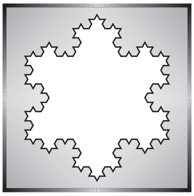
A táblázat alapján annak a valószínűsége, hogy az automatikus ellenőrző berendezés által hibásnak minősített gumi valóban hibás:

$$p = \frac{0{,}00495}{0{,}00495 + 0{,}0199} = \frac{99}{497} \approx 0{,}1992.$$

A táblázat alapján annak a valószínűsége, hogy az automatikus ellenőrző berendezés a megfelelő minősítést állapítja meg: $p = 0{,}9751 + 0{,}00495 = 0{,}98005$.

Varga Péter
Budapest



C gyakorlatok megoldása

C. 1387. *Határozzuk meg a számrendszer x alapját, ha teljesül az alábbi egyenlet:*

$$2016_x = x^3 + 2x + 342.$$

Matlap (Kolozsvár)

I. megoldás. Az x egy 6-nál nagyobb pozitív egész szám, mert az x alapú számrendszerben felírt szám tartalmaz 6-os számjegyet. Mivel $2016_x = 2x^3 + x + 6$, ezért a következő egyenletet írhatjuk fel:

$$2x^3 + x + 6 = x^3 + 2x + 342,$$

$$x^3 - x - 336 = 0.$$

Vizsgáljuk az egyenlet megoldásait a természetes számok körében, ezek a konstans tag osztói közül kerülhetnek ki. A -336 pozitív osztói sorban: $1, 2, 3, 4, 6, 7, \ldots$. Elég 7-től vizsgálni, mert $x > 6$. Az $x = 7$ kielégíti az egyenletet. Tehát $(x - 7)$ kiemelhető az egyenlet bal oldalán álló kifejezésből:

$$x^3 - x - 336 = (x - 7)(x^2 + 7x + 48) = 0.$$

Mivel egy szorzat pontosan akkor 0, ha az egyik tényezője 0, ezért meg kell még vizsgálni, hogy a másodfokú kifejezés értéke mikor 0. De az $x^2 + 7x + 48 = 0$ másodfokú egyenlet diszkriminánsa $D = 7^2 - 4 \cdot 48 < 0$, ezért nincs valós gyöke.

Tehát az egyetlen megoldás $x = 7$.

Csóka Zoárd (Győri Műszaki Szakképzési Centrum Jedlik Ányos Gépipari és Informatikai Szakgimn., Szki. és Koll., 10. évf.)

Rendezzük az $x^3 - x - 336 = 0$ egyenletet:

$$336 = x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x + 1)(x - 1) = (x - 1)x(x + 1).$$

Ezt felhasználva más módon is el lehetett jutni a megoldáshoz. Mutatunk néhány lehetséges utat.

II. megoldás. Mivel $x \in \mathbb{N}$ (illetve $x \geqslant 7$ a 2016_x-ben szereplő 6-os számjegy miatt), ezért lényegében három olyan, egymást követő pozitív egész számot keresünk, melyek szorzata 336. Mivel $\forall x_1 < x_2$ $(x_1, x_2 \in \mathbb{N})$ esetén

$$(x_1 - 1)x_1(x_1 + 1) < (x_2 - 1)x_2(x_2 + 1),$$

azért mert a két szorzatban a második kifejezés tényezői páronként mindig nagyobbak, az egyenletnek csak egy valós gyöke van. A korábban meghatározott legkisebb lehetséges $x = 7$ esetén az egyenlőség valóban fennáll ($6 \cdot 7 \cdot 8 = 336$), tehát ez az egyetlen megoldás.

Apagyi Dávid (Kecskeméti Katona J. Gimn., 9. évf.)

III. megoldás. Mivel x pozitív egész, ezért $x(x-1)(x+1)$ 3 egymást követő pozitív egész szám szorzata.

336 prímtényezős felbontása: $2^4 \cdot 3 \cdot 7$. Ebből ki is jön, hogy $6 \cdot 7 \cdot 8 = 336$, így $x = 7$ és más megoldás nem lehetséges.

Demeter Gergő (Szegedi Radnóti M. Kísérleti Gimn., 11. évf.)

IV. megoldás. Az utolsó egyenletből azt kapjuk, hogy három szomszédos, pozitív egész szám szorzata lesz 336. Mivel az adott számrendszerben fel lehet írni a 6-os számjegyet, ezért $x \geqslant 7$.

$$\sqrt[3]{(x-1)x(x+1)} = \sqrt[3]{336} \approx 6{,}95.$$

A három szám mértani közepe 6,95. . . , és a mértani közép nem lehet kisebb mindhárom számnál, vagyis a legkisebb szám maximum 6, tehát $x \leqslant 7$. Vagyis az x csak 7 lehet. Hogy az $x = 7$ jó-e, azt könnyen kiszámolhatjuk: $6 \cdot 7 \cdot 8 = 336$, vagyis ez tényleg jó megoldás.

Dobák Dániel (Budapest V. Ker. Eötvös J. Gimn., 10. évf.)

274 dolgozat érkezett. 5 pontos 210, 4 pontos 35, 3 pontos 14, 2 pontos 12, 1 pontos 1, 0 pontos 1 dolgozat. Nem versenyszerű 1 dolgozat.

C. 1468. *Igazoljuk, hogy ha a és b nemnegatív számok, akkor*

$$\frac{1}{2}(a+b)^2 + \frac{1}{4}(a+b) \geqslant a\sqrt{b} + b\sqrt{a}\,.$$

Mikor áll fenn egyenlőség?

Megoldás. A feladat feltétele alapján $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ $(a, b \in \mathbb{R})$, így $\sqrt{a}$ és $\sqrt{b}$ léteznek. Legyen

$$E(a;b) = \frac{1}{2}(a+b)^2 + \frac{1}{4}(a+b) - a\sqrt{b} - b\sqrt{a}.$$

Azt kell belátni, hogy $E(a;b) \geqslant 0$.

$$E(a;b) = \frac{1}{2}(a+b)^2 + \frac{1}{4}(a+b) - a\sqrt{b} - b\sqrt{a} =$$

$$= \frac{1}{2}a^2 + ab + \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{4}a + \frac{1}{4}b - a\sqrt{b} - b\sqrt{a} =$$

$$= \left(\frac{1}{2}a^2 - ab + \frac{1}{2}b^2\right) + \left(ab + \frac{1}{4}a - a\sqrt{b}\right) + \left(ab + \frac{1}{4}b - b\sqrt{a}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(a^2 - 2ab + b^2\right) + a\left(b + \frac{1}{4} - \sqrt{b}\right) + b\left(a + \frac{1}{4} - \sqrt{a}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(a-b)^2 + a\left(\sqrt{b} - \frac{1}{2}\right)^2 + b\left(\sqrt{a} - \frac{1}{2}\right)^2.$$

Tehát

$$E(a;b) = \frac{1}{2}\underbrace{(a-b)^2}_{\geqslant 0} + \underbrace{a}_{\geqslant 0}\underbrace{\left(\sqrt{b} - \frac{1}{2}\right)^2}_{\geqslant 0} + \underbrace{b}_{\geqslant 0}\underbrace{\left(\sqrt{a} - \frac{1}{2}\right)^2}_{\geqslant 0},$$

és mivel nemnegatív számok szorzata és összege is nemnegatív, kapjuk, hogy $E(a;b) \geqslant 0$ (és ez az, amit bizonyítani akartunk).

Az egyenlőség akkor teljesül, ha (az összegben) minden tag nulla:

$$\frac{1}{2}(a-b)^2 = 0 \quad \to \quad a - b = 0 \quad \Rightarrow \quad a = b$$

és

$$a\left(\sqrt{b} - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0 \quad \text{vagy} \quad \sqrt{b} - \frac{1}{2} = 0, \quad \text{azaz} \quad b = \frac{1}{4}$$

és

$$a\left(\sqrt{a} - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 0 \quad \text{vagy} \quad \sqrt{a} - \frac{1}{2} = 0, \quad \text{azaz} \quad a = \frac{1}{4}.$$

Mindezek alapján az egyenlőség akkor teljesül (az $a = b$ feltétel figyelembevételével), ha $a = b = 0$, illetve ha $a = b = \frac{1}{4}$.

Molnár István (Békéscsaba, Széchenyi István Szki., 11. évf.)

Megjegyzés. A versenyzők többsége a honlapon közölthöz hasonló módon oldotta meg a feladatot. A leggyakoribb hiba az egyenlőség egyik esetének hiánya volt.

43 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 10 versenyző: Agócs Katinka, Balog Lóránd, Kiszelovics Dorina, Magyar Boglárka, Mészáros Márton, Molnár István, Németh Csilla Márta, Spányik Teodor, Surján Anett, Szécsi Adél Lilla. 4 pontos 13, 3 pontos 5, 2 pontos 1, 1 pontos 10, 0 pontos 4 dolgozat.