütik, ha valaki éppen kér. A vevő belép az üzletbe, rendel, és rendelését – a többiek rendelésének teljesítése után – azonnal elkészítik.

Feladatunk, hogy ezt a folyamatot táblázatkezelővel modellezzük. Ehhez egy munkafüzet négy munkalapját használjuk. A Vásárlás munkalap tartalmazza a vevő érkezési idejét, a rendelés adatait, a fizetett összeget és a kiszolgálás időpontját. A Palacsinták munkalapon a palacsinták ízesítése, ára és az a darabszám szerepel, amennyihez elegendő töltelék áll rendelkezésre. Az Üzleti adatok munkalap tartalmazza a nyitás és zárás időpontját, valamint a Vásárlás munkalap kapcsán lentebb említett T, Db, t értékeket. A Segéd munkalapon a feladat megoldásához szükséges segédszámításokat végezhetjük.

A Vásárlás munkalap kitöltését az alábbiak szerint készítsük, legfeljebb 1000 vásárlóra számítva:

1. Az **érkezés** oszlopban a vevők belépési időpontja szerepel. Az időpontokat véletlenszerűen állítsuk elő. A vevők nyitástól zárásig legfeljebb másodpercnyi sűrűséggel követhetik egymást, de feltételezhetjük, hogy T percnél tovább nem marad új vásárló nélkül az üzlet.
2. A **darabszám** oszlop a vevő által rendelt mennyiséget tartalmazza. Egy vevő csak egyfajta palacsintát kérhet, abból is legfeljebb Db darabot. Értékét véletlenszerűen kell előállítanunk.
3. Az **ízesítés** oszlopban jelenjen meg, hogy milyen ízesítésűt választott. Értékét véletlenszerűen állítsuk elő úgy, hogy a Palacsinta munkalapon szereplő minden ízesítésnek azonos valószínűsége legyen.
4. A **fizetés** oszlopban a rendelt darabszámtól és ízesítéstől függő értéket kell megjelenítenünk. Figyelembe kell vennünk azonban, hogy ha az adott ízesítésű palacsintához már nem áll rendelkezésre elegendő töltelék, akkor csak az elkészített palacsinták után fizet a vevő.
5. A **kiszolgálás** oszlopban a kiszolgálás időpontját kell meghatároznunk az alábbiak ismeretében. A palacsintákat egyesével, egymás után sütik. Egy palacsinta elkészítéséhez szükséges idő t másodperc. Sütése akkor kezdődik el, ha minden korábbi vevő kiszolgálása megtörtént. A betérő vásárló biztosan kivárja a sorát, valamint ha zárás előtt lépett az üzletbe, biztosan kiszolgálják. A rendelés, fizetés időigényétől eltekintünk.
6. A Vásárlás munkalapon csak a zárás előtt érkező vásárlók sorainak adatai jelenjenek meg. Annak a vásárlónak a sora, aki utoljára kapott a választott ízesítésből, sárga, akit pedig egyáltalán nem tudtak kiszolgálni, szürke háttérrel látszódjon.

A számítások során egész másodpercekkel dolgozzunk, a számot tartalmazó cellákban egész értékek szerepeljenek.

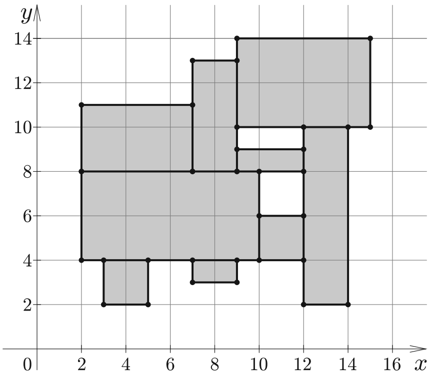
Beküldendő egy `i461.zip` tömörített állományban a megoldást tartalmazó `i461` munkafüzet és a dokumentációt magában foglaló `i461.pdf` fájl. A dokumentáció tartalmazza a használt táblázatkezelő nevét és verziószámát.

I. 462. Az irodai munkában gyakran előfordul, hogy ugyanazt a részfeladatot számtalanszor kell végrehajtani. A „rabszolgamunka" automatizálásával sok időt lehet megspórolni. Egy ilyen gyakran ismétlődő probléma, hogy egy munkafüzet lapjain található adatok alapján kell diagramot készíteni.

Jelen feladatban legfeljebb 100 munkalappal kell dolgoznunk. Minden munkalap első sora tartalmazza a kategóriák nevét, az első oszlop pedig az adatsorok feliratát. A munkalapok legfeljebb 12 sornyi és 12 oszlopnyi adatot tartalmaznak. Az összes munkalapra kell készítenünk egy halmozott oszlopdiagramot az ott található adatokból. A diagram címe az A1-es cella tartalma legyen. Az összes diagramot egyetlen makróindítással kell elkészítenünk.

Beküldendő egy `i462.zip` tömörített állományban a megoldást tartalmazó `i462` munkafüzet és a dokumentációt magában foglaló `i462.pdf` fájl. A dokumentáció tartalmazza a használt táblázatkezelő nevét, verziószámát és a megoldást jelentő makró(k) lényeges elemeinek magyarázatát és indításának módját.

I/S. 28. Egy hatalmas telekre sportkomplexumot terveznek. A telekre gondolatban egy koordináta-rendszert helyeznek. A kialakítandó N darab sportpálya mind téglalap alakú, oldalaik a koordináta-rendszer tengelyeivel párhuzamosak. Ismerjük minden pálya két szemközti csúcsának koordinátáit. A pályáknak nincs közös területe, de oldalaik érintkezhetnek egymással. A tervek szerint két pálya között pontosan akkor készül majd átjáró, ha legalább D hosszú szakaszon érintkeznek egymással. Egy pálya egy oldalát a vele érintkező más pályák több szakaszra osztják (ha nem, akkor a teljes oldalt egy szakasznak tekintjük). Vegyük azokat a szakaszokat, amik a külső térre néznek, vagyis nem részei más pálya oldalának. Egy-egy ilyen, legalább D hosszú szakaszra bejáratot terveznek. Adjuk meg, hogy a sportkomplexum tervében összesen hány bejárat és hány átjáró van.



Bemenet: az első sor a pályák N számát és a D hosszúságot tartalmazza. A következő N sor mindegyike négy egész számot tartalmaz: egy-egy pálya két szemközti csúcsának koordinátáit.

Kimenet: egy sorba írjuk ki az átjárók, aztán a bejáratok számát.

Bemenet (a / jel sortörést helyettesít)	**Kimenet**
9 2 2 8 10 4 / 7 13 9 8 / 9 9 12 8 / 10 6 12 4 / 12 10 14 2 9 14 15 10 / 2 11 7 8 / 3 4 5 2 / 7 4 9 3	9 22

Korlátok: $1 \leqslant N \leqslant 10^5$, $-10^9 \leqslant$ koordináták $\leqslant 10^9$, $1 \leqslant D \leqslant 10^9$, egész számok.

Értékelés: a pontok 20%-a kapható, ha $D = 1$; további 20% kapható, ha a pályák 1×1-es négyzetek; további 20% kapható, ha $N \leqslant 1000$; további 40% kapható az eredeti korlátokra.

Időlimit: 0,3 mp, memórialimit: 100 MiB.

S. 127. Egy országban N darab város van, amiket kétirányú utak kötnek össze. Az úthálózatra teljesül, hogy bármelyik városból bármelyikbe el lehet jutni. Két város között legfeljebb egy közvetlen út van. Minden útra adott egy súlykorlátozás, hogy rakománnyal együtt legfeljebb mekkora tömegű teherautó mehet rajta. Egy áruszállító cég nyersanyagokat szállít városok között. A cégnek nem számít, hogy két város között a szállítás milyen hosszú úton történik, de a lehető legtöbb nyersanyagot szeretnék elvinni egy-egy teherautóval. Adott Q darab várospár, amik között nyersanyagot kell szállítani. Minden várospárra adjuk meg, hogy legfeljebb milyen nehéz lehet a teherautó szállítmánnyal.

Bemenet: az első sor tartalmazza a városok N számát, az utak M számát és a várospárok Q számát. A városokat 0-tól $(N-1)$-ig indexeljük. A következő M sor mindegyike három számot tartalmaz: egy adott út mely városokat köt össze, és mekkora rá a súlykorlátozás. A következő Q sor mindegyike két számot tartalmaz: egy adott várospár indexeit, amik között szállítani kell.

Kimenet: Q sor mindegyikébe egy számot írjunk: azt a maximális súlyt, amilyen nehéz teherautó indulhat az adott várospár között.

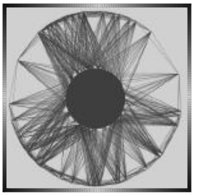
Bemenet (a / jel sortörést helyettesít)	Kimenet
6 7 5 5 1 2 / 1 0 3 / 1 4 4 / 2 3 5 / 2 1 3 / 3 4 6 / 0 3 2 1 4 / 0 3 / 3 5 / 2 4 / 2 0	4 / 3 / 2 / 5 / 3

Korlátok: $2 \leqslant N, Q \leqslant 10^5$, $N-1 \leqslant M \leqslant 5 \cdot 10^5$, $1 \leqslant$ súlykorlátok $\leqslant 10^9$, egész számok.

Értékelés: a pontok 20%-a kapható, ha egy útra a súlykorlát csak 1 vagy 2 lehet; további 20% kapható, ha $N \leqslant 100$; további 20% kapható, ha $M \cdot Q \leqslant 10^6$; további 40% kapható az eredeti korlátokra.

Időlimit: 0,7 mp, memórialimit: 100 MiB.

A feladatok megoldásai regisztráció után a következő címen tölthetők fel:
`https://www.komal.hu/munkafuzet`
Beküldési határidő: 2018. október 10.



Négy érem a 49. Nemzetközi Fizikai Diákolimpián

(Lisszabon, Portugália, 2018. július 21–29.)

A magyar csapat 1 ezüst-, 3 bronzéremmel és egy dicsérettel végzett a Lisszabonban július 21. és 29. között megrendezett versenyen. Az országok közötti nemhivatalos pontversenyben Magyarország 89 ország közül a 22. helyet szerezte meg.

A csapat és eredményeik:

Németh Balázs (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. oszt.) *ezüstérem* (32,8 pont), felkészítő tanárai: *Csefkó Zoltán* és *Dvorák Cecília*;

Szakály Marcell (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. oszt.) *bronzérem* (26,3 pont), felkészítő tanárai: *Csefkó Zoltán* és *Dvorák Cecília*;

Marozsák Tóbiás (Óbudai Árpád Gimnázium, 12. oszt.) *bronzérem* (25,2 pont), felkészítő tanárai: *Mezei István* és *Gärtner István;*

Elek Péter (Debreceni Ref. Koll. Dóczy Gimnáziuma, 11. oszt.) *bronzérem* (19,25 pont), felkészítő tanára: *Tófalusi Péter;*

Hajdú Csanád (Budapest, Eötvös József Gimn., 12. oszt.) *dicséret* (16,2 pont), felkészítő tanára: *Gulyás Erzsébet.*

Az országok közötti nemhivatalos verseny (pont- és éremtáblázat, az első 30 helyezett):

	Ország	**Pontszám**		**Ország**	**Pontszám**
1.	Kína	209,15	16.	Franciaország	145,85
2.	Dél-Korea	195,40	17.	Indonézia	142,80
3.	Oroszország	190,55	18.	Ukrajna	141,13
4.	India	189,65	19.	Irán	140,45
5.	Szingapúr	177,35	20.	Brazília	130,50
6.	USA	176,60	21.	Egyesült Királyság	129,60
7.	Tajvan	172,95	**22.**	**Magyarország**	**119,75**
8.	Vietnam	165,70	23.	Németország	116,25
9.	Thaiföld	165,05	24.	Észtország	115,25
10.	Izrael	163,50	25.	Ausztrália	113,10
11.	Törökország	161,05	26.	Olaszország	113,00
12.	Japán	159,70	27.	Fehéroroszország	110,60
13.	Románia	150,85	28.	Bulgária	110,50
14.	Szerbia	150,40	29.	Kazahsztán	106,70
15.	Hongkong	146,55	30.	Csehország	102,90

	Ország	**Arany-érem**	**Ezüst-érem**	**Bronz-érem**	**Dicséret**
1.	Kína	5			
2.	India	5			
3.	Dél-Korea	4	1		
4.	Oroszország	4	1		
5.	Szingapúr	4	1		
6.	Tajvan	4	1		
7.	USA	3	2		
8.	Izrael	2	3		
9.	Vietnam	2	2	1	
10.	Thaiföld	1	4		
11.	Törökország	1	4		
12.	Japán	1	4		
13.	Franciaország	1	4		
14.	Hongkong	1	3	1	
15.	Románia	1	2	2	
16.	Indonézia	1	1	3	
17.	Ausztrália	1		2	2
18.	Spanyolország	1		2	1
19.	Szerbia		5		
20.	Ukrajna		3	2	
21.	Irán		3	2	
22.	Fehéroroszország		2	2	1
23.	Németország		2	1	2
24.	Észtország		2	1	2
25.	Bulgária		2	1	2
26.	Dánia		2	1	
27.	Tádzsikisztán		2	1	
28.	Brazília		1	4	
29.	Egyesült Királyság		1	4	
30.	**Magyarország**		**1**	**3**	**1**

Az olimpiára való készülés szokás szerint a budapesti (*Szász Krisztián, Tasnádi Tamás, Vankó Péter, Vigh Máté*), a miskolci (*Zámborszky Ferenc*), a pécsi (*Kotek László*), a szegedi (*Hilbert Margit, Sarlós Ferenc*) és a székesfehérvári (*Orosz Tamás, Ujvári Sándor*) olimpiai szakkörökön, valamint a BME Fizika Tanszékén szervezett mérési foglalkozásokon kezdődött. A csapatot a szakkörök résztvevői és az országos versenyeken kimagasló eredményeket elért tanulók közül a márciusban megrendezett, kétfordulós *Kunfalvi Rezső versenyen* válogattuk ki. A résztvevőknek a versenyen az olimpián szokásos stílusú és nehézségű elméleti és mérési feladatokat kellett megoldaniuk. Az egymást követő fordulók – az olimpiához hasonlóan – a versenyzők fizikai állóképességét is próbára tették. A csapat kiválasztásánál a válogatóversenyen elért eredmény mellett a korábbi versenyeredményeket és a KöMaL mérési versenyében elért eredményt is figyelembe vettük.

A felkészülés első lépéseként a csapat tagjai részt vettek a II. Európai Fizikai Diákolimpián (EuPhO, Dolgoprudnij, Moszkvai terület, Oroszország, 2018. május 28.–június 1., `http://eupho2018.mipt.ru`). A versenyen Szakály Marcell aranyérmet, Marozsák Tóbiás ezüstérmet, Elek Péter bronzérmet, Németh Balázs és Hajdú Csanád dicséretet kapott. Ezt követte egy kétnapos felkészítés a BME Fizikai Intézetében. (A hagyományos Román-Magyar Előolimpia idén nem került megrendezésre.)

A csapat Vankó Péter (BME Fizikai Intézet) és Tasnádi Tamás (BME Matematikai Intézet) csapatvezetőkkel, valamint *Sarkadi Tamás* (BME Fizikai Intézet) megfigyelővel július 21-én, szombaton hajnalban indult volna Lisszabonba, azonban a repülőtéren kiderült, hogy a járatot törölték. Így csak 15 óra késéssel, éjszaka érkeztünk meg a szálláshelyekre. Vasárnap délelőtt volt a megnyitó, a csapatvezetők ezután vitatták meg és fordították le (reggelig tartó munkával) a mérési feladatokat, amelyeket a versenyzőknek másnap (hétfőn) kellett megoldaniuk.

Az első mérési feladatban a versenyzők különböző térvezérlésű tranzisztorok karakterisztikáit mérték meg. A feladat érdekessége az volt, hogy a feszültségosztó áramkörök, az ellenállások és az egyik tranzisztor is egy papírlapra volt nyomtatva. A versenyzők ezüst vezetőtintás tollal további összekötő vezetékeket, grafitceruzával pedig ellenállásokat rajzolhattak. Csak a telep, a multiméter és egy JFET tranzisztor nem volt a lapon, ezeket krokodilcsipeszes vezetékekkel lehetett a papír áramkörhöz csatlakoztatni.

A második mérési feladatban egy különleges műanyag szál mechanikai tulajdonságait vizsgálták, mely egyszerre mutat a Hooke-törvénynek megfelelő rugalmas viselkedést, valamint belső súrlódásra utaló viszkózus tulajdonságokat. A szál megfeszítésekor fellépő erő időbeli változása alapján következtetni lehetett a szál viszkózus és elasztikus anyagi paramétereire. A mérési feladat különös nehézsége, hogy a szál „egyszer használatos” volt, hiszen viszkózus tulajdonságai miatt maradandó alakváltozást szenvedett a mérés során. Hibás mérés esetén tehát sok időt veszíthetett a versenyző. A csapat tagjai azonban jól végezték el a mérést, a nehézséget többnyire csak a mérési adatok kiértékelése jelentette.

Mindkét mérési feladat érdekes volt, az eszközök ötletesek és jól kivitelezettek. Azonban a két mérés együtt rengeteg, 5 óra alatt elvégezhetetlen mennyiségű, többnyire mechanikus munkát igénylő részfeladatból állt (még a mezőnyt magasan verő, abszolút győztes kínai diák se tudta végigmérni). A magyar csapatnak nem kedvezett ez a stílus, az időhiány miatt a feladatoknak csak kisebb részét tudták megoldani.

A csapatvezetők kedden folytatták a munkát: reggeltől éjszakáig megvitatták és lefordították az elméleti feladatokat.

Az első elméleti feladat a gravitációs hullámok detektálásáról szólt. A Földön keresztülhaladó gravitációs hullámokat a tudománytörténetben legelőször 2015. szeptember 14-én figyelték meg a speciálisan erre a célra épített LIGO (Laser Interferometer Gravitational-wave Observatory) csillagászati obszervatóriumban. Az észlelt eseményt két egymás körül egyre kisebb sugarú spirálpályán keringő fekete lyuk összeütközése váltotta ki. A versenyzők a LIGO által észlelt jelből – a feladatban adott útmutatások alapján – az összeütköző égitestek tömegére, sugarára következtettek. Először a klasszikus fizika keretein belül a gravitációs kéttestproblámát körpályák esetében tanulmányozták. Az általános relativitáselmélet szerint a vizsgált kéttestrendszer gravitációs hullámokat bocsát ki, így az energiája folyamatosan csökken; a két égitest egymáshoz egyre közelebb kerül, és a keringés szögsebessége felgyorsul. A feladat második részében a LIGO detektorai által észlelt, növekvő frekvenciájú jelből lehetett következtetni a forrásként szolgáló égitestek paramétereire. Ez a rész tartalmazott hosszabb számításokat, amik a feladatban szereplő útmutatások segítségével megoldhatóak voltak. A magyar diákok többsége jó eredménnyel birkózott meg ezzel a feladattal.

Érdekességként megjegyezzük, szinte csodának számít, hogy az emberiség képes volt a gravitációs hullámok közvetlen észlelésére. Ehhez ugyanis az interferométer karjának hosszváltozását 10^{-21} relatív hibával kellett megmérni, ami olyan, mintha a Föld–Alfa Centauri távolságot egy hajszál vastagságnyi pontossággal határoznánk meg. A gravitációs hullámok kutatásában több magyar csoport is részt vesz.

A második elméleti feladat témáját a CERN kutatóközpontban működő Nagy Hadronütköztető (LHC) részecskegyorsító ATLAS-detektora adta. A gyorsított hadronok a henger alakú detektor tengelyén haladva ütköznek egymással. Az ütközés eredményeképp keletkező részecskék pedig a detektor tengelyével párhuzamos, homogén mágneses térben mozognak. A feladat első részében a versenyzők a detektor terében mozgó, nagy energiájú elektron mozgását ultrarelativisztikus közelítésben vizsgálták, illetve megbecsülték a görbe vonalú pályán mozgó, gyorsuló részecske által kisugárzott energia mennyiségét is. A második részben a versenyzők két proton ütközésekor keletkező részecskék ATLAS-detektor által mért adatai alapján határozták meg az ugyancsak az ütközés során keletkező, a detektor által nem érzékelhető neutrínó impulzusát. A témakör nehezen megfogható elméleti hátterét ellensúlyozta, hogy a feladat szövege több hasznos formulát is a diákok rendelkezésére bocsájtott. A nehézséget legtöbbször a relativisztikus formulák számolástechnikai körülményessége okozta.

A harmadik feladat két biológiai kérdéssel foglalkozott: a hajszálerek véráramlását és (ettől nem teljesen függetlenül) a daganatok növekedését vizsgálta. A szétágazó érhálózatban viszkózusan, de a szív dobogása miatt nem egyenletesen folyó vért egy váltóáramú hálózattal modellezték. A daganatok növekedése a szöveten belüli nyomás növekedésével jár, amely akár a daganatot tápláló hajszálerek elzáródásához is vezethet. A rákterápia egyik lehetséges módja a daganatsejtek szelektív melegítése, amely szintén azok elpusztítását eredményezheti. A feladatban ezekkel kapcsolatos számításokat végeztek a versenyzők. A feladat nem okozott nagyobb nehézségeket, de a magyar csapat tagjai közül csak egy versenyzőnek maradt elég ideje, hogy – lényegében hibátlanul – végigszámolja ezt a problémát.

Szerda délelőtt, a mérési fordulóhoz hasonlóan, a versenyzőknek ismét 5 órájuk volt a feladatok megoldására. A szokásos rend szerint a csapatvezetők és a rendezők is kijavították a dolgozatokat, megállapították a ponthatárokat (idén 35 ponttól arany-, 27,2 ponttól ezüst-, 17,8 ponttól bronzérmet, 14,05 ponttól pedig dicséretet lehetett kapni), majd ezt követte a végső pontszámokat kialakító egyeztetés (az úgynevezett moderáció).

A két forduló között és a verseny után a szervezők különböző programokat szerveztek. A múzeumokon, előadáson, játékokon kívül a diákok Óbidosban, Alcobaçában, Nazaréban, Belémben és Estorilban jártak, a tanárok pedig Évorába és Sintrába utaztak. A maradék szabad idő alig volt elég felfedezni Lisszabon hihetetlenül izgalmas belvárosát. Az építészetileg is változatos fővárosban éjjel-nappal pezsgő az élet. A nagyon bonyolult domborzatú város szűk utcáin 900 mm-es nyomtávú, apró villamosok kanyarognak, néhány meredek utcán pedig sikló közlekedik. A házak közül hirtelen gyönyörű kilátóteraszokra lehet érkezni, ahonnan belátható a Tejo sok kilométer széles tölcsértorkolata, a folyót átívelő hatalmas *Április 25. híd* és mögötte, távolabb az Atlanti-óceán. A verseny idejére esett egy teljes holdfogyatkozás, amelyet – bár Lisszabonban már a teljesség beállta után kelt csak fel a Hold – megcsodálhatott a csapat. Ezt egészítette ki esténként az egyszerre a horizont felett lévő négy legfényesebb bolygó (keletről nyugatra az épp szembenállásban lévő, különösen fényes Mars, a Szaturnusz, a Jupiter és a Vénusz) látványa.

Szombat délelőtt került sor a díjkiosztóra, majd a záróvacsorára. A csapat július 29-én délután érkezett haza.

Köszönettel tartozunk az Emberi Erőforrások Minisztériumának és a BME Fizikai Intézetnek.

Jövőre az olimpiát Izraelben (Tel Avivban) rendezik meg július középén. A versenyre való felkészülést négy vidéki szakkör, valamint a budapesti elméleti és mérési szakkör segíti (a szakkörökről a legátfogóbb információ a `http://ipho.elte.hu` honlapon található):

Székesfehérvár: *Orosz Gábor* (Óbudai Egyetem Alba Regia Műszaki Kar, Székesfehérvár, Budai út 45.),

Szeged: *Hilbert Margit* (Szegedi Tudományegyetem, Dóm tér 9. I. em. Budó Ágoston terem),

Pécs: *Kotek László* (Pécsi Tudományegyetem, Fizikai Intézet, Ifjúság útja 6. II. em. A408-as terem),

Miskolc: *Zámborszky Ferenc* (Földes Ferenc Gimnázium, 3525 Miskolc, Hősök tere 7.),

Budapest: *Vankó Péter* (Budapest, BME, Fizikai Intézet, 1111 Budafoki út 8. Fizikus Hallgatói labor, F épület, III. lépcsőház, II. emelet). Az elméleti szakkört hétfőnként 3-tól 5 óráig tartjuk, jelentkezni nem kell, az első foglalkozás 2018. szeptember 24-én lesz. Info: `http://eik.bme.hu/~vanko/labor/Bpszakkor.pdf`.

A tehetséggondozó mérési szakkörre írásban jelentkezni kell (erről lásd még külön felhívásunkat). Info:

`http://eik.bme.hu/~vanko/labor/Tehetseggondozas.pdf`.

A fenti szakkörökön való *aktív* részvétel mellett elsősorban önálló munkával, a KöMaL elméleti és mérési feladatainak rendszeres megoldásával lehet készülni a jövő évi Fizikai Diákolimpiára.

Eredményes felkészülést kívánunk!

Sarkadi Tamás, Tasnádi Tamás és **Vankó Péter**

Tehetséggondozás
Mérési szakkör a BME Fizikai Intézetében

A fizika iránt érdeklődő, tehetséges középiskolás diákok számára a BME Fizikai Intézet gyakorlati foglalkozásokat tart. A foglalkozásokon lehetőséget biztosítunk arra, hogy a tanulók mérőpárokban fizikai kísérleteket és méréseket végezhessenek. A foglalkozásokra októbertől kezdődően kéthetente, kedden 15.00-tól 18.00-ig kerül sor, összesen nyolc alkalommal. Információ: `http://mono.eik.bme.hu/~vanko/labor/Tehetseggondozas.pdf`.

Az érdeklődők e-mail-ben jelentkezhetnek **2018. szeptember 30-ig** az alábbi címen: `vanko@eik.bme.hu`.

Elsősorban a gimnáziumok utolsó két évfolyamára járók jelentkezését várjuk. A jelentkezők írjanak pár sort magukról, ismertessék a fizika és a matematikai tanulmányaik során elért eredményeiket (versenyeredmények, KöMaL szereplés, stb.), és továbbtanulási elképzeléseiket.

A foglalkozások ingyenesek! Minden jelentkezőt e-mail-ben értesítünk (aki nem kap választ, küldje el még egyszer a jelentkezését).

Vankó Péter

EuPhO '18

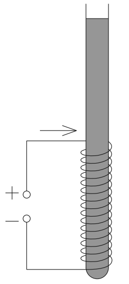
A 2. Nemzetközi Európai Fizikai Diákolimpia (EuPhO) elméleti feladatai

(Dolgoprudnij, Oroszország, 2018. május 28.–június 1.)

1. feladat. Három golyó. Három (A, B és C jelű) kicsi, egyforma, m tömegű golyó két elhanyagolható tömegű, ℓ hosszúságú rúddal van összekötve úgy, hogy az egyik rúd az A és B golyót, a másik rúd a B és C golyót kapcsolja össze. A B golyónál a kapcsolódás csuklós, így a rudak közötti szög akadálytalanul változhat. A rendszer a súlytalanság állapotában nyugalomban van, és a három golyó egy egyenes mentén helyezkedik el.

Az A golyónak pillanatszerűen a rudakra merőleges sebességet adunk. Mekkora lesz a rendszer ezt követő mozgása során az A és C golyók közötti minimális d távolság? (A súrlódás mindenhol elhanyagolható.)

2. feladat. Szolenoid. Egy $\ell = 20$ cm hosszúságú szolenoid egy üvegből készült, vízzel töltött, függőleges kémcső köré van tekercselve. A szolenoid termikusan el van szigetelve a víztől. A vízszint körülbelül $\ell = 20$ cm magasan van a szolenoid felső vége fölött, a kémcső átmérője 1 cm, a tekercs menetszáma $N = 6000$. A légköri nyomás $p_0 = 101$ kPa, a víz hőmérséklete 293 K. A víz mágneses szuszceptibilitása $\chi \equiv \mu_r - 1 = -9{,}04 \cdot 10^{-6}$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m.

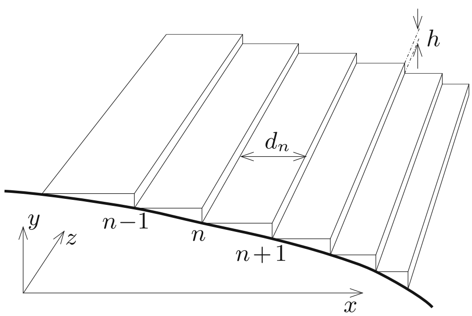


A szolenoidon átfolyó áramot lassan növeljük amíg a tekercsben lévő víz forrni kezd. Mekkora áramerősségnél következik ez be? Ha szükséges, észszerű közelítések használata megengedett. Vegyük észre, hogy ez az áramerősség a mai technológia számára kissé nagy.

3. feladat. Lépcső. A testek egyensúlyi alakját gravitációmentes esetben a felületi energia minimuma határozza meg. Így például a vízcsepp egyensúlyi alakja gömb lesz, mert az azonos térfogatú testek közül a gömbnek a legkisebb a felszíne.

Alacsony hőmérsékleten a kristályok egyensúlyi alakja síklapokból állhat. A kristály felületének az a része, amely egy kicsiny φ szöget zár be egy ilyen síklappal, a valóságban egy, a síklapon ritkásan elhelyezkedő fokokból álló lépcső. A fokok magassága megegyezik a kristályrács h periódusával.

Az *ábra* egy bizonyos kristály $y(x)$ egyensúlyi felületprofilját és a hozzá tartozó mikroszkopikus lépcsőt ábrázolja vázlatosan, ahol n jelenti a lépcső sorszámát az $x = 0$ helytől számolva. A profil alakja $x > 0$ esetén az $y(x) = -(x/\lambda)^{3/2} h$ függvénnyel közelíthető, ahol $\lambda = 45$ μm és $h = 0{,}3$ nm.



a) Fejezzük ki a szomszédos lépcsők közötti d_n távolságot n függvényében $n \gg 1$ esetében!

b) Két lépcső E kölcsönhatási energiája függ a lépcsők közötti d távolságtól:

$$E(d) = \mu\, d^{\nu}, \tag{1}$$

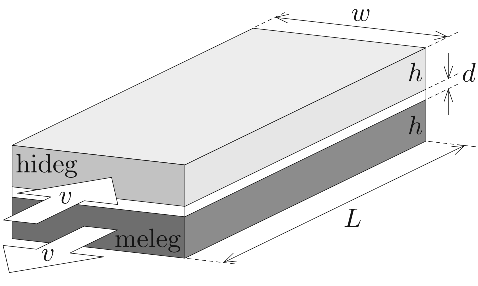
ahol μ egy állandó. Tegyük fel, hogy csak a szomszédos lépcsők között van kölcsönhatás. Határozzuk meg a ν együttható numerikus értékét!

A 2018. évi Kunfalvi Rezső olimpiai válogatóverseny néhány elméleti feladata[1]

Hőcserélő

A hőcserélő olyan eszköz, amelyben egy meleg és egy hideg (folyékony vagy légnemű) közeg között hőcsere jön létre. Az eszközt igen széles körben alkalmazzák fűtési rendszerekben és erőművekben.

Az *1. ábrán* látható hőcserélő két L hosszúságú, téglalap keresztmetszetű csőből áll, melyek szélessége w, magassága h. A két csövet d vastagságú, λ hővezetési tényezőjű fémlap választja el egymástól. A *kezdetben* meleg közeg az alsó csőben áramlik v sebességgel jobbról balra, míg a *kezdetben* hideg közeg a felső csőben áramlik ellentétes irányban (balról jobbra) ugyancsak v sebességgel. Mindkét közeg térfogategységre eső hőkapacitása c.



1. ábra

A hőcserélőbe való belépéskor a meleg közeg hőmérséklete ΔT_{be} értékkel magasabb, mint a belépő hideg közegé. Amikor a közegek elhagyják a hőcserélőt, a közöttük lévő hőmérséklet-különbség ΔT_{ki}-re csökken. Feltételezzük, hogy mindkét csőben a hőmérséklet csak hosszanti irányban változik, és hőátvitel csak a fémlapban való hővezetéssel, valamint a közegek mozgásával történik.

Igazoljuk, hogy a fenti feltevések mellett a hőmérséklet úgy változik mindkét csőben hosszirányban, hogy a fémlap két oldalán a hőmérséklet-különbség mindenütt állandó!

Határozzuk meg a ΔT_{ki} kilépési hőmérséklet-különbséget a megadott paraméterek függvényében! Előfordulhat-e, hogy a kezdetben hidegebb közeg végső hőmérséklete melegebb, mint a kezdetben meleg közeg kilépő hőmérséklete?

Fotonrakéta

A *fotonrakéta* olyan elképzelt rakéta, amely fotonokat használ hajtóanyagként. Tegyük fel, hogy a hajtómű ideális, tehát a rakéta tömegének egy részét fotonokká

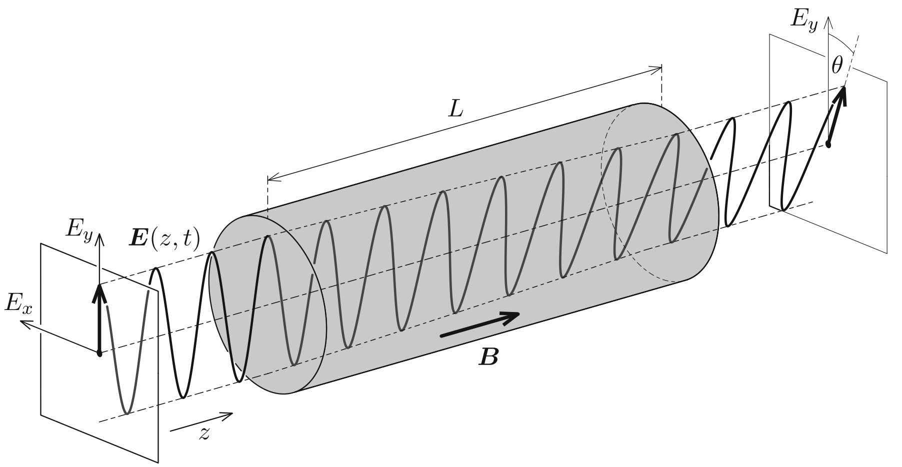
[1] A versenyt két fordulóban, Budapesten rendezték meg 2018 márciusában. A feladatokat *Tasnádi Tamás, Szász Krisztián* és *Vigh Máté* állította össze.

alakítja, amiket egyirányban, párhuzamosan kilövell. A rakéta nyugalomból indul, és kezdeti (nyugalmi) tömege M.

Határozzuk meg a hajtómű bekapcsolása után a rakéta v sebességét a rakéta m (nyugalmi) tömegének függvényében! (A v sebességet abban a rendszerben mérjük, amelyből a rakéta indult.)

Faraday-effektus

Ha átlátszó szigetelő anyagot homogén mágneses mezőbe helyezünk, és az anyagon a mágneses indukcióvektorral azonos irányba haladó, lineárisan polarizált fénynyalábot bocsátunk keresztül, akkor a közegből kilépő fény továbbra is lineárisan polarizált marad, azonban polarizációjának iránya a B mágneses indukcióval arányos θ szögben elfordul (*2. ábra*). Ebben a feladatban ennek az optikai forgatásnak (az ún. Faraday-effektusnak) a leírásával foglalkozunk.



2. ábra

Tekintsünk egy vákuumban elhelyezkedő, L hosszúságú, tömör szigetelő hengert, melynek szimmetriatengelye egybeesik a z tengellyel. Ha a henger egyik ($z=0$-nál elhelyezkedő) körlapjára egy y irányban lineárisan polarizált, z irányba terjedő, ω körfrekvenciájú fényhullámot ejtünk, akkor az a hengerbe belépve a $z=0^+$ helyen (azaz a körlaphoz nagyon közel) az

$$(*)\qquad E_x(t)=0,\qquad E_y(t)=E_0\cos(\omega t)$$

térerősség-komponensekkel írható le, ahol E_0 pozitív konstans. Ez a hullám egyértelműen előállítható egy jobbra és egy balra cirkulárisan polarizált[2] fényhullám szuperpozíciójaként.

[2]A cirkuláris polarizáció azt jelenti, hogy a tér tetszőleges pontjában az elektromos térerősségvektor nagysága időben állandó, iránya pedig ω szögsebességgel forog a terjedési irányra merőleges síkban. A jobb- és balkezességet a térerősségvektor forgási iránya szabja meg.

Bontsuk fel a fenti egyenletekkel megadott beeső fényhullámot kétféle cirkulárisan polarizált hullámra, és adjuk meg ezek $E_x^{\text{jobb}}(t)$ és $E_y^{\text{jobb}}(t)$, valamint $E_x^{\text{bal}}(t)$ és $E_y^{\text{bal}}(t)$ térerősség-komponenseit a $z = 0^+$ helyen. A választ E_0 és ω felhasználásával adjuk meg.

A Faraday-effektus oka az ún. cirkuláris kettőstörés: a mágneses mező jelenlétében a jobbra, illetve balra cirkulárisan polarizált fényre vonatkozóan a szigetelő törésmutatója különböző, n_{jobb} és n_{bal} értékű.

Határozzuk meg, mekkora θ szöggel fordul el a beeső fényhullám polarizációs síkja, mialatt átjut a szigetelőből készült hengeren. A választ L, n_{jobb}, n_{bal} és a fény vákuumbeli λ hullámhossza segítségével adjuk meg, a henger körlapjain történő esetleges visszaverődést hagyjuk figyelmen kívül!

Az n_{jobb} és n_{bal} törésmutatók közötti különbség megértéséhez a közeg atomjainak a fénnyel és a homogén mágneses térrel való kölcsönhatását kell vizsgálnunk. A továbbiakban tegyük fel, hogy a szigetelő henger anyaga paramágneses[3], azaz olyan atomokból áll, melyeknek van mágneses momentuma. Tekintsük az atom egy klasszikus modelljét, melyben az egymással nem kölcsönható, pontszerű elektronok a sokkal nagyobb tömegű mag körül körpályán keringenek. Az elektronok és az atommag spinjétől mindvégig tekintsünk el!

Adjuk meg az atom μ eredő mágneses momentumának és az elektronok eredő N perdületének hányadosát! A választ az e elemi töltéssel és az elektron m tömegével fejezzük ki!

Ha a paramágneses anyagban z irányú, B indukciójú mágneses mező is jelen van, akkor a közeg véletlenszerű orientációjú, μ mágneses momentumú atomjai elkezdenek a z tengely körül precesszálni. Határozzuk meg ennek a precessziónak az ω_p szögsebességét! A mágneses indukció irányához képest milyen körüljárású ez a mozgás?

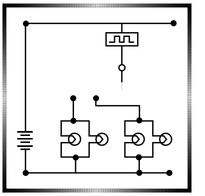
Most vegyük figyelembe, hogy a homogén mágneses téren kívül az anyagban a $(*)$ összefüggéssel megadott, lineáris polarizációjú fényhullám is jelen van. Az előző részfeladatban leírt precesszió miatt a fényhullám kétféle cirkulárisan polarizált összetevőjének térerősségvektora az atomokhoz képest $\omega \pm \omega_{\text{p}}$ nagyságú szögsebességgel forog. Laboratóriumban előállítható mágneses terek esetén ω_{p} sokkal kisebb a látható fény ω körfrekvenciájánál. Ismert továbbá, hogy $B = 0$ esetén a közeg törésmutatója (mind a jobbra, mind pedig a balra cirkulárisan poláros fényre nézve) $n(\lambda)$ függvény szerint függ a benne haladó fény vákuumbeli λ hullámhosszától.

Az eddigi eredmények felhasználásával adjuk meg a közeg optikai forgatását jellemző $\mathcal{V} = \theta/(LB)$ ún. Verdet-állandó értékét! Eredményünket a c fénysebesség, a fény vákuumbeli λ hullámhossza, valamint e, m és $\mathrm{d}n/\mathrm{d}\lambda$ felhasználásával adjuk meg!

A szigetelő henger után egy síktükröt helyezünk el a fény útjára merőlegesen, így a fényhullám még egyszer áthalad (ellenkező irányban) a közegen. Összesen mekkora szöggel fordul el a fény polarizációja? A választ a $\mathcal{V}$ Verdet-állandóval, valamint B-vel és L-lel adjuk meg!

---

[3] A paramágnes olyan anyag, melynek relatív permeabilitása $\mu_{\text{r}} \approx 1$, miközben $\mu_{\text{r}} > 1$.



Fizika gyakorlat megoldása

G. 636. *Vajon Miskolctól milyen messze helyezték el az autópálya mellett a* képen *látható táblát?*

(*4 pont*)

Közli: *Részegh Anna,* Vácduka

Megoldás. A magyarországi autópályákon a megengedett legnagyobb sebesség 130 km/h. Legyen s az a távolság, amelyen éppen 8 percet nyernénk, ha a megengedett legnagyobb sebesség helyett végig 160 km/h-val haladnánk. Felírhatjuk, hogy

$$\frac{s}{130\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}}-\frac{s}{160\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}}=\frac{8}{60}\ \mathrm{h},$$

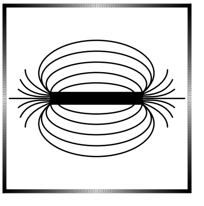
ahonnan

$$s=\frac{832}{9}\ \mathrm{km}\approx 92{,}4\ \mathrm{km}.$$

A képen látható táblát tehát Miskolctól körülbelül 92 kilométernyire, vagy ennél kisebb távolságra helyezhették el, ha igaz a rajta olvasható állítás.

Barta Gergely (Szeged, Radnóti M. Kísérleti Gimn., 9. évf.)

61 dolgozat érkezett. Helyes 15 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 11, hiányos (1–2 pont) 25, hibás 10 dolgozat.



Fizika feladatok megoldása

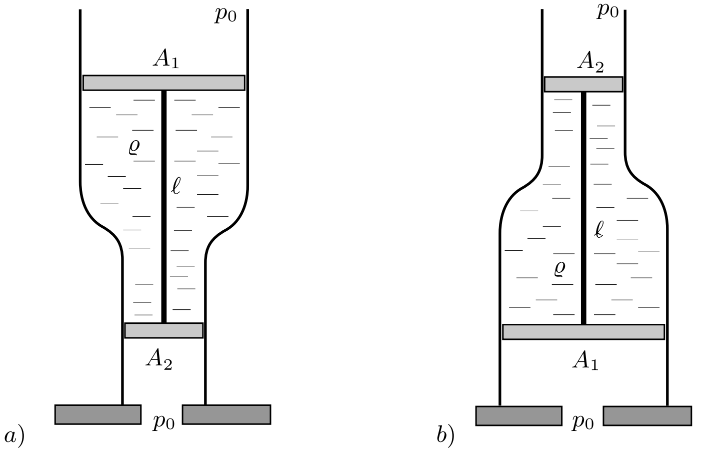
P. 4990. *Egy függőleges tengelyű, rögzített cső szélesebb részének keresztmetszete A_1, a keskenyebb részé pedig A_2. A csőben két dugattyú és közöttük ϱ sűrűségű folyadék van. A dugattyúkat ℓ hosszúságú, merev rúd köti össze. A dugattyúk és a rúd tömege elhanyagolható. A külső légnyomás p_0.*

Mekkora és milyen irányú erő hat a rúdban, ha a cső

a) a keskenyebb,

b) a szélesebb

részére támaszkodik egy vízszintes lapon?



Milyen furcsaság történik akkor, ha ℓ „viszonylag nagy”?

(*6 pont*) *A Kvant* nyomán

Megoldás. *a*) Legyen a víz nyomása a felső dugattyúnál p, és tételezzük fel, hogy a rúd K erővel *húzza lefelé* a felső dugattyút. Írjuk fel az egyensúlyban lévő felső dugattyúra a dinamika alapegyenletét:

$$0 = pA_1 - p_0A_1 - K = 0. \tag{1}$$

A felső dugattyú K erővel húzza a rudat felfelé, és mivel a rúd gyorsulása is nulla, ugyanekkora K nagyságú erővel kell húzza az alsó dugattyú a rudat *lefelé.* Ezek szerint – Newton III. törvénye alapján – a rúd is K erővel hat az alsó dugattyúra, ekkora erővel húzza azt felfelé.

Az alsó dugattyúra felírható (egyensúlyi) egyenlet:

$$(p + \varrho g\ell)A_2 - p_0A_2 - K = 0. \tag{2}$$

(Felhasználtuk, hogy a folyadék nyomása az alján a hidrosztatikai nyomásnak megfelelő $\varrho g\ell$ értékkel nagyobb, mint a tetejénél.)

Az (1) egyenletet (2)-ből kivonva kapjuk, hogy:

$$p(A_1 - A_2) + p_0(A_2 - A_1) - \varrho g\ell A_2 = 0.$$

Ebből a folyadék nyomása a felső dugattyú közelében:

$$p = \frac{\varrho g\ell}{A_1 - A_2}A_2 + p_0,$$

amit a felső dugattyúra felírt (1) egyenletbe behelyettesítve a rudat feszítő húzóerőre

$$K = pA_1 - p_0A_1 = \varrho g\ell\frac{A_1A_2}{A_1 - A_2}$$

adódik. Mivel $K > 0$, a rúdban – a feltételezésünkkel összhangban – valóban *húzóerő* alakul ki. Az is látható, hogy ℓ értékének növelésével a folyadék p nyomása is és a rudat feszítő K erő nagysága is egyre nagyobb lesz.

b) Az előző feladatrészhez hasonlóan, annak jelöléseivel oldjuk meg ezt az esetet is. Előbb a felső, majd az alsó dugattyúra felírva az egyensúly feltételét:

$$0 = pA_2 - p_0A_2 - K = 0, \tag{1}$$

$$(p + \varrho g\ell)A_1 - p_0A_1 - K = 0.$$

Ebből a folyadék nyomása a felső dugattyúnál:

$$p = p_0 - \frac{\varrho g\ell}{A_1 - A_2}A_1,$$

a rudat „feszítő” erő pedig

$$K = pA_2 - p_0A_2 = -\varrho g\ell\frac{A_1A_2}{A_1 - A_2}.$$

Mivel most $K < 0$, a rúdban ténylegesen *nyomóerő* hat, és $p < p_0$.

Érdekes helyzet áll elő, ha ℓ „viszonylag nagy”. Ha

$$\ell > \frac{A_1 - A_2}{A_1} \cdot \frac{p_0}{\varrho g},$$

akkor (formálisan) negatív nyomásértéket kapunk, aminek nincs fizikai értelme. Ilyen esetben a folyadék a felső dugattyú közelében már korábban forrni kezd, a tömegközéppontja egyre lejjebb kerül, és a gravitációs helyzeti energiájának csökkenése fedezi a forráshoz szükséges belsőenergia-változást.

Kondákor Márk (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.)
dolgozata alapján

25 dolgozat érkezett. Helyes Elek Péter, Fekete András Albert, Fekete Balázs Attila, Kondákor Márk, Marozsák Tóbiás, Máth Benedek, Olosz Adél és Sal Dávid megoldása. Kicsit hiányos (5 pont) 10, hiányos (1–4 pont) 7 dolgozat.

P. 4996. *Egy mól hélium térfogatát kétszeresére növeltük a* $p = \frac{\alpha}{V^2}$ *folyamatban (*α *állandó), miközben belső energiája* 2493 J*-lal csökkent.*

a) *Mennyi volt a hélium kezdeti hőmérséklete?*

b) *Mennyi hőt adott le a folyamat során?*

(*5 pont*) *Példatári feladat nyomán*

Megoldás. *a*) A héliumgáz anyagmennyisége $n = 1$ mol, és a hélium nemesgáz, ezért $f = 3$.

Legyenek a hélium kezdeti állapotjelzői p_0, V_0 és T_0, a folyamat végén pedig p_1, V_1 és T_1. Tudjuk, hogy a gáz térfogata kétszeresére nőtt, tehát $V_1 = 2V_0$.

A folyamat során végig teljesül, hogy $p = \frac{\alpha}{V^2}$, tehát a folyamat kezdetén

$$p_0 = \frac{\alpha}{V_0^2},$$

a folyamat végén pedig

$$p_1 = \frac{\alpha}{V_1^2} = \frac{\alpha}{(2V_0)^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\alpha}{V_0^2} = \frac{1}{4} \cdot p_0.$$

A gáztörvény szerint

$$\frac{p_0 \cdot V_0}{T_0} = \frac{p_1 \cdot V_1}{T_1},$$

$$\frac{p_0 \cdot V_0}{T_0} = \frac{\frac{1}{4} \cdot p_0 \cdot 2V_0}{T_1} = \frac{p_0 \cdot V_0}{2T_1},$$

vagyis

$$T_1 = \frac{T_0}{2}.$$

A gáz belső energiájának csökkenése:

$$\Delta E = \frac{f}{2} nR\Delta T,$$

$$-2493\ \mathrm{J} = \frac{3}{2} \cdot 1\ \mathrm{mol} \cdot 8{,}31\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol} \cdot \mathrm{K}} \cdot (T_1 - T_0),$$

$$T_1 - T_0 = \frac{T_0}{2} - T_0 = -\frac{T_0}{2} = -200\ \mathrm{K}.$$

A hélium kezdeti hőmérséklete tehát 400 K (= 127 °C) volt.

b) Az ideális gáz állapotegyenletét felírva a folyamat valamely állapotára:

$$pV = nRT,$$

$$\frac{\alpha}{V^2} V = nRT,$$

ahonnan

$$\frac{\alpha}{V} = nRT.$$

A gáz munkavégzése a $p(V) = \frac{\alpha}{V^2}$ folyamat során integrálszámítással (vagy például a Coulomb-erőtérrel való analógia felismerésével) számítható ki:

$$W_{\mathrm{He}} = \int_{V_0}^{V_1} p(V)\,\mathrm{d}V = \alpha \int_{V_0}^{V_1} \frac{1}{V^2}\,\mathrm{d}V = \frac{\alpha}{V_0} - \frac{\alpha}{V_1}.$$

A térfogatokat a hőmérsékletekkel kifejezve:

$$W_{\mathrm{He}} = nRT_0 - nRT_1 = nR \cdot (T_0 - T_1) = 1\ \mathrm{mol} \cdot 8{,}31 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol} \cdot \mathrm{K}} \cdot 200\ \mathrm{K} = 1662\ \mathrm{J}.$$

A gáz által leadott hő a hőtan első főtétele alapján számítható:

$$Q = \Delta E - W = \Delta E + W_{\mathrm{He}} = -2493\ \mathrm{J} + 1662\ \mathrm{J} = -831\ \mathrm{J}.$$

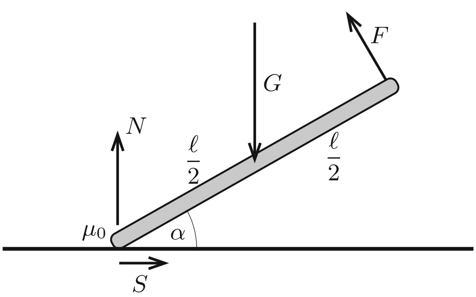
Jánosik Áron (Győr, Révai Miklós Gimn., 10. évf.)

59 dolgozat érkezett. Helyes 41 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 7, hiányos (1–3 pont) 9, hibás 2 dolgozat.

P. 5016. *Egy homogén tömegeloszlású rúd fekszik a vízszintes asztallapon. A rudat az egyik végén ható, a rúdra mindenkor merőleges erővel lassan függőleges helyzetbe akarjuk hozni. Legalább mekkora a súrlódási együttható a rúd és az asztallap között, ha a rúd a felállítás közben nem csúszik meg?*

(*5 pont*) *A Kvant nyomán*

Megoldás. Tekintsük a lassan (gyorsulásmentesen) mozgatott rúd azon állapotát, amikor α szöget zár be a vízszintessel ($0 \leqslant \alpha \leqslant 90°$). Az ℓ hosszú rúdra négyféle erő hat: a rúd megemelt végénél a rúdra merőleges $\boldsymbol{F}$ erő, a rúd felezőpontjánál függőlegesen lefelé ható $\boldsymbol{G}$ nehézségi erő, a rúd alsó végénél pedig a függőlegesen felfelé ható $\boldsymbol{N}$ nyomóerő és a vízszintes $\boldsymbol{S}$ súrlódási erő (lásd az *ábrát*).



Az erők és a forgatónyomatékok egyensúlyának feltétele:

$$F \sin\alpha = S, \tag{1}$$

$$F \cos\alpha + N = G, \tag{2}$$

$$F\ell = G\frac{\ell}{2}\cos\alpha. \tag{3}$$

Ezekből megkaphatjuk, hogy

$$F = \frac{G}{2}\cos\alpha, \tag{4}$$

$$S = \frac{G}{2}\sin\alpha\,\cos\alpha, \tag{5}$$

(6) $$N=\left(1-\frac{\cos^2\alpha}{2}\right)G.$$

Annak a feltétele, hogy a rúd az α szögű helyzetben *nem* csúszik meg:

(7) $$\mu_0\geqslant\frac{S(\alpha)}{N(\alpha)}=\frac{\sin\alpha\,\cos\alpha}{2-\cos^2\alpha}\equiv f(\alpha),$$

ahol μ_0 a rúd és az asztallap közötti tapadó súrlódási együttható.

A rúd akkor állítható fel a megadott módon, ha a (7) egyenlőtlenség *tetszőleges* $0\leqslant\alpha\leqslant 90^\circ$ szögnél teljesül, vagyis μ_0 nem kisebb, mint az $f(\alpha)$ függvény maximális értéke.

$f(\alpha)$ legnagyobb értékét numerikus módszerekkel (táblázat készítésével), differenciálszámítással vagy a WolframAlpha program felhasználásával kaphatjuk meg, de elemi módszerekkel is célhoz érhetünk. Ha $\sin\alpha$-t és $\cos\alpha$-t kifejezzük $\operatorname{tg}\alpha$-val, a vizsgálandó függvény reciprokára a következő kifejezést kapjuk:

$$\frac{1}{f(\alpha)}=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}+2\operatorname{tg}\alpha.$$

Alkalmazva a számtani-mértani középre vonatkozó egyenlőtlenséget:

$$\frac{1}{f(\alpha)}\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\cdot 2\operatorname{tg}\alpha}=\sqrt{8}.$$

Ezek szerint $f(\alpha)$ legnagyobb értéke, vagyis a csúszásmentes emeléshez szükséges legkisebb súrlódási együttható nagysága:

$$\mu_0^{\text{kritikus}}=\frac{1}{\sqrt{8}}\approx 0{,}35.$$

Vaszary Tamás (Győr, Kazinczy F. Gimn., 10. évf.) dolgozata alapján

50 dolgozat érkezett. Helyes 36 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 9, hiányos (1–3 pont) 3, hibás 2 dolgozat.

P. 5034. *Mennyi ideig esett egy v_0 kezdősebességgel vízszintesen elhajított test, amíg az eldobás helyétől s távolságra került? (A légellenállástól tekintsünk el!)*

Adatok: $v_0=5$ m/s, $s=20$ m.

(*4 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest

Megoldás. Jelölje a test vízszintes irányban megtett útját x, a függőleges irányban megtettet pedig y. Amikor az eldobás helyétől s távolságra kerül, akkor a Pitagorasz-tétel alapján:

$$s^2=x^2+y^2.$$

Vízszintes irányban a test egyenletes mozgással halad, így

$$x=v_0t,$$

függőleges irányban pedig szabadeséssel zuhan, vagyis egyenletesen gyorsul:

$$y=\frac{1}{2}gt^2.$$

Ezek alapján:

$$s^2=v_0^2t^2+\frac{1}{4}g^2t^4.$$

Alkalmazzuk a $k=t^2$ helyettesítést:

$$\frac{g^2}{4}k^2+v_0^2k-s^2=0.$$

Az egyenlet pozitív megoldása:

$$k=\frac{2\sqrt{v_0^4+g^2s^2}-2v_0^2}{g^2},$$

ahonnan a kérdéses ($t>0$) esési idő:

$$t=\frac{\sqrt{2}}{g}\sqrt{\sqrt{v_0^4+g^2s^2}-v_0^2}\approx 1{,}9\ \text{s}.$$

Pszota Máté (Révkomárom, Selye János Gimn., 12. évf.)

67 dolgozat érkezett. Helyes 54 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 6, hiányos (1–2 pont) 7 dolgozat.

Országos Középiskolai Csillagászati Verseny és Diákolimpiai Válogató 2018/19

Érdekel a csillagászat és az űrkutatás, és nem áll tőled távol a fizika és a matematika sem? Hazai vagy határon túli magyar ajkú középiskolás diákként tanulsz a 2018/19-es tanévben?

Akkor ne habozz – jelentkezz, és érdeklődj fizikatanárodnál!

Vegyél részt az iskolákban lebonyolításra kerülő, háromfordulós versenyen, amelyre a felkészülésedet irodalomjegyzékkel, online segédanyagokkal és megoldásokkal ellátott gyakorló feladatsorokkal is segítjük.

Ha bekerülsz a legjobb teljesítményt nyújtó 20-25 diák közé, részt vehetsz tavasszal az országos döntőben, ahol a díjazottakat értékes nyereményekben részesítjük – egyúttal akár a 2019-es, *Magyarországon rendezendő* nemzetközi olimpiai döntőre készülő magyar keret tagjává is válhatsz.

Jelentkezési határidő (egyben az 1. iskolai forduló időpontja):

2018. október 16. (kedd).

Részletes információk: `http://www.bajaobs.hu/ioaa/`.

Eötvös-verseny

Az idei Eötvös-versenyt

2018. október 12-én

pénteken délután 15^{h}-tól 20^{h}-ig rendezi meg az Eötvös Loránd Fizikai Társulat.

A versenyen azok a diákok vehetnek részt, akik vagy középiskolai tanulók, vagy a verseny évében fejezték be középiskolai tanulmányaikat. Nemcsak magyar állampolgárságú versenyzők indulhatnak, hanem Magyarországon tanuló külföldi diákok, valamint külföldön tanuló, de magyarul értő diákok is.

A megoldásokat magyar nyelven kell elkészíteni, a rendelkezésre álló idő 300 perc. Minden írott vagy nyomtatott segédeszköz használható, de zsebszámológépen kívül minden elektronikus eszköz használata tilos.

Előzetesen jelentkezni nem kell, elegendő egy személyazonosság igazolására szolgáló okmánnyal (személyi igazolvány, diákigazolvány vagy útlevél) megjelenni a verseny valamelyik helyszínén.

A helyszínek és a versennyel kapcsolatos minden további információ megtalálható a verseny honlapján:

`http://eik.bme.hu/~vanko/fizika/eotvos.htm`.

Versenybizottság

Fizikából kitűzött feladatok

Mérési feladat

FIGYELEM! *A mérési feladat megoldását azok az egyéni versenyzők, illetve (idén első alkalommal, kísérleti jelleggel) mérőpárok küldhetik be, akik beneveztek az* ***M*** *pontversenybe. (A mérőpárok versenyzési feltételeit részletesen ismertetjük a ???. oldalon.) Az egyéni versenyzők egy személy (családtag, barát) segítségét is igényve vehetik a mérés elvégzésekor.*

Kérjük, hogy a postán küldött megoldást négyrét hajtsd össze (több lapból álló dolgozatokat egybe) úgy, hogy a fejléc kívülre kerüljön. A részleteket lásd a Versenykiírás Megoldások elkészítése és beküldése *részében.*

M. 379. Mérjük meg, milyen magasságból kell függőlegesen leejteni egy rugós golyóstollat, hogy az íróhegye ennek következtében kipattanjon! Ha már kipattant, milyen magasságból kell függőlegesen leejteni, hogy a hegye visszapattanjon?

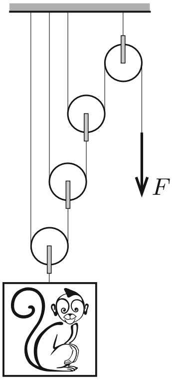
(*6 pont*) *Varga István* (1952–2007) feladata

Gyakorlatok

Kérünk, hogy minden egyes postán küldött megoldást – feladatonként külön-külön – négyrét hajts össze (több lapból álló dolgozatokat egybe) úgy, hogy a fejléc kívülre kerüljön. A részleteket lásd a Versenykiírás Megoldások elkészítése és beküldése *részében.*

G. 641. Az *ábrán* látható csigasorban a csigák tömege 1 kg. Mekkora F erő szükséges ahhoz, hogy a ketreccel együtt 9 kg tömegű majmot egyensúlyban tartsuk?

(*3 pont*)



G. 642. Egy $2R$ sugarú kör kerületének belső oldalán csúszásmentesen gördül körbe egy R sugarú kerék. Milyen pályán mozog a kis kerék egy kerületi pontja?

(*3 pont*)

G. 643. Egy karos mérlegen egy vizet tartalmazó edény van kiegyensúlyozva. Megbomlik-e a mérleg egyensúlya, ha egyik ujjunkat bemerítjük a vízbe úgy, hogy az edényhez nem érünk hozzá? Milyen választ adhatunk a kérdésre, ha

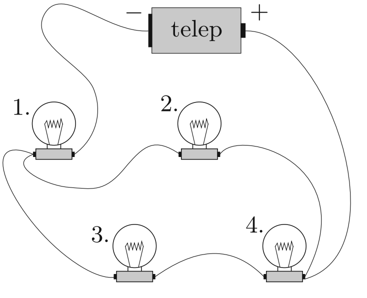
a) egy csepp víz sem folyik ki az edényből;

b) a színültig töltött edényből kifolyó víz lecsurog a mérleg tányérja mellett?

(*3 pont*)

G. 644. Az *ábrán* látható kapcsolásban négy egyforma villanykörtét kötöttünk a telepre. Melyik világít legerősebben? Rakjuk sorba az izzókat fényerejük szerint!

(*3 pont*)

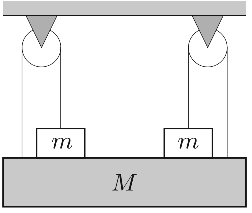


Feladatok

Kérünk, hogy minden egyes postán küldött megoldást – feladatonként külön-külön – négyrét hajts össze (több lapból álló dolgozatokat egybe) úgy, hogy a fejléc kívülre kerüljön. A részleteket lásd a Versenykiírás Megoldások elkészítése és beküldése *részében.*

P. 5045. A Holdon egy szabadon eső test teljes esési magassága n-szer nagyobb, mint az utolsó másodpercben megtett útja. Határozzuk meg az esés magasságát és az esés idejét!

(*4 pont*) *Faragó Andor* (1877–1944) feladata nyomán

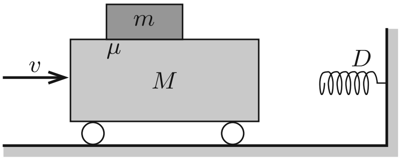


P. 5046. Egy M tömegű deszkát az *ábrán* látható módon, szimmetrikus elrendezésben rögzítünk. Az állócsigák és a kötelek tömege, valamint a tengelysúrlódás elhanyagolható. (A m tömegű testek nincsenek a M tömegű deszkához ragasztva.)

Milyen m/M arány esetén lehet egyensúlyban a rendszer?

(*3 pont*) Közli: *Nagy Piroska Mária,* Dunakeszi

P. 5047. Az *ábrán* látható M tömegű kiskocsi és a rajta levő lapos, m tömegű hasáb v sebességgel halad a falhoz rögzített, D rugóállandójú nyomórugó felé. A hasáb és a kiskocsi felülete közötti súrlódási együttható μ.



a) Ütközéskor megcsúszik-e a hasáb?

b) Mennyi ideig tart az ütközés?

Adatok: $M = 0{,}2$ kg, $m = 0{,}1$ kg, $v = 1$ m/s, $D = 4{,}4$ N/m, $\mu = 0{,}4$.

(*4 pont*) Közli: *Németh László,* Fonyód

P. 5048. Becsüljük meg, mekkora nyomáskülönbség alakul ki egy (álló helyzetben mondjuk 2 bar túlnyomású) autóguminak az abroncsnál lévő „belső” és a futófelületénél lévő „külső” része között! Az autópályán a megengedett maximális sebesség 130 km/h.

(*4 pont*) Közli: *Tichy Géza,* Budapest

P. 5049. Legalább mekkora sebességgel kell elindítani egy rakétát a Földről, hogy eljusson a Holdra? Hasonlítsuk össze ezt a sebességet a második kozmikus sebességgel! (Az egyszerűség kedvéért a Föld és a Hold mozgását ne vegyük figyelembe!)

(*5 pont*) Közli: *Cserti József,* Budapest

P. 5050. Egy zárt edényben víz, a víz felett vízgőz van. Mi történik a vízzel, ha a vízgőzt szivattyúzni kezdjük, miközben a víz hőmérsékletét állandónak tartjuk, ha ez a hőmérséklet

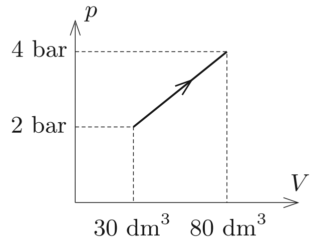
a) 100,00 °C;

b) 20,00 °C?

(*3 pont*) Közli: *Radnai Gyula,* Budapest

P. 5051. Héliumgáz állapota az *ábrán* látható módon változik. Mekkora a folyamat során felvett hő?

(*4 pont*) *Példatári feladat*



P. 5052. 1,5 cm vastag üveglemez alatt kicsiny szemcse fekszik. Hol keletkezik a szemcse látható képe, ha a látósugár merőleges a lemez felületére, és az üveg törésmutatója $n = 1{,}5$?

(*3 pont*) *Példatári feladat*

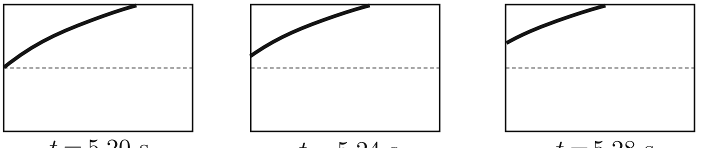
P. 5053. Határozzuk meg egy olyan csillag teljes fényteljesítményét, amelynek felszíni hőmérséklete 7500 K, átmérője pedig a Nap átmérőjének 2,5-szerese! A Nap felszíni hőmérsékletét vegyük 5800 K-nek, fényteljesítményét tekintsük egységnyinek.

(*4 pont*) *Csillagászati versenyfeladat nyomán*

P. 5054. Egy M nyugalmi tömegű, kezdetben álló atommag képes elnyelni egy hf energiájú γ-fotont. Határozzuk meg, hogy mekkora az atommag gerjesztési energiája (vagyis a nyugalmi energiájának növekedése) ebben a folyamatban!

(*5 pont*) Közli: *Légrádi Imre,* Sopron

P. 5055. Egy vízszintesen kifeszített gumikötél egyik végét függőleges irányban periodikusan mozgatjuk, emiatt a kötél mentén transzverzális hullámok futnak végig. A kötél egy kis darabjának mozgásáról filmfelvételt készítünk, ennek három egymást követő filmkockáját mutatja az *ábra.*



$t = 5{,}20$ s $\quad$ $t = 5{,}24$ s $\quad$ $t = 5{,}28$ s

Merre terjed a kötélben az energia: balról jobbra, vagy jobbról balra?

(*6 pont*) Közli: *Gnädig Péter,* Vácduka

Beküldési határidő: 2018. október 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS
(Volume 68. No. 6. September 2018)

Problems in Mathematics

New exercises for practice – competition K (see page 352): **K. 589.** A company regularly hires the same man to mow a certain grassy area. In addition to the labour cost, the man charges a call-out fee of 5000 forints (HUF, Hungarian currency). If he mows the grass three times a month, the labour cost is 1.8 times as much per occasion as it is in the case when he mows the grass four times a month, since in the former case the grass will grow higher which requires more work. On the whole, it is more economical for the company to have the grass mowed four times a month. What is the minimum possible labour cost per mowing in the case of 4 occasions a month, given that it is an integer multiple of 100 forints? **K. 590.** Andrew, Bill and Charlie participated in a running race. At the end, Bill and Carlie, respectively, were 15 metres and 35 metres behind when Andrew finished. When Bill finished, Charlie was still 22 metres behind him. What was the distance covered by the runners, given that each boy was running at a uniform speed? **K. 591.** A group of children participated in a bus excursion. In the luggage compartment of the bus, there is room for the luggage of one third of the children. The bus has 52 seats. The teachers are sitting on two seats. On each of the remaining seats, there is either a child sitting, or there is the luggage of a child. How many children are there on the trip if all seats are used? **K. 592.** Ann, Belle and Charlotte are doing a job together. The three of them finish it 6 hours sooner than Ann would finish it alone, 1 hour sooner than Belle would finish it alone, and they take half as much time together as Charlotte would take alone. If Ann and Belle work together without Charlotte, they finish the job in 80 minutes. How long would it take each girl Ann and Belle to do the job alone? (Express your answer in minutes.) **K. 593.** A disobedient class were trying to boycott the PE lesson. Therefore, when given the task of throwing a ball along the running track as far as they can, they threw the balls towards the fence instead, in the hope of getting the balls across the fence and halting the lesson while the balls are collected. 1/6 of the students threw 5 balls each, half the class threw 4 balls per student, one student threw 6 balls and all the rest of them threw 2 balls each. They managed to throw 75% of the balls over the fence. Since it took a lot of of time to get all these 66 balls back, the students were punished. They were made to run 3 laps each on the 200-metre running track. How many kilometres did they run altogether?

New exercises for practice – competition C (see page 353): **Exercises up to grade 10: C. 1490.** What is the remainder if the number $N = 863\,\underbrace{99\ldots9}_{2018\text{ times}}$ (with 2018 digits of 9 at the end) is divided by 32? **C. 1491.** The length of side AD of a rectangle $ABCD$ is 1 cm. The angle bisector of $\angle BAD$ and the perpendicular bisector of diagonal AC intersect on the side CD. Find the exact length of side CD. **Exercises for everyone: C. 1492.** The solid in the *figure* consists of 15 unit cubes. In how many different ways is it possible to get from vertex A to vertex B along the grid lines if it is only allowed to move in the three directions indicated? **C. 1493.** A triangle of unit area has sides a, b, c, such that $a \geqslant b \geqslant c$. Show that $b \geqslant \sqrt{2}$. **C. 1494.** Prove that if p and q are twin primes greater than 3, then their arithmetic mean is divisible by 6 and the number greater by 1 than their product is divisible by 36. **Exercises upwards of grade 11: C. 1495.** Consider the following sequence of equalities: (1) $1+2=3$, (2) $4+5+6=7+8$, (3) $9+10+11+12=13+14+15$. By observing the rule, state the kth row, and prove your statement. (Proposed by *Á. Kertész,* Miami Beach) **C. 1496.** Disks of radii 1, 2 and

3 cm are drawn about the vertices of a triangle. The three disks pairwise touch each other from outside. What is the area in the triangle that is not covered by the disks?

New exercises – competition B (see page 354): **B. 4966.** Find the nineteenth positive integer in which the sum of the digits is 2018. (*3 points*) **B. 4967.** Let P be an interior point of $\triangle ABC$, and the midpoint of sides AB, BC and CA are C_1, A_1 and B_1, respectively. Through the points A_1, B_1 and C_1, draw parallels to the lines AP, BP and CP, respectively. Show that these three lines are concurrent. (*3 points*) (Proposed by *J. Kozma,* Szeged) **B. 4968.** Solve the following simultaneous equations on the set of positive real numbers:

$$\frac{1}{1+a+ab+abc}+\frac{1}{1+b+bc+bcd}+\frac{1}{1+c+cd+cda}+\frac{1}{1+d+da+dab}=1,$$

$$a+b+c+d=4.$$

(*4 points*) **B. 4969.** The sides of a rectangle T are $a \leqslant b$. Given that the union of two appropriate disks of radius r covers T but this is impossible with two disks of radii smaller than r, determine the length r. (*4 points*) **B. 4970.** A line e in the plane separates two given points A and B of the plane. On the line e, select points P and Q such that $\angle PAQ = 90°$. Show that there exists a point different from B that lies on all circles drawn through B, P and Q, independently of the choice of P and Q. (*5 points*) (Proposed by *the class 11C* of Fazekas Primary and Secondary School, Budapest) **B. 4971.** For which primes p is there a positive integer a such that $1+a+a^2+\dots+a^{p-1}$ is divisible by p^2? (*5 points*) **B. 4972.** Let P be an interior point of an acute-angled triangle ABC. Let D, E and F be the orthogonal projections of P onto the sides, as shown in the *figure.* Outside the triangle, a square is drawn over each of the six line segments formed on the sides. The squares are then alternatively coloured by two colours according to the figure. Consider the two triangles formed by the lines of the "outer" sides of the squares with the same colour. Show that these two triangles are congruent. (*6 points*) **B. 4973.** Let $a_1, a_2, \dots, a_{2018}$ denote non-negative real numbers that add up to 1. Find the largest possible value of the sum $S=\sum_{i\neq j,\ i|j} a_i a_j$ (*6 points*) (Based on an *Argentinean problem*)

New problems – competition A (see page 356): **A. 728.** Floyd the flea makes jumps on the positive integers. On the first day he can jump to any positive integer. From then on, every day he jumps to another number that is not more than twice his previous day's place. *a*) Show that Floyd can make infinitely many jumps in such a way that he never arrives at any number with the same sum of decimal digits as at a previous place. *b*) Can the flea jump this way if we consider the sum of binary digits instead of decimal digits? (*Dürer competition,* 2015) **A. 729.** In a cyclic quadrilateral $ABCD$, the diagonals meet at point E, the midpoint of side AB is F, and the feet of perpendiculars from E to the lines DA, AB, and BC are P, Q, and R, respectively. Prove that the points P, Q, R, and F are concyclic. (Proposed by *M. Weisz,* Szeged) **A. 730.** Let F_n be the nth Fibonacci number ($F_1=F_2=1$, $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$). Construct infinitely many positive integers n such that n divides F_{F_n} but n does not divide F_n.

Problems in Physics

(see page 378)

M. 379. Measure the height from which a retractable ballpoint click pen should be dropped from a vertical position in order that it is clicked on. When the tip of the pen is already out, from what height should it be dropped vertically in order that it is clicked off?

G. 641. The mass of each pulley in the pulley system shown in the *figure* is 1 kg. What is the magnitude of the force F with which the monkey in the cage can be kept in equilibrium? The total mass of the monkey and the cage is 9 kg. **G. 642.** A wheel of radius R is rolling without slipping along the inner circumference of a circle of radius $2R$. What is the path of a point on the rim of the small wheel? **G. 643.** A bowl of water is placed on one of the plates of a beam scale, which is balanced. One of our fingers is immersed into the water, such that the bowl is not touched. Will the scale remain balanced or not, if *a*) not a drop of water flows out of the bowl; *b*) the bowl was full to the brim, and the water flows off the plate of the scale? **G. 644.** Four alike bulbs are connected as shown in the *figure* to a battery. Which one is the brightest? List them in the order of their luminous power.

P. 5045. An object falls freely on the Moon. The total height from which the object was dropped is n times greater than the distance covered by the object in the last second of its fall. Determine the height from which it was dropped and the time of the fall. **P. 5046.** A board of mass M was fixed symmetrically as shown in the *figure.* The masses of the fixed pulleys and the ropes, as well as friction in the shaft are negligible. (The objects of mass m are not glued to the board of mass M.) At what m/M ratio will the system be in equilibrium? **P. 5047.** The cart of mass M and the flat block of mass m on the cart are moving at a speed of v towards a compression spring fixed to a wall, and having a spring constant of D. The coefficient of friction between the block and the cart is μ. *a*) Will the block slip or not when the collision occurs? *b*) How long does the collision last? *Data:* $M = 0.2$ kg, $m = 0.1$ kg, $v = 1$ m/s, $D = 4.4$ N/m, $\mu = 0.4$. **P. 5048.** Estimate the pressure difference in the tyre of a car between an „inner” point next to the rim of the wheel, and an „outer” point next to the tread area. The excess pressure of the tyre when the car is at rest is 2 bars, and the maximum allowed speed on the motorway is 130 km/h. **P. 5049.** To what minimum speed must a rocket be accelerated, in order that it reaches the Moon from the Earth? Compare this speed to the escape speed on Earth. (For the sake of simplicity, do not consider the motion of the Earth and the Moon.) **P. 5050.** There is some water and some water vapour above it in a closed container. What happens to the water if the water vapour is sucked out of the container, whilst the temperature of the water is kept constant, if this temperature is *a*) 100.00 °C; *b*) 20.00 °C? **P. 5051.** A sample of helium is taken through the processes shown in the *figure.* How much thermal energy is absorbed during the process? **P. 5052.** There is a small grain under a 1.5 cm wide glass sheet. Where is the visible image of the grain, if the light rays are perpendicular to the surface of the sheet, and the refractive index of the glass is $n = 1.5$? **P. 5053.** Determine the total luminosity of a star whose surface temperature is 7500 K, and whose diameter is 2.5 times bigger than that of the Sun. The surface temperature of the Sun is 5800 K, and express the luminosity of the star in terms of the luminosity of the Sun (which is considered to be 1). **P. 5054.** A nucleus of rest mass M, which is initially at rest can absorb a gamma quantum of energy hf. Determine the excitation energy of this nucleus in the process. (So by what amount does its rest energy increase in the process?) **P. 5055.** One end of a horizontally stretched rubber thread is moved periodically in the vertical direction, so transverse waves are travelling along the thread. A film is recorded about the motion of a small part of the thread, and three consecutive frames of this film are shown in the *figure.* In which direction does the energy propagate in the rope, from the left to the right or from the right to the left?