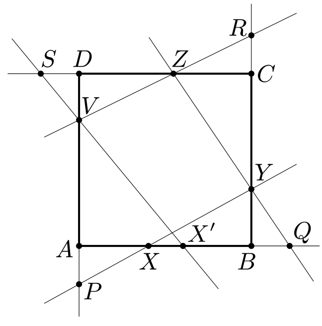
Matematika feladat megoldása

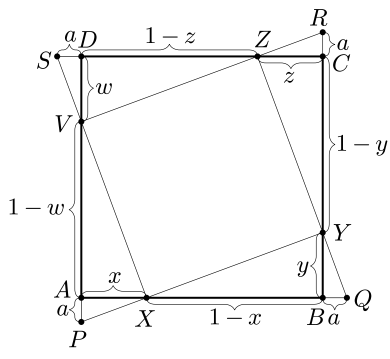
B. 4910. *Az $ABCD$ négyzet oldalegyenesein vegyük fel a P, Q, R és S pontokat az* ábra *szerint úgy, hogy $AP = BQ = CR = DS$. Az AB oldal tetszőleges belső X pontjából kiindulva a PX egyenes messe BC egyenesét Y-ban, QY messe CD egyenesét Z-ben, RZ a DA egyenest V-ben, végül SV az AB egyenest X'-ben. Bizonyítsuk be hogy ha X' és X egybeesnek, akkor $XYZV$ négyzet.*

(*5 pont*)



Megoldás. Tudjuk, hogy $X = X'$. Legyen a négyzet oldala egységnyi, ez nem jelent korlátozást. Legyen $AP = BQ = CR = DS = a$, továbbá $AX = x$, $XB = 1 - x$, $BY = y$, $YC = 1 - y$, $CZ = z$, $ZD = 1 - z$, $DV = w$ és $VA = 1 - w$.

Ekkor a DVZ háromszög hasonló lesz a CRZ háromszöghöz, mivel a DV oldal párhuzamos a CR oldallal, a másik két oldaluk pedig egy egyenesre esik. Megfelelő oldalaik aránya tehát megegyezik:



$$\frac{z}{1-z} = \frac{a}{w}.$$

Ugyanígy az SDV és az XAV háromszögek is hasonlóak lesznek, tehát a megfelelő oldalaik aránya megegyezik:

$$\frac{a}{w} = \frac{x}{1-w}.$$

Ebből a két egyenletből következik, hogy

$$\frac{z}{1-z} = \frac{x}{1-w}.$$

Ugyanígy felírva a PAX és XBY, illetve QBY és ZCY hasonló háromszögekre az arányokat kapjuk, hogy

$$\frac{a}{x} = \frac{y}{1-x} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x}{1-x} = \frac{a}{y} \text{ és } \frac{a}{y} = \frac{z}{1-y}.$$

Ezzel tehát az is teljesül, hogy

$$\frac{z}{1-y} = \frac{x}{1-x}.$$

Osszuk el egymással a $\frac{z}{1-z}=\frac{x}{1-w}$ és $\frac{z}{1-y}=\frac{x}{1-x}$ egyenletek megfelelő oldalait. Kapjuk, hogy

$$(1) \qquad \frac{1-y}{1-z}=\frac{1-x}{1-w}.$$

Az oldalak betűzésétől függetlenül jöttek ki ezek az arányok, így ugyanezek miatt felírható az is, hogy:

$$\frac{1-z}{1-w}=\frac{1-x}{1-y}.$$

Ebből átrendezéssel:

$$(2) \qquad \frac{1-y}{1-w}=\frac{1-x}{1-z}.$$

Az (1) és (2) hányadosára:

$$\frac{1-w}{1-z}=\frac{1-z}{1-w}.$$

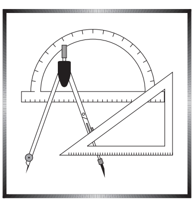
Ez pedig csak úgy lehet, ha

$$1-w=1-z.$$

Szimmetria miatt $1-y=1-x=1-w=1-z$ is igaz lesz. Ez pedig azt jelenti, hogy az $ABCD$ négyzet oldalait egyenlő arányban osztják az $XYZV$ négyszög csúcsai, tehát az XBY, YCZ, ZDV és VAX háromszögek egybevágó derékszögű háromszögek. Ebből pedig már következik, hogy $XYZV$ négyzet (mivel oldalai egyenlő hosszúak és merőlegesek egymásra), és éppen ezt akartuk belátni.

Csizmadia Viktória (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.) dolgozata alapján

Összesen 69 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 43, 4 pontot 8 versenyző. 2 pontos 2, 1 pontos 3 tanuló dolgozata. 0 pontot kapott 13 tanuló.



A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (1483–1489.)

Feladatok 10. évfolyamig

C. 1483. Mennyi a $6|x-1|+5|x-2|+4|x-3|+3|x+4|+2|x-5|$ kifejezés legkisebb értéke?

C. 1484. Az $ABCD$ olyan konvex négyszög, amelynek átlói nem merőlegesek egymásra. Az A, B, C, D csúcsokból az AC, illetve BD szakaszokra bocsátott merőlegeseknek létezik a csúcsoktól különböző talppontja, jelölje ezeket rendre A_1, B_1, C_1, D_1. Bizonyítsuk be, hogy az ezek által meghatározott négyszög hasonló az eredetihez.