Feladatok mindenkinek

C. 1485. Legyen $x=1^2+3^2+5^2+\ldots+2017^2$ és $y=2^2+4^2+6^2+\ldots+2018^2$. Adjuk meg az
$$\frac{y-x}{y+x-(1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+2017\cdot 2018)}$$
tört értékét.

C. 1486. Adott az ABC szabályos háromszög és a k kör, melyeknek közös középpontja az O pont, területük pedig egyaránt $\sqrt{\frac{\pi}{\sqrt{27}}}$. Legyenek az AO, BO, CO szakaszok meghosszabbításainak a k körrel való metszéspontjai rendre az A', B', C' pontok. Adjuk meg az $AC'BA'CB'$ hatszög területének pontos értékét.

C. 1487. Kilenc színész háromfős helyzetgyakorlatokat játszik. Legkevesebb hány gyakorlatra van szükség ahhoz, hogy bármely két színész szerepeljen közösen?

Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1488. Öt szakaszról tudjuk, hogy bármelyik háromból mint oldalakból valódi háromszög szerkeszthető. Bizonyítsuk be, hogy az így kapott háromszögek közül legalább az egyik hegyesszögű.

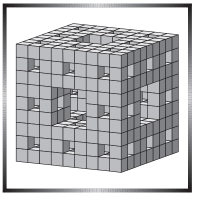
C. 1489. Egy sakktábla bal alsó sarkában áll egy sötét futó, jobb alsó sarkában pedig egy világos futó. Mindkét futó a saját színén haladva egyesével lép felfelé haladva a táblán véletlenszerűen jobbra vagy balra, míg el nem érik a felső sort. Mennyi a valószínűsége, hogy a sötét futó a világos futótól jobbra érkezik a felső sorba?

❄

Beküldési határidő: 2018. június 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

A B pontversenyben kitűzött feladatok (4957–4965.)



B. 4957. Egy pozitív egészekből álló halmazt nevezzünk *tyű-de-jónak,* ha a számok között nincs kettő, melyek különbsége 2. Hány tyű-de-jó részhalmaza van az $\{1,2,3,\ldots,10\}$ halmaznak?

(*3 pont*) Javasolta: *Róka Sándor* (Nyíregyháza)

B. 4958. Egy háromszög oldalai a, b, c, a beírt kör sugara r, a köréírt kör sugara R. Bizonyítsuk be, hogy ha

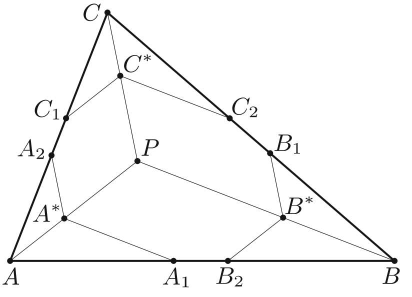
$$a+b+c=\frac{4}{rR} \quad \text{és} \quad \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}=6,$$

akkor $R=2r$.

(*4 pont*) (*Román versenyfeladat*)

B. 4959. Amikor Barnabás egyet bukfencezik, akkor a zsebében lévő n darab üveggolyó bármelyike egymástól függetlenül $0<p<1$ valószínűséggel kiesik a zsebéből. Ha egy bukfenc során legalább egy üveggolyó kiesett Barnabás zsebéből, akkor abbahagyja a bukfencezést, különben folytatja. Tudjuk, hogy miután abbahagyja Barnabás a bukfencezést, éppen 50% eséllyel van páros mennyiségű üveggolyó a zsebében. Mennyi lehetett n értéke?

(*4 pont*)



B. 4960. Legyen P az ABC háromszög belső pontja, az A^*, B^* és C^* pontok pedig rendre az AP, BP és CP szakaszok tetszőleges pontjai. Húzzunk párhuzamost az A^* ponton keresztül BP-vel és CP-vel, ezek messék az AB és AC oldalakat rendre az A_1 és A_2 pontokban az *ábra* szerint. Hasonlóan, a B^*-on keresztül CP-vel és AP-vel húzott párhuzamosok a BC és AB oldalakat rendre a B_1 és B_2 pontokban, míg a C^*-n keresztül AP-vel és BP-vel húzott párhuzamosok az AC és BC oldalakat rendre a C_1 és C_2 pontokban metszik. Mutassuk meg, hogy

$$AC_1\cdot BA_1\cdot CB_1=AB_2\cdot BC_2\cdot CA_2.$$

(*3 pont*) Javasolta: *Kozma József* (Szeged)

B. 4961. Három egységnyi sugarú kör metszetét az $\widehat{AB}$, $\widehat{AC}$ és $\widehat{BC}$ körívek határolják, a metszet kerülete k. Számítsuk ki az A, B és C középpontú, egységnyi sugarú körök metszetének kerületét.

(*4 pont*)

B. 4962. Legyen n pozitív egész. Oldjuk meg az

$$\begin{gathered}a_1^2+a_1-1=a_2\\ a_2^2+a_2-1=a_3\\ \vdots\\ a_n^2+a_n-1=a_1\end{gathered}$$

egyenletrendszert a valós számok halmazán.

(*5 pont*)

B. 4963. Egy háromszög hozzáírt körei legnagyobbikának sugara legyen r_a, a köré írt kör sugara pedig R. Igazoljuk, hogy $r_a \geqslant \frac{3}{2}R$.

(*5 pont*) *Erdős Pál* (1913–1996) feladata

B. 4964. Igaz-e, hogy ha az $f, g : \mathbb{R} \to [0, 1]$ függvények periodikusak, és az $f + g$ függvény is periodikus, akkor van közös periódusuk?

(*6 pont*)

B. 4965. Egy $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektorra legyen $\mathbf{e}_{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$. Adott a nem elfajuló ABC háromszög, valamint az ABC síkjával nem egybeeső, de azzal párhuzamos $\mathcal{S}$ sík. Mutassuk meg, hogy pontosan egy olyan $P \in \mathcal{S}$ pont létezik, amire az $\mathbf{e}_{\overrightarrow{PA}} + \mathbf{e}_{\overrightarrow{PB}} + \mathbf{e}_{\overrightarrow{PC}}$ vektor merőleges $\mathcal{S}$-re.

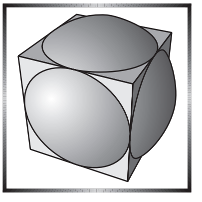
(*6 pont*)

❄

Beküldési határidő: 2018. június 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (725–727.)



A. 725. Legyen $\mathbb{R}^+$ a pozitív valós számok halmaza. Határozzuk meg azokat az $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ függvényeket, melyekre minden $x, y \in \mathbb{R}^+$ esetén teljesül az alábbi egyenlőség:

$$f\big(xy + f(y)^2\big) = f(x)f(y) + yf(y).$$

Javasolta: *Ashwin Sah* (Cambridge, Massachusetts, USA)

A. 726. Adott egy ABC háromszög, melynek beírt körének középpontja I. Messe az AI egyenes az ABC háromszög körülírt körét az $S \neq A$ pontban. Majd legyen az I pont tükörképe BC-re nézve J, és tegyük fel, hogy az SJ egyenes az ABC háromszög körülírt körét a $P \neq S$ pontban metszi másodjára. Mutassuk meg, hogy $AI = PI$.

Javasolta: *Mészáros József* (Galánta, Szlovákia)