

A. 727. Tetszőleges (x_1, \dots, x_n) véges sorozatra jelölje $N(x_1, \dots, x_n)$ az olyan (i, j) indexpárok számát, amelyekre $1 \leq i < j \leq n$ és $x_i = x_j$.

Legyen p páratlan prímszám, $1 \leq n < p$, továbbá a_1, a_2, \dots, a_n és b_1, b_2, \dots, b_n tetszőleges modulo p maradékosztályok. Bizonyítsuk be, hogy az $1, 2, \dots, n$ indexeknek létezik olyan π permutációja, amire

$$N(a_1 + b_{\pi(1)}, a_2 + b_{\pi(2)}, \dots, a_n + b_{\pi(n)}) \leq \min(N(a_1, a_2, \dots, a_n), N(b_1, b_2, \dots, b_n)).$$

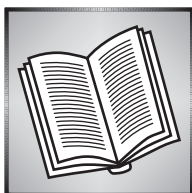
*

Beküldési határidő: 2018. június 10.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>

Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

*



Monte-Carlo-módszerek 2.

Februári számunkban bemutattuk a módszer használatát egy matematikai probléma megoldásánál. Folytatásként nézzük meg, hogyan használható a szimulációs módszer a fizika területén, például az elektrosztatikában. Legyen egy V térfogatban N számú pontszerű töltés vákuumban. Adjuk meg az i -edik ponttöltés nagyságát a Q_i számmal és helyét az \mathbf{r}_i helyvektorral ($1 \leq i \leq N$). A Coulomb-törvény segítségével a tér egy \mathbf{r} vektorral mutatott helyén kiszámítható az előbbi töltések által keltett $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ térerősség és $U(\mathbf{r})$ potenciál, melyek értékei

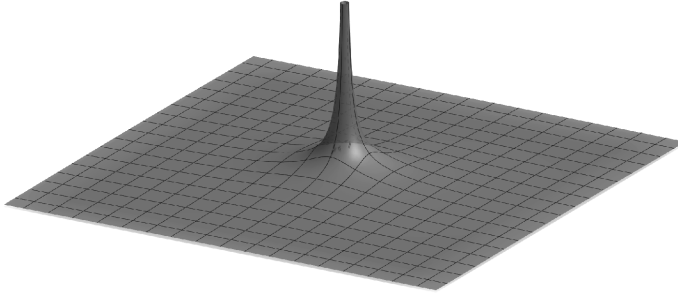
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = k \sum_{i=1}^N \frac{Q_i(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \quad \text{és} \quad U(\mathbf{r}) = k \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}.$$

Az összegzések egyszerűen elvégezhetők, nagyszámú ponttöltés esetén akár számítógépet is segítségül hívhatunk.

A térerősség és a potenciál meghatározása összetettebb feladat, ha a töltések nem pontszerűek, hanem folytonos töltéseloszlások vannak a térrészben, például testeken vagy azok felületén. Ekkor a Gauss-törvény használatával néhány szimmetrikus esetben könnyen kiszámíthatóak az előbbi mennyiségek. Általános esetben azonban el kell végezni az összegzéseket, illetve helyettük ekkor integrálni szükséges. Ha például a Q töltés egy A felületen, egyenletes töltéssűrűséggel helyezkedik el, akkor a felületet gondolatban dA nagyságú elemi részekre bontjuk, melyek mindegyikére $dQ = Q \frac{dA}{A}$ töltés jut $\sigma = \frac{Q}{A}$ töltéssűrűséggel. Az összeg helyére ekkor a következő integrálok lépnek:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = k \int_A \frac{\sigma(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{dA})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{dA}|^3} dA \quad \text{és} \quad U(\mathbf{r}) = k \int_A \frac{\sigma}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{dA}|} dA.$$

Az $U(\mathbf{r})$ potenciál a tér minden pontjához egy skalár értéket rendel. A függvény általános esetben például úgy szemléltethető, hogy az értékeihez hozzárendeljük egy színskála színeit, és azokkal színezzük a térbeli pontokat. Szerencsére a problémák egy részében a feladat olyan töltéselrendezésű, amely valamely térirányban szimmetrikus, így sokszor elég egy síkmetszetben található töltéseket vizsgálni és ebben a síkban ismerni a térerősség és a potenciál értékét. Ekkor U egy $R^2 \rightarrow R$ függvény, amely térben vagy akár síkban is ábrázolható, ez utóbbi esetben pl. szintvonalakkal vagy színekkel. Egy ponttöltés potenciálfüggvényének képe:

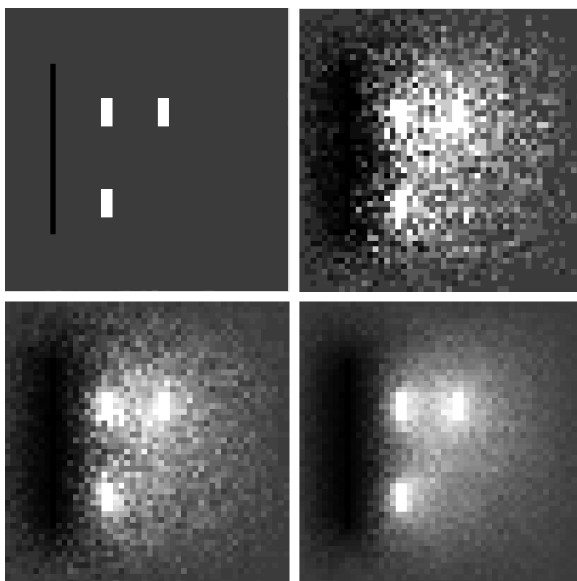


A potenciálfüggvény számítása összetett töltéseloszlások esetén nem egyszerű. A gyakorlati alkalmazások során elegendő a potenciál közelítő értékének ismerete, ami a következő bolyongásos szimulációval végezhető. Példaként keressük egy síkbeli töltéseloszlás potenciálját. A sík vizsgált részét gondolatban osszuk fel $N \times M$ elemi négyzetre, melyek mindegyike tartalmazhat $\pm q$ elemi töltést, vagy üres. A sík minden négyzetének adjunk egy kezdetben zérus $p(n, m)$ értéket, és indítsunk mindegyikből egy véletlenszerű mozgással rendelkező „részcskét”. A bolyongó részecske egy szimulációs lépésben a sík bármely négyzetéből egy csúcsban vagy élben vele szomszédos négyzetre léphet. Ha olyan mezőre ér, amelyben van töltés, akkor a mező töltése hozzáadódik a kiindulási hely $p(n, m)$ értékéhez. A bolyongást minden négyzetre S alkalommal elvégezzük, majd a kapott $p(n, m)$ értékeket S -sel osztjuk. Megmutatható, hogy az így létrejött $p(n, m)$ függvény a q_i töltések által létrehozott elektromos potenciált közelíti. A közelítés annál pontosabb, minél többször végezzük el a szimulációt, tehát S értékének növelésével az eredmény pontosítható.

A lap 2018. márciusi számában kitűzött **I. 453.** feladat lényegében ennek a szimulációnak az elvégzését és a potenciál színskálával történő ábrázolását tűzte ki feladatként a versenyzőknek.

A négy ábrán egy 50×50 -es, négyzet alakú terület látható:

- a bal felső képen a negatív és pozitív $\pm q$ elemi töltések helye;
- a jobb felső képen 5 szimuláció elvégzése után a potenciál szürkeárnyalatos ábrája;
- az alsó sor képein ugyanez 20 és 100 szimuláció elvégzése után.



A szimulációt végző program a fenti leírásnak, és az **I. 453.** feladatnak megfelelően a következő fontosabb részekből állítható össze:

1. **Adatok bevitele** ($N, M, S, \pm q_i$ töltések koordinátái)
2. **Kezdőértékek megadása**
3. **Szimuláció elvégzése** S -szer minden egységnégyzetre
4. **$p(n, m)$ értékeinek leképezése egy színskálára és ábrázolásuk**

A szimuláció elvégzéséhez érdemes fölvenni egy q kétdimenziós tömböt, melynek értékei megadják az elhelyezett töltések értékét a téglalap n -edik sorában és m -edik oszlopában (vagy 0-t), illetve egy hasonló p tömböt, amely a potenciál értékét tartalmazza a szimuláció során (kezdeti értéke 0).

Mivel egy töltéssel rendelkező négyzetből induló bolyongás azonnal egy töltéshez ér, ezért azokon a helyeken, ahol $q(n, m)$ nem nulla, $p(n, m)$ értéke egyenlő $q(n, m)$ értékével. Minden más esetben addig változtatunk helyet, amíg egy töltéssel rendelkező négyzethez nem értünk. Előfordulhat ugyan, hogy a bolyongás „kivezet” a vizsgált területről, vagyis túllép a határokon. Ekkor két lehetőség közül választhatunk: vagy engedjük, hogy a bolyongás tetszőleges távolra vezessen, vagy abbahagyjuk a bolyongást, és nem változtatunk a kiindulási négyzet p értékén, és új bolyongást indítunk. Az első esetben a program igen sokáig futna, amit nem szeretnénk, ezért érdemes a második esetet választani, illetve a vizsgált terület méreteit úgy megadni, hogy a töltések ne a szélén helyezkedjenek el. Így az elkóborlás esélye csekély, és nem befolyásolja számottevően a szimuláció eredményét.

A program többi részének elkészítése nem nehéz, az elkészült programok megnézhetők és tesztelhetők honlapunkon az **I. 453.** feladatnál.

Schmieder László