B. 4963. Egy háromszög hozzáírt körei legnagyobbikának sugara legyen r_a, a köré írt kör sugara pedig R. Igazoljuk, hogy $r_a \geqslant \frac{3}{2}R$.

(*5 pont*) *Erdős Pál* (1913–1996) feladata

B. 4964. Igaz-e, hogy ha az $f,g:\mathbb{R}\to[0,1]$ függvények periodikusak, és az $f+g$ függvény is periodikus, akkor van közös periódusuk?

(*6 pont*)

B. 4965. Egy $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$ vektorra legyen $\mathbf{e}_{\mathbf{x}}=\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$. Adott a nem elfajuló ABC háromszög, valamint az ABC síkjával nem egybeeső, de azzal párhuzamos $\mathcal{S}$ sík. Mutassuk meg, hogy pontosan egy olyan $P\in\mathcal{S}$ pont létezik, amire az $\mathbf{e}_{\overrightarrow{PA}}+\mathbf{e}_{\overrightarrow{PB}}+$ $+\,\mathbf{e}_{\overrightarrow{PC}}$ vektor merőleges $\mathcal{S}$-re.

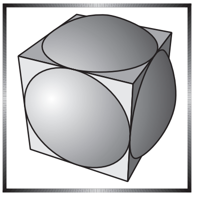
(*6 pont*)

❄

Beküldési határidő: 2018. június 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (725–727.)



A. 725. Legyen $\mathbb{R}^+$ a pozitív valós számok halmaza. Határozzuk meg azokat az $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ függvényeket, melyekre minden $x,y\in\mathbb{R}^+$ esetén teljesül az alábbi egyenlőség:

$$f\big(xy+f(y)^2\big)=f(x)f(y)+yf(y).$$

Javasolta: *Ashwin Sah* (Cambridge, Massachusetts, USA)

A. 726. Adott egy ABC háromszög, melynek beírt körének középpontja I. Messe az AI egyenes az ABC háromszög körülírt körét az $S\neq A$ pontban. Majd legyen az I pont tükörképe BC-re nézve J, és tegyük fel, hogy az SJ egyenes az ABC háromszög körülírt körét a $P\neq S$ pontban metszi másodjára. Mutassuk meg, hogy $AI=PI$.

Javasolta: *Mészáros József* (Galánta, Szlovákia)

A. 727. Tetszőleges $(x_1,\dots,x_n)$ véges sorozatra jelölje $N(x_1,\dots,x_n)$ az olyan (i,j) indexpárok számát, amelyekre $1\leqslant i<j\leqslant n$ és $x_i=x_j$.

Legyen p páratlan prímszám, $1\leqslant n<p$, továbbá $a_1,a_2,\dots,a_n$ és $b_1,b_2,\dots,b_n$ tetszőleges modulo p maradékosztályok. Bizonyítsuk be, hogy az $1,2,\dots,n$ indexeknek létezik olyan π permutációja, amire

$$N\big(a_1+b_{\pi(1)},a_2+b_{\pi(2)},\dots,a_n+b_{\pi(n)}\big)\leqslant \min\big(N(a_1,a_2,\dots,a_n),N(b_1,b_2,\dots,b_n)\big).$$

Beküldési határidő: 2018. június 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

Monte-Carlo-módszerek 2.

Februári számunkban bemutattuk a módszer használatát egy matematikai probléma megoldásánál. Folytatásként nézzük meg, hogyan használható a szimulációs módszer a fizika területén, például az elektrosztatikában. Legyen egy V térfogatban N számú pontszerű töltés vákuumban. Adjuk meg az i-edik ponttöltés nagyságát a $\mathbf{Q}_i$ számmal és helyét az $\mathbf{r}_i$ helyvektorral ($1\leqslant i\leqslant N$). A Coulomb-törvény segítségével a tér egy $\mathbf{r}$ vektorral mutatott helyén kiszámítható az előbbi töltések által keltett $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ térerősség és $U(\mathbf{r})$ potenciál, melyek értékei

$$\mathbf{E}(\mathbf{r})=k\sum_{i=1}^{N}\frac{Q_i(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|^3}\qquad\text{és}\qquad U(\mathbf{r})=k\sum_{i=1}^{N}\frac{Q_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|}.$$

Az összegzések egyszerűen elvégezhetők, nagyszámú ponttöltés esetén akár számítógépet is segítségül hívhatunk.

A térerősség és a potenciál meghatározása összetettebb feladat, ha a töltések nem pontszerűek, hanem folytonos töltéseloszlások vannak a térrészben, például testeken vagy azok felületén. Ekkor a Gauss-törvény használatával néhány szimmetrikus esetben könnyen kiszámíthatóak az előbbi mennyiségek. Általános esetben azonban el kell végezni az összegzéseket, illetve helyettük ekkor integrálni szükséges. Ha például a Q töltés egy A felületen, egyenletes töltéssűrűséggel helyezkedik el, akkor a felületet gondolatban dA nagyságú elemi részekre bontjuk, melyek mindegyikére $dQ=Q\frac{dA}{A}$ töltés jut $\sigma=\frac{Q}{A}$ töltéssűrűséggel. Az összeg helyére ekkor a következő integrálok lépnek:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r})=k\int\limits_A\frac{\sigma(\mathbf{r}-\mathbf{r}_{dA})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_{dA}|^3}dA\qquad\text{és}\qquad U(\mathbf{r})=k\int\limits_A\frac{\sigma}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_{dA}|}dA.$$