KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK
INFORMATIKA ROVATTAL BŐVÍTVE
ALAPÍTOTTA: **ARANY DÁNIEL** 1894-ben

68. évfolyam 5. szám — Budapest, 2018. május

Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta 64 oldalon. ÁRA: 950 Ft

TARTALOMJEGYZÉK

Főszerkesztő: RATKÓ ÉVA
Fizikus szerkesztő: GNÄDIG PÉTER
Műszaki szerkesztő: MIKLÓS ILDIKÓ
Kiadja: MATFUND ALAPÍTVÁNY
Alapítványi képviselő: OLÁH VERA
Felelős kiadó: KATONA GYULA
Projektvezető: NAGYNÉ SZOKOL ÁGNES
Nyomda: OOK-PRESS Kft.
Felelős vezető: SZATHMÁRY ATTILA

INDEX: 25 450 ISSN 1215-9247

A matematika bizottság vezetője: HERMANN PÉTER

Tagjai: KÁROLYI GERGELY, KISS GÉZA, KÓS GÉZA, KÓS RITA, LORÁNT LÁSZLÓ, LORÁNTFY LÁSZLÓ, PACH PÉTER PÁL, SZABÓ ÉVA, SZTRANYÁK ATTILA, VÍGH VIKTOR, WILLIAMS KADA

A fizika bizottság vezetője: RADNAI GYULA

Tagjai: BARANYAI KLÁRA, GÁLFI LÁSZLÓ, HOLICS LÁSZLÓ, HONYEK GYULA, SIMON LÁSZLÓ, SZÁSZ KRISZTIÁN, VIGH MÁTÉ, VLADÁR KÁROLY, WOYNAROVICH FERENC

Az informatika bizottság vezetője: SCHMIEDER LÁSZLÓ

Tagjai: FARKAS CSABA, FODOR ZSOLT, LÁSZLÓ NIKOLETT, LÓCZI LAJOS, LUTTER ANDRÁS, SIEGLER GÁBOR

Fordítók: GRÓF ANDREA, TASNÁDI ANIKÓ

Szerkesztőségi titkár: TRÁSY GYÖRGYNÉ

A szerkesztőség címe: 1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1.A, II. emelet 2.76.;
Telefon: 372-2500/6541; 372-2850
A lap megrendelhető az Interneten:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.h.shtml`.
Előfizetési díj egy évre: 8100 Ft

Kéziratokat nem őrzünk meg és nem küldünk vissza. Minden jog a KöMaL tulajdonosaié.

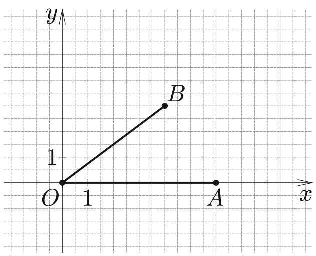
E-mail: `szerk@komal.hu`
Internet: `http://www.komal.hu`
This journal can be ordered from the Editorial office:
Pázmány Péter sétány 1.A, II. emelet 2.76., 1117–Budapest, Hungary
telephone: +36 (1) 372-2850
or on the Postal address
H–1518 Budapest 112, P.O.B. 32, Hungary,
or on the Internet:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.e.shtml`.

A Lapban megjelenő hirdetések tartalmáért felelősséget nem vállalunk.

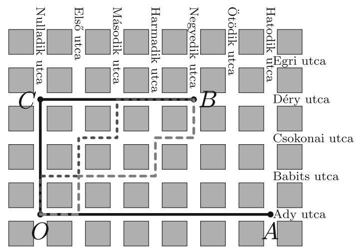
Taxik és távolságok

1. A taxi geometria bevezetése

Az euklideszi geometriában két pont távolságát „légvonalban" határozzuk meg (lásd az *1. ábrát*). Ezzel szemben a taxi geometria esetében, mint ahogy azt az elnevezése is sugallja, a P és Q pontok közötti távolságot úgy adjuk meg, ahogy egy taxi haladna a legrövidebb úton egy városban P pontból Q-ba.



1. ábra



2. ábra

A taxi geometria egy jobb modellt ad a városi közlekedésre, mint az euklideszi. Az ebben a geometriában mért távolság sokkal hasznosabb információ lehet a közlekedő ember számára, mint az euklideszi, mivel sajnos rá vagyunk kényszerülve, hogy utcákon, járdákon közlekedjünk és nincs alkalmunk légvonalban eljutni valahova. Az, hogy egy pont tőlünk az euklideszi távolság szerint pontosan $\sqrt{30}$ egységnyi távolságra van általában nem túl hasznos információ. Az emberek számára tehát gyakran az igazi távolság a taxi távolság. De – ahogy minden alkalommal, mikor matematikai modellt készítünk egy valós rendszerre – szükség van bizonyos egyszerűsítő feltételekre, mivel nélkülük a modell felállítása vagy a probléma megoldása túl bonyolulttá válhat. Esetünkben jelentősen leegyszerűsítjük a város képét: minden utcának észak-dél, illetve kelet-nyugat irányúnak kell lennie, mint ahogyan ezt a *2. ábra* is szemlélteti, az utcáknak nincsen szélessége, az utcák kereszteződései az egész koordinátájú pontok, és egy háztömböt egy négyzetrács jelöl. Sajnos nincs olyan település a világon, amely teljesen megfelelne ezeknek a feltételeknek, léteznek viszont városrészek, amelyek nagyjából igen. Ilyenek például az amerikai egyesült államokbeli New Yorkban található Manhattan egyes részei.

Most pedig képzeljük el az A és B pontokat, mintha egy város különböző pontjai lennének a *2. ábrához* hasonlóan. Ekkor már teljesen máshogy gondolkodunk, ha azt szeretnénk megtudni, hogy a kiindulási helyünktől, vagyis az O ponttól, az Ady és a Hatodik utca kereszteződésében lévő A pont, vagy a Déry és a Hatodik utca találkozásánál található B pont van közelebb. Elsődlegesen nem a Pitagorasztétellel fogunk okoskodni, hanem egyszerűen megszámoljuk, hogy hány háztömbnyi távolságot kell megtennünk úgy, hogy csak a tengelyekkel párhuzamosan haladhatunk, hogy eljussunk a célpontokhoz. Más szóval hányat kell „vízszintesen”, vagyis kelet-nyugati irányban, illetve „függőlegesen”, azaz észak-déli irányban lépnünk, ha a város egyik pontjából el szeretnénk jutni egy másikba, méghozzá a lehető legrövidebb úton. Az egyszerűség kedvéért a továbbiakban ezeket az irányokat a „felfelé”, vagy „lefelé”, illetve „ jobbra”, „balra” kifejezésekkel illetjük. Ha O-ból el akarunk menni B-be, ezt többféleképpen is megtehetjük, például a *2. ábrán* jelzett utakon, ekkor mindkét esetben valóban úgy közlekedtünk, mint egy taxi, mivel csak vízszintesen és függőlegesen mozogtunk. Legyenek O és B egy koordináta-rendszernek a pontjai, ahol $O=(o_1;o_2)$ és $B=(b_1;b_2)$. Ekkor O-ból B-be haladva legalább $|o_1-b_1|$ hosszú utat kell vízszintesen megtennünk és legalább $|o_2-b_2|$ utat kell megtennünk függőlegesen. A felírt szakaszok hosszainak az összege fogja megadni, hogy milyen hossszú úton jutunk el az egyik pontból a másikba, ha a lehető legrövidebben megyünk. Ezek után felírhatjuk a két pont „taxi távolságát” megadó képletet: $d_T(O;B)=|b_1-o_1|+|b_2-o_2|$. Természetesen a képlet úgy is használható, ha a pontok koordinátái nem egészek, de az egyszerűség kedvéért a továbbiakban csak egész koordinátájú pontokkal foglalkozunk.

Jelölje a későbbiekben d_E az euklideszi, míg d_T a taxi geometriabeli távolságot. Nézzük meg az *1. ábrán* az $A=(6;0)$ és $B=(3;4)$ pontok euklideszi távolságát az origótól. Az A pont esetében ez nyilván $d_E(A;O)=6$, míg a B pont esetében a Pitagorasz-tétel segítségével tudjuk azt kiszámolni, azaz $d_E(B;O)=$ $=\sqrt{(0-3)^2+(0-4)^2}=5$. Ebből következik, hogy $d_E(B;O)<d_E(A;O)$, tehát az euklideszi távolság szerint B közelebb van O-hoz, mint az A pont. A következőkben számoljuk ki ugyanezen pontok között a taxi távolságot is. Ahhoz, hogy az O ponttól eljussunk A-ba 6, míg a B pont esetében $3+4=7$ háztömbnyi távolságot kell megtennünk. Vagyis $d_T(A;O)=6$ és $d_T(B;O)=3+4=7$, ahol az utóbbi esetben az összeg első tagja a függőlegesen, a második pedig a vízszintesen megtett út. Megfigyelhető, hogy $d_T(B;O)>d_T(A;O)$, tehát a taxi távolság szerint A közelebb van O-hoz, mint B.

Érdemes ezután megvizsgálni, mit mondhatunk általában a kétféle távolság nagyságának kapcsolatáról.

1. állítás. *Két pont euklideszi távolsága legfeljebb akkora, mint a taxi távolságuk, ami pedig legfeljebb az euklideszi távolság $\sqrt{2}$-szerese.*

Bizonyítás. Legyenek $X=(x_1;x_2)$ és $Y=(y_1;y_2)$ a sík pontjai. Ekkor az abszolútérték nemnegativitásának köszönhetően $2|x_1-y_1|\,|x_2-y_2|\geqslant 0$ teljesül. Adjunk hozzá az egyenlőtlenség mindkét oldalához $|x_1-y_1|^2+|x_2-y_2|^2$-et, ekkor a következőt kapjuk:

$$2|x_1-y_1|\,|x_2-y_2|+|x_1-y_1|^2+|x_2-y_2|^2\geqslant |x_1-y_1|^2+|x_2-y_2|^2.$$

Mivel az egyenlőtlenség jobb oldalán egy teljes négyzet található, így azt összevonva,

$$\big(|x_1-y_1|+|x_2-y_2|\big)^2\geqslant (x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2.$$

Mindkét oldalon gyököt vonva, az egyszerűsítés után azt kapjuk, hogy

$$|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \geqslant \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2},$$

ami nem más, mint $d_T \geqslant d_E$. Az euklideszi távolság tehát nagyobb vagy egyenlő, mint a taxi távolság. Egyenlőség pedig csak abban az esetben áll fenn, ha $x_1 = y_1$, vagy $x_2 = y_2$ teljesül, vagyis x és y egy (vízszintes vagy függőleges) egyenesen helyezkednek el. Hasonlóan, az $\big(|x_1 - x_2| - |y_1 - y_2|\big)^2 \geqslant 0$ egyenlőtlenség rendezésével

$$|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2 \geqslant 2|x_1 - x_2| \cdot |y_1 - y_2|,$$

$$2\big((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2\big) \geqslant (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + 2|x_1 - x_2| \cdot |y_1 - y_2|,$$

$$2\big((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2\big) \geqslant \big(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|\big)^2,$$

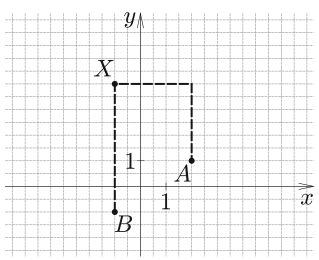
négyzetgyököt vonva pedig

$$\sqrt{2}\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \geqslant |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|,$$

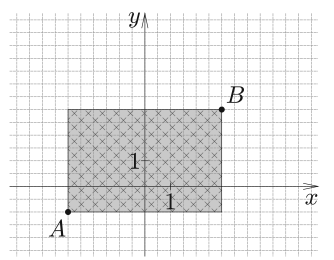
azaz valóban $\sqrt{2}d_E \geqslant d_T$. Ezzel az állítást beláttuk. □

Meg kell még jegyeznünk, hogy a fentiekben csak olyan pontokkal foglalkoztunk, amelyek egész számú koordinátákkal rendelkeznek, de ugyanúgy, ahogy bármely, akár nem egész koordinátájú pontok esetében is ki tudjuk számolni azok euklideszi távolságát, így a taxi távolságot is. Bármely két pontnak van tehát taxi távolsága, attól függetlenül, hogy azok két utca találkozásánál vannak vagy sem.

A következőkben nézzünk meg néhány „gyakorlati” problémát, amelyek megoldásában a taxi geometriát célszerű alkalmazni az euklideszi helyett.



3. ábra



4. ábra

1. feladat. *Az ideális városban bejelentés érkezett a rendőrségi diszpécserhez, miszerint baleset történt az $X = (-1; 4)$ pontban. Két járőrkocsi is a baleset közelében van, az egyik az $A = (2; 1)$, míg a másik a $B = (-1; -1)$ helyen. Melyik kocsit küldjék a baleset helyszínére?*

Megoldás. Vegyünk egy koordináta-rendszert és jelöljük rajta az $X = (-1; 4)$, $A = (2; 1)$ és $B = (-1; -1)$ pontokat. Mivel azt szeretnénk, hogy egy járőr minél előbb a helyszínre érjen, a legközelebbi kocsit kell odaküldenünk. Ehhez ki kell számolnunk, hogy A és B milyen távolságra vannak X-től a taxi távolság szerint. Nézzük meg először az A és X közötti távolságot, ez az előzőekben leírtak alapján úgy számolható ki, hogy összeadjuk, hogy hány háztömböt kell vízszintesen, illetve függőlegesen haladnunk A-tól X-ig, vagyis $d_T(A;X) = \big|2-(-1)\big| + |1-4| = 6$. Hasonlóan járjunk el a B és X pontok esetében, azaz $d_T(B;X) = \big|-1-(-1)\big| + |-1-4| = 5$. Ezek alapján azt kaptuk, hogy az A-val jelölt rendőrautó 6, míg a B-vel jelölt rendőrautó 5 háztömbnyi távolságra van a baleset helyszínétől. A diszpécser a B kocsit fogja a baleset helyszínére küldeni, mivel az közelebb van ahhoz, így gyorsabban fog odaérni (feltéve persze, hogy a városban mindenütt ugyanakkora a forgalom).

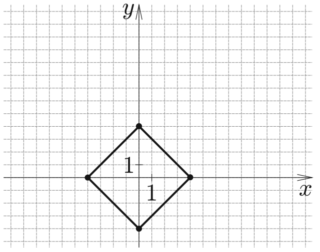
2. feladat. *Anna és Balázs lakást keresnek az ideális városban, Anna egy bankban dolgozik, amely az $A=(-3;-1)$ kereszteződésben található, míg Balázs egy iskolában, amely $B=(3;3)$-ban van. Úgy döntöttek, hogy olyan helyen keresnek albérletet, ahol Anna munkahelyétől a lakásig és Balázs munkahelyétől a lakásig vett távolságok összege minimális. Mely kereszteződésekben keressenek lakást?*

Megoldás. Vegyünk egy koordináta-rendszert, ahol jelöljük Anna munkahelyét A-val, Balázsét B-vel és L-lel a keresendő lakást. A kérdés matematikailag megfogalmazva az, hogy keressük azon L pontokat, amelyekre a $d_T(A;L) + d_T(B;L)$ kifejezés minimális. Ahhoz, hogy A-ból B-be eljussunk a legrövidebb úton, függőlegesen felfelé kell haladnunk 4 háztömböt és vízszintesen jobbra 6-ot. Ezt többféleképpen is megtehetjük attól függően, hogy melyik kereszteződésben melyik irányt választjuk a kettő közül. Az összes lehetséges útvonalat jelölve a *4. ábrán* lévő téglalapot kapjuk. Ha ennek a belsejében vagy a határán lévő kereszteződésekben keresünk albérletet, akkor az A-tól és B-től vett távolságának az összege 10, hiszen ekkor A-tól az albérletig és az albérlettől B-ig megtett út éppen A és B távolsága. Tekintsünk most egy tetszőleges pontot a kapott téglalapon kívül az első síknegyedben és tegyük fel, hogy ez a keresett lakás, legyen ez például az $L=(1;5)$. Ekkor L-nek az A-tól vett távolsága $d_T(A;L) = |-3-1| + |-1-5| = 10$ és B-től $d_T(B;L) = |3-1| + |3-5| = 4$. Vagyis ebben az esetben $d_T(A;L) + d_T(B;L) = 14$. Ez láthatóan több, mintha az előzőekben megbeszélt területen béreltek volna lakást, hiszen itt az A pontból kiindulva 4 háztömbnyit kell gyalogolnunk „felfelé” ahhoz, hogy eljussunk a B-n átmenő vízszintes (kelet-nyugati) egyenesig (utcáig), de mivel az L „feljebb” található, ezért még 2-t kell megtennünk ebbe az irányba. Jobbra ugyan kevesebbet kell mennünk, 4 háztömbnyit, viszont a „hiányzó” 2 háztömböt B-nek kell megtennie „balra” és ezen felül B-nek is haladnia kell ugyanannyit „felfelé”, mint amennyi extra háztömböt kellett A-nak. Összeszámolva, többet kellett függőlegesen és vízszintesen is haladnunk, mintha a téglalap belsejéből, vagy határáról választottunk volna egy pontot. Hasonló eredményeket kapunk, ha a többi síknegyedből választunk pontokat a téglalapon kívül. A $d_T(A;L) + d_T(B;L)$ összeg minimuma tehát 10, és a minimumot adó pontok a *4. ábrán* jelölt téglalap pontjai.

2. A kör

Az euklideszi geometriában a síkon egy kört vagy körvonalat a következőképpen definiálunk.

1. definíció. A körvonal a sík azon pontjainak a mértani helye, amelyek a sík egy adott pontjától adott távolságra helyezkednek el. Az adott pont a kör középpontja, míg a távolságot a kör sugarának nevezzük.



5. ábra

Ha a megszokott euklideszi távolságot vesszük figyelembe, akkor egy „kör" alakú alakzatot kapunk, viszont a taxi távolság esetében a kör már nem így fog kinézni, azaz nem lesz kör alakú. Ahhoz, hogy megtudjuk, hogy milyen lesz az új alakzatunk, vegyünk egy $(x_0; y_0)$ pontot és keressük meg azokat az $(x; y)$ pontokat, amelyek tőle adott r taxi távolságra helyezkednek el. Vagyis $d_T\big((x_0; y_0), (x; y)\big) = |x_0 - x| + |y_0 - y| = r$. Nézzük meg az abszolútértékek feloldására szolgáló négy esetet és az általuk meghatározott alakzatokat. Ha $x_0 \geqslant x$ és $y_0 \geqslant y$, akkor elhagyva az abszolútérték jeleket az egyenletünk $x_0 - x + y_0 - y = r$, amelyet átrendezve $y = -x + x_0 + y_0 - r$. Az egyenlet az $x_0 \geqslant x$ és $y_0 \geqslant y$ feltételek mellett egy szakaszt határoz meg, amelynek pontjai r taxi távolságra vannak az $(x_0; y_0)$ ponttól és végpontjai $(x_0 - r; y_0)$ és $(x_0; y_0 - r)$. Ha $x_0 \leqslant x$ és $y_0 \geqslant y$, akkor az egyenlet

$$-(x_0 - x) + y_0 - y = r, \quad \text{átrendezve} \quad y = x - x_0 + y_0 - r.$$

Ennek a szakasznak a végpontjai az $(x_0 + r; y_0)$ és az $(x_0; y_0 - r)$. Ha $x_0 \leqslant x$ és $y_0 \leqslant y$, akkor a $-(x_0 - x) - (y_0 - y) = r$ egyenletet kapjuk, amelyet átrendezve az $y = -x + x_0 + y_0 + r$ kifejezést kapjuk. A szakasz végpontjai ebben az esetben $(x_0 + r; y_0)$ és $(x_0; y_0 + r)$. Ha $x_0 \geqslant x$ és $y_0 \leqslant y$, akkor az egyenlet $x_0 - x - (y_0 - y) = r$, amelyet ha átrendezünk, az $y = x - x_0 + y_0 + r$ egyenletet kapjuk. Ekkor a kapott szakasz végpontjai $(x_0; y_0 + r)$ és $(x_0 - r; y_0)$. Vegyük észre, hogy az egyes szakaszok végpontjai megegyeznek, így egy négyzetet határoznak meg, amelynek a csúcsai az $(x_0; y_0 - r)$, $(x_0 + r; y_0)$, $(x_0; y_0 + r)$ és az $(x_0 - r; y_0)$ pontok lesznek. A kör a taxi geometriában tehát egy euklideszi értelemben vett négyzet, amelynek csúcsai az előbbi pontok.

Alkalmazzuk a fentiekben leírtakat néhány feladatban.

3. feladat. *Eszter az ideális városban járt, amikor az $E = (2; 1)$ pontban észrevette, hogy fogyóban van az üzemanyaga. Tudja, hogy 5 háztömb távolságban található egy benzinkút. Mely pontokban helyezkedhet el a benzinkút?*

Megoldás. A koordináta-rendszerben vegyük fel az E pontot. Azokat a pontokat keressük, amelyek 5 háztömb távolságra vannak az E-től, vagyis egy adott ponttól egyenlő távolságra lévő pontokat. Ez azt jelenti, hogy egy E középpontú 5 sugarú taxi kört akarunk meghatározni. Ekkor a $(2; 1+5) = (2; 6)$, $(2; 1-5) = (2; -4)$, $(2+5; 1) = (7; 1)$ és $(2-5; 1) = (-3; 1)$ pontok meghatároznak egy euklideszi értelemben vett négyzetet, vagyis az E középpontú 5 sugarú taxi kört. A taxi körvonalat alkotó pontok mindegyike tehát 5 taxi távolságra van Eszter jelenlegi helyétől, vagyis megállapíthatjuk, hogy a keresett benzinkút a taxi körvonal valamelyik pontjában helyezkedik el. Ha az y-tengellyel párhuzamosan mozdítjuk el a pontot, akkor a távolsága E-től nőni fog. Ha viszont az x-tengellyel párhuzamosan indulunk el, akkor az egyik irányba csökkenni, a másikba pedig ismételten nőni fog a távolság a két pont között. A következőkben próbáljuk meg egy, a ponton átmenő 1 meredekségű egyenesen mozgatni a pontunkat, ekkor ha a negyedik síknegyed felé haladunk, akkor ismét azt fogjuk tapasztalni, hogy a távolság egyre csak nő. Azonban, ha a másik irányt választjuk, akkor a távolságunk nem fog változni, vagyis ugyanúgy 5 marad, egészen a $(2;6)$ csúcsig, onnantól kezdve az egyenesen tovább haladva a távolságuk ismét nőni fog.

Ezek a pontok mind jó távolságra lesznek E-től. Most nézzük meg az ugyanezen a ponton áthaladó -1 meredekségű egyenest. Ebben az esetben ha az első síknegyed felé megyünk, akkor a távolság egyre csak nő, viszont a másik irányban haladva újra jó pontokat kapunk, mivel ezek ugyanúgy 5 háztömbnyire lesznek E-től. Ismét csak egy csúcsig, méghozzá a $(2;-4)$-ig mehetünk, mivel ha tovább folytatjuk utunkat az egyenesen a távolság megint nőni fog. Ezt a gondolatmenetet alkalmazva a $(-3;1)$ pontra hasonló alakzatot fogunk kapni. Ha vesszük az unióját a másik pontnál kapott alakzattal egy négyzetet fogunk kapni, amelynek az összes pontja pontosan 5 távolságra lesz Eszter jelenlegi helyétől, vagyis ezen a vonalon kell elhelyezkednie a benzinkútnak.

4. feladat. *Péter az ideális városban dolgozik egy irodában, amely az* $I = (1;2)$ *pontban helyezkedik el. Minden nap eljár ebédelni, de mivel nem szeretne túl messzire menni a munkahelyétől, így eldöntötte, hogy legfeljebb* 3 *háztömbnyire hajlandó éttermet keresni. Hol találhatók azok az éttermek a városban, ahol Péter elfogyaszthatja az ebédjét?*

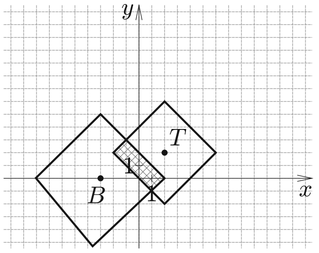
Megoldás. Vegyük fel a koordináta-rendszerünkben az irodát, ahol Péter dolgozik. Keressük meg azokat a pontokat, amelyek pontosan 3 távolságra vannak I-től a taxi geometriában. A fentiekben leírtak alapján tudjuk, hogy azok az

$$(1;2+3)=(1;5),\ (1;2-3)=(1;-1),\ (1+3;2)=(4;2) \text{ és } (1-3;2)=(-2;5)$$

pontok által meghatározott euklideszi értelemben vett négyzetlap pontjai. Péter a négyzetlap pontjai között kereshet éttermet.

5. feladat. *Egy építész cég szeretne egy apartmanházat felépíteni, méghozzá úgy, hogy az legfeljebb* 5 *háztömb távolságban legyen a* $B = (-3;0)$ *pontban található bevásárlóközponttól, illetve, hogy legfeljebb* 4 *háztömbnyire legyen a teniszpályától, amely a* $T = (2;2)$ *pontban helyezkedik el. Hova építheti fel a házat, hogy mindkettő feltétel teljesüljön?*

Megoldás. Gondoljuk meg, hogy hogyan is oldanánk meg a feladatot a szokásos távolságfüggvény mellett. Vegyünk fel egy koordináta-rendszert és abban jelöljük a B és T pontokat a megfelelő helyen. A feladat szerint a B ponttól legfeljebb 5 háztömb távolságra építkezhetünk, ezen pontok halmaza ekkor egy körlap lesz. Ugyanígy járhatunk el a T pont esetében is. Ekkor kaptunk két körlapot, mindkét

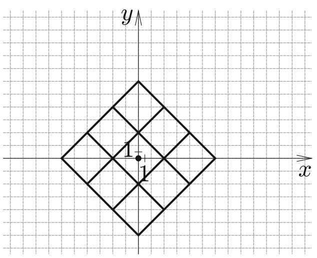


6. ábra

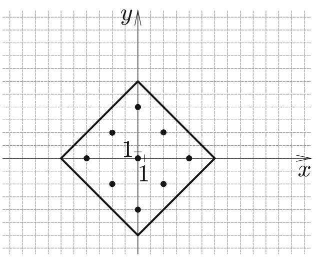
feltételünk akkor fog egyszerre teljesülni, hogyha a két körlap metszetében építkezünk. Ha most a taxi metrikában oldjuk meg a feladatot, hasonlóan kell eljárnunk, azzal a különbséggel, hogy az előzőek alapján tudjuk, hogy a körlapok ebben az esetben négyzetlapok lesznek, méghozzá pontosan úgy, mint a *6. ábrán.* Ha a két négyzetlap metszetében keres az építész cég helyet az apartmanház felépítéséhez, biztosan teljesülni fog mindkét feltétel.

6. feladat. *Egy telefontársaság (a* 20*. század első felében ...) telefonfülkéket szeretne telepíteni az ideális városba, méghozzá úgy, hogy mindenki, aki legfeljebb* 12 *háztömbnyi távolságra lakik a városközponttól, legfeljebb* 4 *háztömbnyire legyen egy telefonfülkétől. Hová tegye a telefonfülkéket a cég?*

Megoldás. Vegyünk fel egy koordináta-rendszert, ahol legyen az origó a városközpont. Ettől legfeljebb 12 háztömbnyi távolságnyira szeretnénk a telefonfülkéket telepíteni. Nézzük meg először azokat a pontokat, amelyek pontosan ekkora távolságra lesznek az origótól. Egy adott ponttól egyenlő távolságra lévő pontok halmazát, azaz egy taxi kört fogunk ismét keresni. Ha ezt tudjuk, akkor felírhatjuk a taxi kör csúcsait: $(12;0)$, $(-12;0)$, $(0;12)$ és $(0;-12)$, ezek megadják a 12 sugarú, origó centrumú taxi körlapot. A kapott taxi kört fel tudjuk osztani, ahogyan a *7. ábra* is mutatja, 9 egybevágó részre. Látható, hogy az így kapott euklideszi értelemben vett négyszögek 4 egységnyi sugarú taxi körök. Ha ezen körök mindegyikébe elhelyezünk egy-egy fülkét, akkor a 12 sugarú körlap egész területére teljesül, hogy az ott élők legfeljebb 4 háztömbnyire vannak a legközelebbi fülkétől. Azok, akik a taxi körök határán élnek 2; azok, akik a négyzetek megfelelő sarkaiban élnek 4 fülke közül is választhatnak. Ahogyan a *8. ábrán* is láthatjuk, 9 fülke elég lesz a terület teljes lefedéséhez.



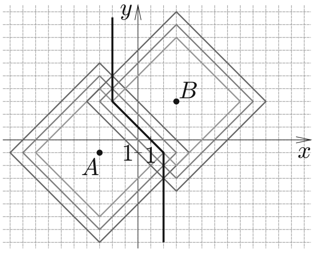
7. ábra



8. ábra

7. feladat. *Anna és Balázs albérletet keresnek. Egyetlen feltételhez ragaszkodnak, méghozzá ahhoz, hogy mindketten egyenlő távolságra lakjanak a munkahelyüktől, vagyis Anna a banktól, amely az* $A=(-3;-1)$ *pontban található és Balázs az iskolától, amely a* $B=(3;3)$ *pontban van.*

Megoldás. Ahogy már a 2. feladatban is kiszámoltuk $d_T(A;B) = |-3-3| + |-1-3| = 10$, ennek a fele 5, vagyis az albérlet legalább 5 taxi távolságra kell, hogy legyen A-tól és B-től is. Keressük meg először az A és B pontoktól 5 háztömbnyi távolságra lévő pontokat. Egy adott ponttól adott távolságra lévő pontokat keresünk, vagyis egy-egy taxi kört. Az A pontnál a $(-3;4)$, $(-8;-1)$, $(-3;-6)$ és $(2;-1)$ pontok, míg a B esetében a $(3;8)$, $(-2;3)$, $(3;-2)$ és $(8;3)$ pontok határozzák meg az 5 sugarú taxi köröket. A két taxi kör az oldalszakaszaik egy részében fognak érintkezni, ahogyan az a *9. ábrán* is látható a belső négyzetek esetében, ezek azok a pontok, amelyekre teljesül, hogy mindkét ponttól 5 távolságra vannak. Ha Anna és Balázs ezen a szakaszon keres lakást, akkor biztosan teljesülni fog rá a feltételük. Nemcsak az A-tól és B-től 5 taxi távolságra lévő pontok lesznek megfelelőek, hanem azok is, amelyek $6, 7, \ldots$ taxi távolságra vannak tőlük. Ha ezeket a taxi köröket is felrajzoljuk, akkor láthatjuk a *9. ábrán* a két középső, illetve a két külső négyzeten, hogy 2-2 pontban fogják egymást metszeni, vagyis ezek azok a pontok, amelyek A-tól és B-től is egyenlő távolságra vannak. Ha az összes jó pontot megtaláltuk, akkor a fekete töröttvonalat fogjuk megkapni. Annának és Balázsnak ezen a vonalon kell albérletet keresniük, ha azt akarják, hogy az mindkettejük munkahelyétől egyenlő távolságra legyen. Mozgassuk a C-t és nézzük meg, hogyan változik az A-hoz viszonyított távolsága. Ha az y-tengellyel párhuzamosan mozdítom el bármelyik irányba, akkor a távolság nőni fog. Ha az x-tengellyel párhuzamosan teszem ugyanezt, akkor egyik irányba csökken, míg a másikba nő a távolsága az A-tól. Ezek után próbáljunk meg ferdén, a ponton átmenő, euklideszi értelemben vett 1 meredekségű egyenes mentén haladni. Ha távolodunk az y-tengelytől, akkor a távolság ismét nő. Azonban, ha közeledünk felé, akkor nem változik, 5 marad egészen addig, míg el nem érünk az A pont vonalába, utána a távolság újra nőni fog. A -1 meredekségű egyenesen haladva hasonló eredményeket kapunk. Vegyük most a $D = (-8;-1)$ pontot és mozgassuk úgy, mint C-t. A C és D pontok mozgatása által egy négyzetet kaptunk és megtaláltuk az összes olyan pontot, amely 5 távolságra lesz A-tól. Ugyanezt szeretnénk megtenni B-vel is, ahol ugyanúgy egy négyzetet fogunk kapni. A két négyszög egyik oldalegyenese egybeesik, ahogyan az a *9. ábrán* is látszik. Tehát ezek lesznek azok a pontok a téglalapon belül, amelyekre teljesül a feltételünk. A következőkben nézzük meg azokat a pontokat, amelyek 6 háztömbnyi távolságra lesznek a két munkahelytől. Az előző eljárást alkalmazva, azt tapasztaljuk, hogy ismét két négyzetet kaptunk, amelyeket az ábrán kékkel jelöltünk. Ezeknek a metszéspontjai lesznek azok a pontok, amelyek A-tól és B-től egyenlő távolságra lesznek. Ha az eddigiekhez hasonlóan folytatjuk és megnézzük a $7, 8, \ldots$ távolságra lévő pontokat is, akkor az ábrán feketével jelzett vonalat kapjuk. Vagyis azok lesznek azok a pontok, amelyek egyenlő távolságra lesznek Anna és Balázs munkahelyétől, itt kell maguknak albérletet keresni, ha azt szeretnék, hogy a fenti feltétel teljesüljön.

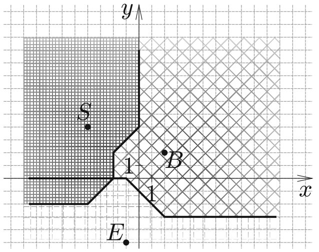


9. ábra

8. feladat. *Az ideális városban három középiskola is van: a Széchenyi az* $S = (-4;3)$ *pontban, a Berzsenyi a* $B = (2;1)$ *pontban, az Eötvös az* $E = (-1;-6)$

pontban. A város egyes pontjain lakó gyerekek melyik középiskola diákjai, ha mindenki a számára legközelebb lévőbe jár?

Megoldás. Ebben a feladatban adott három ponttól egyenlő távolságra lévő pontokat szeretnénk megtalálni. Számoljuk ki először a pontok távolságát egymástól: $d_T(S;B) = |-4-2| + |3-1| = 8$, $d_T(S;E) = |-4+1| + |3+6| = 12$ és $d_T(E;B) = |-1-2| + |-6-1| = 10$. Nézzük meg, hogy kik lesznek azok, akik válaszhatnak, hogy melyik iskolába járjanak, mivel két iskolától is egyenlő távolságra laknak. Vegyük a Széchenyi és a Berzsenyi iskolákat, vagyis az $S = (-4;3)$ és $B = (2;1)$ pontokat a koordináta-rendszerünkben és nézzük meg, melyek azok a pontok, amelyek ugyanannyi távolságra vannak tőlük. Alkalmazzuk a 7. feladatban tanultakat, így kapni fogunk egy szakaszt, amely a $(-2;2)$ és $(0;4)$ pontokra illeszkedik, valamint az ezekből a pontokból kiinduló félegyeneseket, amelyek párhuzamosak a tengelyekkel. Ha ugyanezt az eljárást használjuk az S és E, illetve E és B esetében, hasonló alakzatokat kapunk, annyi változtatással, hogy mindkét esetben, ha azokat a pontokat keressük, amelyek nagyobb távolságra vannak mindkét ponttól, mint a távolságuknak a fele, ezúttal nem „felfele” és „lefele” keressük, hanem az x-tengellyel párhuzamosan jobb, illetve bal irányban. Végül a *10. ábrát* kapjuk, ahol látható, hogy a töröttvonalak metszeni fogják egymást a $(-2;0)$ pontban. Ez azt jelenti, hogy akik itt laknak, azok három, a töröttvonal többi pontján lakó gyerekek pedig kettő iskola közül választhatnak; míg azok, akik a különböző módon satírozott részeken élnek, nem választhatnak, ők a hozzájuk legközelebbi iskolába járnak.



10. ábra

3. Az ellipszis

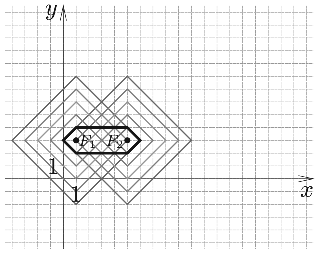
Az euklideszi síkon egy ellipszist a következőképpen definiálunk.

2. definíció. Az ellipszis azoknak a síkbeli pontoknak a mértani helye, amelyeknek a síkon két adott ponttól mért távolságaik összege állandó, és ez az állandó nagyobb, mint a két pont távolsága. A két adott pontot fókuszpontoknak hívjuk.

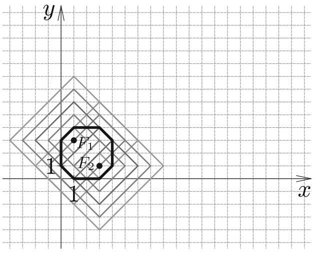
Ahogy azt már a kör esetében is láthattuk, a távolságfüggvény megváltozásával az alakzat képe is módosulni fog. Először gondoljuk meg, hogyan is rajzolnánk fel egy euklideszi értelemben vett ellipszist. A taxi ellipszis is hasonló módon rajzolható fel, azzal a különséggel, hogy ebben az esetben körök helyett négyzeteket fogunk összemetszeni. Hogy ez hogyan is működik, egy feladaton keresztül nézzük meg.

9. feladat. *Legyenek a fókuszok az $F_1 = (1;3)$ és $F_2 = (5;3)$ pontok. Azokat a P pontokat keressük a síkon, amelyeknek a fókuszoktól vett távolságösszege 6 egység.*

Megoldás. A feladat feltétele: $d_T(P;F_1) + d_T(P;F_2) = 6$. A 6-ot például fel tudjuk írni a 4 és 2 összegeként. Ekkor legyen $d_T(P;F_1) = 4$ és $d_T(P;F_2) = 2$. Ez azt jelenti, hogy mindkét esetben egy adott pontól adott távolságra lévő pontok halmazát keressük, vagyis taxi köröket, amelyeknek a centruma az adott fókusz, a sugara pedig a távolság. Ha ezeket felrajzoljuk, akkor a metszéspontjaikra igaz, hogy F_1-től 4 és F_2-től 2 távolságra vannak, vagyis ezek a pontok rajta lesznek a keresett taxi ellipszisünkön. Ezt az eljárást folytatjuk úgy, hogy közben olyan sugarú taxi köröket metszünk össze, amelyek sugarainak az összege 6. Az 1 és 5 sugarú körök esetében egy érdekes dolgot figyelhetünk meg. Ezek ugyanis nem egy vagy két pontban fogják metszeni egymást, hanem a kisebbik négyszög két teljes oldalszakaszában. Ha az összes lehetséges kört felrajzoltuk, akkor a *11. ábrán* látható taxi ellipszist fogjuk kapni.



11. ábra



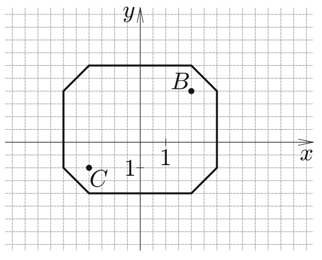
12. ábra

Ezek alapján azt feltételezhetnénk, hogy egy taxi ellipszis általában egy hatszög lesz, azonban ez nincs mindig így. Változtassuk meg a fókuszpontokat úgy, hogy azoknak egyik koordinátája se egyezzen meg a másik megfelelő koordinátájával. Ha a 9. feladatban lévő fókuszok helyett például az $F_1 = (1;3)$ és $F_2 = (3;1)$ pontokkal oldjuk meg a feladatot, akkor a *12. ábrát* kapjuk, amelyen jól látható, hogy ezúttal egy nyolcszög a megoldás. Tekintsük a *11.* és *12. ábrákat* és figyeljük meg a kapcsolatot az ellipszis vízszintes és függőleges oldalai és a fókuszok által meghatározott téglalap között. Ha közelítjük egymáshoz a két fókuszt, akkor egyre kisebb lesz a téglalap, valamint az ellipszis vízszintes és függőleges oldalai is, egészen addig, amíg a két pont meg nem egyezik, amikor is az ellipszisből egy taxi kört kapunk. Hasonló jelenség figyelhető meg az euklideszi értelemben vett ellipszis esetében is, hiszen ahogy közelítjük a két fókuszt egymáshoz, annál jobban fog az alakzat egy körre hasonlítani.

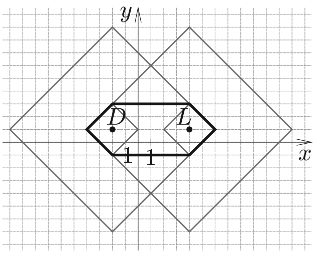
Nézzük meg, hogyan tudjuk alkalmazni a fentiekben leírtakat néhány feladatban.

10. feladat. *Csongor, aki a $C = (-2;-1)$ pontban lakik az ideális városban, minden reggel futni jár. Egy barátja, akinek otthona a $B = (2;2)$ pontban van, úgy dönt, hogy csatlakozik hozzá. Elhatározzák, hogy mindig a város határán fognak találkozni. Kiszámolták, hogy ez csak úgy sikerülhet, ha a Csongor és barátja által futott táv pontosan 9 háztömbnyi. Melyek lesznek a város szélét jelző pontok?*

Megoldás. Vegyünk fel egy koordináta-rendszert és abban jelöljük a $C = (-2;-1)$ és $B = (2;2)$ pontokat. Azokat a P pontokat keressük, amelyekre teljesül, hogy $d_T(P;C) + d_T(P;B) = 9$, amely egy taxi ellipszis. Legyen például $d_T(P;C) = 1$ és $d_T(P;B) = 8$. Ekkor ez azt jelenti, hogy a B és C pontoktól adott távolságra lévő pontok halmazát keressük, vagyis taxi köröket. Ha ábrázoljuk először a C-től 1 és a B-től 8 taxi távolságra lévő pontokat, a két taxi kör két metszéspontjára igaz lesz a feltételünk, amely ebben az esetben nem két metszéspont lesz, hanem a kis taxi kör két teljes oldalszakasza, mivel azok teljes egészében a nagy taxi kör oldalszakaszainak részei. Ugyanezt megtehetjük fordítva is, miszerint ha felrajzoljuk a C-től 8 és a B-től 1 taxi távolságra lévő pontokat, ekkor ismét két oldalszakaszt fogunk kapni. Nézzük meg, hogy a 9 még hányféleképpen bontható fel két szám összegére. Ha a 2 és 7 sugarú taxi körök metszik egymást, akkor két metszéspontot fogunk kapni és ugyanez történik, ha a 3 és 6 sugarú taxi körök esetét vizsgáljuk meg. Ha azonban a 4 és 5 sugarú taxi körök metszetét képezzük, azok egy pontban és két oldalszakasz egy kis szakaszán fogják metszeni egymást. Ezek a pontok egy taxi ellipszist fognak alkotni, ahogyan azt a *13. ábrán* is láthatjuk. Ezek lesznek a város szélét jelző pontok.



13. ábra



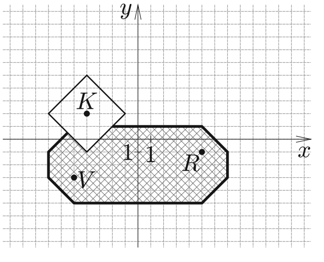
14. ábra

11. feladat. *Dóra, aki az ideális városban lakik, irodát keres a vállalkozásának. Úgy szeretne helyet találni, hogy a* $D=(-2;1)$ *pontban elhelyezkedő lakásától az irodáig, valamint az* $L=(4;1)$ *pontban lévő óvodától, ahova a lánya jár, az irodáig legfeljebb* 10 *háztömbnyi távolságot kelljen megtennie. Hol keressen irodát?*

Megoldás. A koordináta-rendszerben vegyük fel a D és L pontokat. Azokat a P pontokat keressük, amelyekre teljesül, hogy a D-től és L-től való távolságok összege kisebb vagy egyenlő, mint 10, vagyis $d_T(P;D)+d_T(P;L)\leqslant 10$. Keressük meg elsőként azokat a pontokat, amelyekre a távolságok összege pontosan 10 háztömbnyi. A 10 többféleképpen is felírható két pozitív egész szám összegeként. Ha megnézzük először az 1 és 9 sugarú taxi köröket, észrevehetjük, hogy ezeknek nincs egyetlen közös pontjuk se. A $2+8$ felbontás esetében rajzoljuk fel a D középpontú 2 sugarú, és az L centrumú 8 sugarú taxi köröket. Azt tapasztaljuk, hogy ezen négyszögeknek ezúttal nem egy vagy két metszéspontja lesz, hanem a kisebbik kör két teljes oldalát fedi a nagy kör Ezek mind jó pontok lesznek, hiszen teljesül rájuk a feladat feltétele. Ugyanezt meggondolhatjuk fordított esetben is, ahol a D centrumú 8 sugarú, és az L középpontú 2 sugarú taxi köröket metsszük össze. Ez annak köszönhető, hogy a két megadott pont egy egyenesre illeszkedik. Az összes többi felbontáshoz tartozó körök két pontban fogják metszeni egymást. Ha az összes lehetséges felbontást ábrázoljuk, akkor a *14. ábrán* látható taxi ellipszist fogjuk kapni. Ha Dóra ezen a vonalon talál irodát a vállalkozásának, akkor teljesülni fog rá a feladat feltétele. Azonban megfelelő pontok lesznek azok is, amelyeknek az óvodától, illetve a lakástól vett távolságaik összege kevesebb, mint 10 háztömb. Ha felrajzolnánk azt az ellipszist, amelyre $d_T(P;D) + d_T(P;L) = 11$ teljesül, akkor azt tapasztalnánk, hogy része lesz az előző alakzatunk, vagyis minél nagyobb távolságot adunk meg a távolságok összegeként, annál nagyobb ellipsziseket fogunk kapni. Ez azt jelenti, hogy ha azt keressük, hogy hol kevesebb az összeg, mint 10, akkor annak az ellipszisnek a belső pontjaira lesz igaz az állítás, amelyekre $d_T(P;D) + d_T(P;L) < 10$ teljesül. Vagyis Dóra ezen a taxi ellipszisen belül is találhat magának megfelelő irodát.

12. feladat. *Egy ipari vállalat gyárat szeretne építeni az ideális városban úgy, hogy a távolságok összege a gyártól a $R = (5;-1)$ pontban elhelyezkedő repülőtérig, illetve a $V = (-5;-3)$ helyen lévő vasútállomásig legfeljebb 16 háztömb legyen. A város azonban a zajszabályozás érdekében előírja, hogy a $K = (-4;2)$-ben elhelyezkedő könyvtár 3 háztömbös környezetében nem épülhet fel a gyár. Mely területre építkezhet a vállalat?*

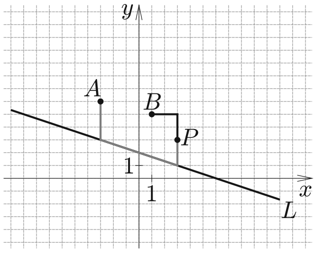
Megoldás. Helyezzük el a megadott $R = (5;-1)$ pontban lévő repülőteret, a $V = (-5;-3)$ helyen lévő vasútállomást és a $K = (-4;2)$-ben elhelyezkedő könyvtárat egy koordináta-rendszerben. Először jelöljük azokat a pontokat, amelyek 3 háztömbnyire vannak a könyvtártól, hiszen tudjuk, hogy erre a területre nem épülhet fel gyár. Mivel egy adott ponttól adott távolságra lévő pontokat szeretnénk meghatározni, egy taxi kört fogunk keresni, amelyet a 2. szakaszban leírtak alapján fel tudunk rajzolni. Másodszor pedig azokat a pontokat keressük meg, ahol a távolságok összege gyártól a repülőtérig és a vasútállomásig legfeljebb 16 háztömb. Vagyis matematikailag átfogalmazva a feladatot, azokat a P pontokat keressük, amelyekre teljesül, hogy $d_T(P;R) + d_T(P;V) \leqslant 16$. Ezek alapján megállapíthatjuk, hogy egy taxi ellipszist keresünk, amelynek a fókuszpontjai az R és V pontok és mivel ezek nem egy egyenesre illeszkednek, így a 10. feladatban leírtakhoz hasonlóan meg tudjuk rajzolni az alakzatot. Mivel nekünk nemcsak azok a pontok lesznek jók, amelyekre a távolságaik összege R-től és V-től pontosan 16, hanem azok is, amelyekre a távolságösszeg ennél kisebb, ezért ismét az ellipszis belsejében lévő pontok is megfelelőnek bizonyulnak. Látható azonban, hogy a K pont 3 sugarú köre belemetsz az ellipszislapba. Erről tudjuk, hogy ide nem építkezhetünk, viszont bárhová máshova az ellipszisen belül igen, ahogyan a *15. ábrán* is láthatjuk.



15. ábra

4. Egy további érdekesség

Mint ahogyan említettük, a taxi geometria egy sokkal jobb modellt ad a városi közlekedésre az euklideszi geometriával szemben. Tudunk azonban még olyan változtatásokat bevezetni a távolságfüggvényen, amelyekkel az ideális városunk jobban fog hasonlítani egy átlagos városhoz, viszont ezáltal egy kicsit bonyolultabb matematikát is kell alkalmaznunk.



16. ábra

Vezessünk be egy tömegközlekedési eszközt, például egy metrót, amely a *16. ábrán* látható L vonalon közlekedik és az állomásai az L egyenes egész koordinátájú pontjai. Ha ezt a közlekedési eszközt használjuk, akkor az csökkentheti bizonyos pontok között a távolságot. Tegyük fel, hogy az $A = (-3; 6)$ ponton állunk és szeretnénk eljutni a $P = (3; 3)$ pontban lévő pékségig. Ezt például úgy tehetjük meg, hogy elsétálunk 3 háztömbnyi távolságot a $(-3; 3)$ pontig majd felülünk a metróra, amellyel eljuthatunk a $(3; 1)$-ig és innentől már csak 2 háztömböt kell sétálnunk a P pontig. Vagyis a gyalogosan megtett út A-ból P-be 5. Természetesen, ha más lett volna a kiindulási helyünk, mondjuk a $B = (1; 5)$ pont, akkor nem kellett volna használni a metrót, gyalogosan is eljuthatunk a kívánt helyre, amely ekkor pontosan 4 háztömbnyire lesz tőlünk. Nevezzük el az új távolságfüggvényünket a tömegközlekedési eszközünk miatt d_M-nek, és definiáljuk a következőképpen: d_M legyen a $d_T(X; Y)$ távolság, valamint a $d_T(X; Q) + d_T(Y; Q)$ kifejezések közül a legkisebb, ahol Q befutja a metróállomásokat (azaz mindig az X-hez legközelebbi állomáson szállunk fel és az Y-hoz legközelebbin szállunk le). Ekkor $d_M(A; P) = 5$ és $d_M(B; P) = 4$.

Ha azt szeretnénk, hogy az ideális városunk egy még jobb modellt adjon, bevezethetünk több metróvonalat, vagy esetleg telepíthetünk egy tavat a városba. A valódi világ nyújtotta felvethető kérdések száma innentől kezdve végtelen, és jól látható, hogy a felvetődő problémák egy középiskolás számára is érdekesek és megoldhatók.

Irodalomjegyzék

[1] Banerjee, Amar Kumar: *Metric Spaces and Complex Analysis,* New Age International, 2008.

[2] Golland, Luise: *Karl Menger and Taxicab Geometry* in Mathematics Magazine, Vol. 63., No. 5. , pp. 326–327., Mathematical Association of America, 1990.

[3] Greenlees, John: *Metric spaces,* The University of Sheffield, 2011.

[4] Hildebrand, S.K., Milnes, Harold Willis: *An Interesting Metric Space* in Mathematics Magazine, Vol. 41., No. 5., pp. 244–247., Mathematical Association of America, 1968.

[5] Hong, Min-Chun: *Metrics – Lecture Material,* The University of Queensland, 2013.

[6] Janssen, Christina: *Taxicab Geometry: Not the Shortest Ride Across Town (Exploring Conics with a Non-Euclidean Metric),* Iowa State University, 2007.

[7] Krause, Eugene F.: *Taxicab Geometry - An Adventure in Non-Euclidean Geometry,* Dover Publications, Inc., New York, 1986.

[8] Laczkovich Miklós – T. Sós Vera: *Analízis II.,* Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2007.

[9] Shantaram, R.: *On an Interesting Metric Space* in Mathematics Magazine, Vol. 43., No. 2., pp. 95–97., Mathematical Association of America, 1970.

[10] Reynolds, Barbara E.: *Taxicab Geometry,* The Pi Mu Epsilon Journal, Worcester, MA. Vol. 7., No. 2., pp. 77–88., 1980.

[11] Sikolya Eszter: *Analízis III. előadásjegyzet,* ELTE, 2010/2011 őszi félév.

[12] Junge, Marius: *Metric Spaces,* The University of Illinois.

Horváth Manuéla

Beszámoló a 40. Hajós György Matematikai Versenyről

A versenyt idén a Pázmány Péter Katolikus Egyetem Információs Technológiai és Bionikai Kara rendezte, 2018. április 5. és 7. között.

A szervezők Recski Andrást és Tuza Zsolt egyetemi tanárokat kérték fel társelnököknek. Tiszteletbeli elnök Obádovics J. Gyula volt, aki immár 15. alkalommal volt elnök. A versenybizottság tagjai: Csató Sándor, főiskolai docens, Szegedi Tudományegyetem Mérnöki Kar, Kárász Péter, egyetemi docens, Óbudai Egyetem Neumann János Informatikai Kar, Klincsik Mihály, főiskolai tanár, Pécsi Tudományegyetem Műszaki és Informatikai Kar, Molnár Sáska Gáborné Katalin, főiskolai docens, Budapesti Gazdasági Egyetem, Ladics Tamás, főiskolai docens, Neumann János Egyetem GAMF Kar.

A 40. Hajós György Matematikai Versenyen kitűzött feladatok, eredmények

1. feladat. *Tekintsük a következő rekurzív sorozatot:*

$$a_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{a_n}{2}, & \text{ha } a_n \text{ páros;} \\[2ex] 3a_n + 1, & \text{ha } a_n \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Igazolja, hogy egy $a_0 = 2^k - 1$ alakú számból indulva, ahol k pozitív egész, a sorozat egy $a_K = 3^k - 1$ alakú számhoz jut! Fejezze ki a K számot a k segítségével!

A feladatot ismertette, és a szép megoldásért díjat kapott:
Farkas Domonkos László, PPKE Információs Technológiai és Bionikai Kar

2. feladat. *Legyenek az a, b és c olyan pozitív egész számok, amelyek között fennáll az $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$ egyenlőség. Igazolja, hogy ha az (a, b, c) számok legnagyobb közös osztója 1, akkor az $(a+b)$ összeg mindig négyzetszám. Adjon példát az egyenlet olyan (a, b, c) egész megoldására, ahol a három szám*

(i) legnagyobb közös osztója 1;

(ii) legnagyobb közös osztója nagyobb 1-nél és az $(a + b)$ összeg nem négyzetszám.

A feladatot ismertette: *Bege Áron,* BME Gépészmérnöki Kar
A szép megoldásért díjat kapott: *Czirkos Angéla,* ELTE Informatikai Kar

3. feladat. *Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletrendszert:*

$$x + y = 9,$$

$$\sqrt{x\sqrt{y} - 2x} + \sqrt{y\sqrt{x} - 2y} = 3\sqrt{\sqrt{x} + \sqrt{y} - 4}.$$

A feladatot ismertette: *Csutak Balázs,* PPKE Információstechnológiai és Bionikai Kar
A szép megoldásért díjat kapott: *Halmosi Bence,* Pannon Egyetem, Informatikai Kar

4. feladat. *Legyen K egy tetraéder két kitérő élének felezőpontját összekötő szakasz felezőpontja. Bizonyítsa be, hogy ha a K pontot összekötjük a tetraéder csúcspontjaival, akkor az eredeti tetraédert négy egyenlő térfogatú tetraéderre bontjuk.*

A feladatot ismertette: *Juhos Attila,* BME Villamosmérnöki és Informatikai Kar
A szép megoldásért díjat kapott: *Knoch Júlia,* ELTE, Természettudományi Kar

5. feladat. *Tekintsük az $y = x^2$ egyenletű parabola azon érintőpárjait, amelyek merőlegesek egymásra! Közülük melyik zárja közre a legkisebb területet a parabolaívvel?*

A feladatot ismertette:
Holczer András, BME Villamosmérnöki és Informatikai Kar
A szép megoldásért díjat kapott: *Stark Patrícia,* BCE Közgazdaságtudományi Kar

Az egyéni verseny díjazottjai:

1. **Juhos Attila,** Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Villamosmérnöki és Informatikai Kar;
2. Holtversenyben:
   Holczer András, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Villamosmérnöki és Informatikai Kar;
   Papp Marcell, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Vegyészmérnöki és Biomérnöki Kar;
3. **Szemán Krisztián,** Budapesti Corvinus Egyetem, Közgazdaságtudományi Kar;
4. **Körmöczi Dávid,** Szent István Egyetem, Gépészmérnöki Kar;
5. **Bosits Balázs,** Budapesti Corvinus Egyetem, Közgazdaságtudományi Kar;
6. **Csorba Benjámin,** Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar.

A csapatverseny díjazottjai:

1. Budapesti Corvinus Egyetem, Közgazdaságtudományi Kar: *Bosits Balázs, Siket Olivér, Stark Patrícia, Szemán Krisztián;*
2. Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Villamosmérnöki és Informatikai Kar: *Holczer András, Almási Nóra, Juhos Attila;*

3. Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Vegyészmérnöki és Biomérnöki Kar: *Boricsev Viktor, Horváth József Áron, Papp Marcell, Pesti Benedek;*

4. Pázmány Péter Katolikus Egyetem, Információs Technológiai és Bionikai Kar: *Farkas Domonkos László, Nagy Fanni, Herbert Attila, Csutak Balázs.*

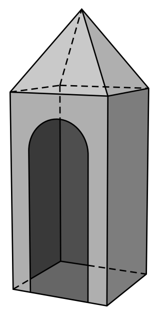
A támogatók, a verseny teljes eredménylistája és egyéb, az idei versennyel kapcsolatos információ, valamint a régebbi versenyek feladatai az idei verseny honlapján olvasható: `https://hajos2018.itk.ppke.hu/`.

Bércesné Novák Ágnes
a verseny ügyvezető elnöke

Megoldásvázlatok a 2018/4. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *Egy katonai laktanyában az* ábrán *látható őrbódéban őrködnek a katonák. A* 3,5 m *magas építmény egy négyzetes hasábból és egy hozzá kapcsolódó szabályos négyoldalú gúlából áll. Bejárata téglalap alakú, annak felső, rövidebb oldalára illesztett félkörrel. A négyzetes oszlop alapéle* 1,3 m, *magassága* 2,5 m, *míg a bejárat téglalap alakú része* 0,8 m *széles és* 1,8 m *magas.*



a) *Mennyibe kerül az őrbódé külső lefestése, ha* 1 m^2 *felület lefestéséhez* 1,5 dl *festék szükséges, melynek literje* 3200 Ft? *(Az őrbódé tetejét is festjük, ajtaját azonban nem.)* (*6 pont*)

A laktanyában a hétvégi (pénteki, szombati és vasárnapi) éjszakai őrség kialakításakor a parancsnok az alábbi szempontokat veszi figyelembe:

- *Minden katona legalább egy éjszaka őrködjön, de ne legyen olyan katona, aki mindhárom éjszaka őrségben van.*
- *A teljes létszámnak a fele teljesítsen pontosan két éjszaka őrszolgálatot.*
- *Az őrség létszáma az első éjszaka* 16 *fő, a második éjszaka* 22 *fő, míg a harmadik éjszaka* 10 *fő.*

b) *Hány katona vett részt az éjszakai őrségben?* (*5 pont*)

Megoldás. *a*) Az őrbódé külső lefestéséhez szükséges festék mennyiségének meghatározásához számítsuk ki az építmény felszínét. A szabályos négyoldalú gúla oldallapjának m magassága a Pitagorasz-tétellel: $m=\sqrt{1^2+0{,}65^2}=\sqrt{1{,}4225}$, így a gúla felszíne:

$$A_{\text{gúla}}=4\cdot\frac{1{,}3\cdot\sqrt{1{,}4225}}{2}\approx 3{,}1\ (\mathrm{m}^2).$$

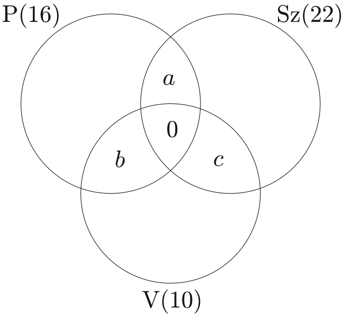
A négyzetes hasáb felszíne:

$$A_{\text{hasáb}} = 4 \cdot 1{,}3 \cdot 2{,}5 - \left(0{,}8 \cdot 1{,}8 + \frac{0{,}4^2\pi}{2}\right) \approx 11{,}3\ (\mathrm{m}^2).$$

Az őrbódé felszíne a gúla és a hasáb felszínének az összege, vagyis $A_{\text{bódé}} \approx 14{,}4\ (\mathrm{m}^2)$.

Az őrbódé külső lefestéséhez 3 doboz 1 literes festéket kell megvenni, így a lefestés 9600 Ft-ba kerül.

b) A feladatban megadott feltételek alapján az alábbi *halmazábra* készíthető:



Ha x jelöli az éjszakai őrségben résztvevők számát, akkor $a+b+c=\frac{x}{2}$. A három halmaz uniójának elemszámát felírva:

$$16+22+10-\frac{x}{2}-2\cdot 0=x, \quad \text{így} \quad x=32.$$

Tehát 32 katona vett részt az éjszakai őrségben.

2. *Egy szabályos dobókockával* 20*-szor dobva* 5 db *egyest,* 5 db *kettest,* 4 db *hármast,* 3 db *négyest és* 3 db *ötöst dobtunk.*

a) *Számítsuk ki a dobott számok átlagát és szórását.* (*3 pont*)

A dobott számok közül 4 db*-ot véletlenszerűen kiválasztunk.*

b) *Hány esetben lesz a kiválasztott számok között legalább egy hármas?* (*4 pont*)

c) *Mekkora annak a valószínűsége, hogy mind a négy kiválasztott szám különböző?* (*6 pont*)

Megoldás. *a*) A dobott számok átlaga $\frac{54}{20}=2{,}7$, szórása

$$\sqrt{\frac{5\cdot(-1{,}7)^2+5\cdot(-0{,}7)^2+4\cdot 0,3^2+3\cdot 1,3^2+3\cdot 2{,}3^2}{20}}=\sqrt{1{,}91}\approx 1{,}38.$$

b) Az összes eset számából levonjuk a kedvezőtlen esetek számát. A 20 dobott számból 4-et minden lehetséges módon $\binom{20}{4}=4845$-féleképpen választhatunk ki, ez az összes eset száma.

Kedvezőtlen esetek azok, amelyekben a kiválasztott számok között nincs hármas, melyek száma $\binom{16}{4}=1820$.

Összesen tehát $4845-1820=3025$ esetben lesz a kiválasztott számok között legalább egy hármas.

c) A 20 dobott számból 4-et minden lehetséges módon $\binom{20}{4}=4845$-féleképpen választhatunk ki, ez az összes eset száma.

Ha a kiválasztásnál az 1-esből vagy a 2-esből nem választunk, de a többiből egyet-egyet igen, akkor a kedvező esetek száma: $\binom{5}{1}\cdot\binom{4}{1}\cdot\binom{3}{1}^2=180$.

Ha a kiválasztásnál a 3-asból nem választunk, de a többiből egyet-egyet igen, akkor a kedvező esetek száma: $\binom{5}{1}^2\cdot\binom{3}{1}^2=225$.

Ha a kiválasztásnál a 4-esből vagy az 5-ösből nem választunk, de a többiből egyet-egyet igen, akkor a kedvező esetek száma: $\binom{5}{1}^2\cdot\binom{4}{1}\cdot\binom{3}{1}=300$.

A keresett valószínűség (a kedvező esetek számának és az összes eset számának hányadosa):

$$p=\frac{2\cdot\binom{5}{1}\cdot\binom{4}{1}\cdot\binom{3}{1}^2+\binom{5}{1}^2\cdot\binom{3}{1}^2+2\cdot\binom{5}{1}^2\cdot\binom{4}{1}\cdot\binom{3}{1}}{\binom{20}{4}}=\frac{79}{323}\approx 0{,}2446.$$

3. *a) Az* $\mathbf{u}(1;\log_8 x)$ *és* $\mathbf{v}(\log_2 x;-1)$ *vektorok merőlegesek egymásra. Határozzuk meg x értékét* ($x>0$). *(5 pont)*

b) Adott a síkon n db pont, melyek közül semelyik három nem illeszkedik egy egyenesre ($n\geqslant 3$). *Határozzuk meg n értékét, ha a pontok 20-szor annyi négyszöget határoznak meg, mint egyenest.* *(8 pont)*

Megoldás. *a) I. megoldás.* Ha két vektor merőleges egymásra, akkor a skaláris szorzatuk nulla.

A skaláris szorzatot a koordináták segítségével felírva megoldandó az alábbi egyenlet: $\log_2 x-\log_8 x=0$. A 8-as alapú logaritmust átírva: $\log_8 x=\frac{\log_2 x}{\log_2 8}$, mellyel a megoldandó egyenlet $\log_2 x=0$, ahonnan $x=1$, mely megoldása a feladatnak.

II. megoldás. A $\mathbf{v}$ vektor akkor merőleges az $\mathbf{u}$ vektorra, ha $\mathbf{v}$ koordinátáit felcserélve, és egyiknek az előjelét megváltoztatva éppen $\mathbf{u}$ koordinátáit kapjuk. Az előbbiek miatt megoldandó az alábbi egyenlet: $\log_8 x=\log_2 x$. A 8-as alapú logaritmust átírva: $\log_8 x=\frac{\log_2 x}{\log_2 8}$, mellyel a megoldandó egyenlet $\log_2 x=0$, ahonnan $x=1$, mely megoldása a feladatnak.

b) n db a feltételeknek megfelelő pont $\binom{n}{4}$ db pontnégyest, és $\binom{n}{2}$ db egyenest határoz meg, tehát megoldandó az $\binom{n}{4}=20\cdot\binom{n}{2}$ egyenlet. Az előbbi egyenlet az alábbi alakban írható:

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=20\cdot\frac{n(n-1)}{2\cdot 1}.$$

Az $\frac{n\cdot(n-1)}{2}\neq 0$ kifejezéssel osztva az egyenlet mindkét oldalát: $\frac{(n-2)\cdot(n-3)}{4\cdot 3}=20$, melyből az $n^2-5n-234=0$ másodfokú egyenletet kapjuk. Az egyenlet pozitív gyöke 18 (negatív gyöke -13), tehát a pontok száma 18.

Ellenőrzés: a 18 pont 3060 db négyszöget, illetve 153 db egyenest határoz meg, és $20\cdot 153=3060$.

4. *Adott az* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^4 + 3x^2 + 1$ *függvény.*

a) Igazoljuk, hogy az f *függvény szigorúan monoton csökken a negatív valós számok halmazán.* *(3 pont)*

b) Igazoljuk, hogy az f *függvény páros.* *(4 pont)*

c) Adjuk meg az f *függvénynek azt az* F *primitív függvényét, amelyre* $F(-1) = 2$. *(4 pont)*

d) Állapítsuk meg a $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^2+1}{x^4}$ *határértéket.* *(3 pont)*

Megoldás. *a)* Az f függvény differenciálható az értelmezési tartományán és $f'(x) = 4x^3 + 6x$.

Ha $x < 0$, akkor $4x^3 < 0$ és $6x < 0$, így $f'(x) < 0$.

Ha $x < 0$ és $f'(x) < 0$, akkor az f függvény szigorúan monoton csökken a negatív valós számok halmazán.

b) Az f függvény páros, ha az értelmezési tartomány bármely x_0 eleme esetén $-x_0$ is eleme az értelmezési tartománynak és bármely x_0-ra $f(x_0) = f(-x_0)$.

Az f függvény értelmezési tartománya a valós számok halmaza, ezért bármely x_0 esetén annak ellentettje is eleme az értelmezési tartománynak.

$$f(x_0) = x_0^4 + 3x_0^2 + 1, \quad f(-x_0) = (-x_0)^4 + 3(-x_0)^2 + 1.$$

Mivel egy valós számnak és ellentettjének negyedik hatványa, valamint négyzete megegyezik, ezért $f(x_0) = f(-x_0)$, tehát az f függvény páros.

c)

$$\int \left(x^4 + 3x^2 + 1\right) \mathrm{d}x = \frac{x^5}{5} + x^3 + x + C.$$

Mivel $F(-1) = 2$, így $\frac{(-1)^5}{5} + (-1)^3 + (-1) + C = 2$, ahonnan $C = \frac{21}{5}$. A keresett függvény:

$$F(x) = \frac{x^5}{5} + x^3 + x + \frac{21}{5}.$$

d)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 + 1}{x^4} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^4}}{1}.$$

Mivel $x \to \infty$, így az előbbi tört számlálója 0-hoz, nevezője 1-hez tart, ezért a keresett határérték 0.

II. rész

5. *a) A tízes számrendszerben felírt* $\overline{abc}$ *háromjegyű szám számjegyei a felírás sorrendjében egy számtani sorozat egymást követő három elemét alkotják. Ha a háromjegyű számot elosztjuk a számjegyeinek összegével,* 26*-ot kapunk. Ha az eredeti számban a százasok és az egyesek számát felcseréljük, az eredetinél* 396*-tal nagyobb számot kapunk. Melyik ez a háromjegyű szám?* *(7 pont)* *b) Adjuk meg azokat a különböző számjegyekből álló tízes számrendszerben felírt $\overline{a6c}$ alakú háromjegyű számokat, amelyek a 4, 6 és 9 számok közül pontosan kettővel oszthatók.* (*7 pont*)

c) Lehet-e $a^p \cdot b^q \cdot c^r$ négyzetszám, ha a, b és c különböző prímszámok, p, q és r pedig különböző páratlan egészek? (*2 pont*)

Megoldás. *a*) Jelöljük az eredeti számban a tízesek helyén álló számjegyet b-vel, ekkor a feladatban megfogalmazott feltétel alapján a százasok helyén $b-d$, az egyesek helyén $b+d$ áll, ahol d a számtani sorozat differenciája. Az előbbiek felhasználásával az eredeti háromjegyű szám: $100(b-d)+10b+b+d=111b-99d$.

Ha az eredeti számot elosztjuk a számjegyeinek összegével, akkor $\frac{111b-99d}{3b}=$ $=26$, ahonnan $b=3d$. Ha az eredeti szám számjegyeit felcseréljük, akkor a felcserélt szám: $100(b+d)+10b+b-d=111b+99d$ lesz.

A feladat szövege alapján az alábbi egyenlet írható fel: $111b-99d=111b+$ $+99d-396$, ahonnan $d=2$. A keresett szám a 468.

Ellenőrzés: a 468 háromjegyű szám számjegyei a felírás sorrendjében valóban egy számtani sorozat három egymást követő elemét alkotják, és $\frac{468}{4+6+8}=26$, továbbá $864-468=396$.

b) Egy háromjegyű szám a 4, 6 és 9 számok közül pontosan kettővel osztható, ha

I. eset: osztható 4-gyel és 9-cel, de nem osztható 6-tal;
II. eset: osztható 4-gyel és 6-tal, de nem osztható 9-cel;
III. eset: osztható 6-tal és 9-cel, de nem osztható 4-gyel.

I. eset: Ha $4 \mid \overline{a6c}$ és $9 \mid \overline{a6c}$, akkor $2 \mid \overline{a6c}$ és $3 \mid \overline{a6c}$, amiből következik, hogy $6 \mid \overline{a6c}$, tehát ilyen eset nem lehetséges.

II. eset: Ha $4 \mid \overline{a6c}$ és $6 \mid \overline{a6c}$, akkor $\overline{6c}$-nek 4-gyel oszthatónak kell lennie, továbbá teljesülnie kell annak is, hogy $3 \mid a+6+c$, de 9-cel ne legyen osztható $a+6+c$.

Az előbbi feltételek csak akkor teljesülnek ($a \neq c$-t is figyelembevéve), ha $(a;c)=(9;0)$, $(2;4)$, $(5;4)$, $(1;8)$ vagy $(7;8)$.

III. eset: Ha $6 \mid \overline{a6c}$ és $9 \mid \overline{a6c}$, akkor a 2-vel való oszthatóság miatt c-nek párosnak kell lennie, továbbá $9 \mid a+6+c$, de $\overline{6c}$ nem lehet 4-gyel osztható.

Az előbbi feltételek $a \neq c$ esetén pontosan akkor teljesülnek, ha $(a;c)=(1;2)$.

Az összes megfelelő háromjegyű szám: 162; 168; 264; 564, 768, 960.

c) Mivel egy négyzetszám prímtényezős felbontásában minden prím kitevője páros, ezért $a^p \cdot b^q \cdot c^r$ nem lehet négyzetszám.

6. *Egy földmérő noteszában egy vízszintes háromszög alakú telekről a következő bejegyzés olvasható:* „A telek három sarkán villanypózna, fúrt kút és gázcsonk található. A villanypózna a fúrt kúttól 46 méterre, a fúrt kút a gázcsonktól 20 méterre található. A villanypóznánál állva a fúrt kút és a gázcsonk alkotta szakasz 25°-os szögben látszik."

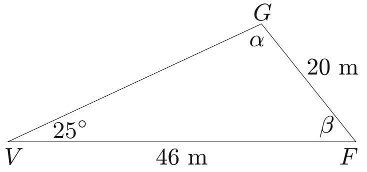
a) Számítsuk ki a háromszög alakú telek lehetséges *területét.* (*5 pont*)

Az előbbi telken a víz-, a gáz- és az elektromos ellátottság nagyon fontos, ugyanis azon kereskedelmi egység épül. Az elektromos rendszer költsége a víz- és a gázellátás költségeinek mértani közepe. Ha a gázellátás költségeit 100 000 Ft*-tal csökkentenénk, akkor a víz-, az elektromos- és a gázellátás költségei ebben a sorrendben számtani sorozatot alkotnának. Az elektromos költségek a vízellátás költségeinek* 150%*-át teszik ki.*

b) Mennyibe kerülnek a felsorolt közművek egyenként? (*6 pont*)

A telken a víz-, gáz- és az elektromos ellátottság kivitelezésére hat árajánlat érkezett hat különböző vállalkozástól.

c) Igazoljuk, hogy a versenytárgyalás résztvevői között biztosan van három olyan személy, akik kölcsönösen ismerik, vagy három olyan, akik kölcsönösen nem ismerik egymást (Egy vállalkozást egy tárgyalópartner képvisel). (*5 pont*)



Megoldás. *a*) Jelölje a háromszög alakú telek egyik sarkában lévő villanypóznát V, a másikban lévő fúrt kutat F, míg a harmadik csúcsban lévő gázcsonkot G.

A VFG háromszögben a szinusztételt alkalmazva: $\frac{\sin\alpha}{\sin 25^\circ}=\frac{46}{20}$, ahonnan $\alpha_1\approx 76{,}41^\circ$ vagy $\alpha_2\approx 103{,}59^\circ$.

Az előbbi szögek ismeretében a megfelelő α szögekhez tartozó β szögek a háromszög belső szögeinek összege alapján: $\beta_1\approx 78{,}59^\circ$ vagy $\beta_2\approx 51{,}41^\circ$.

A háromszög alakú telek lehetséges területe a trigonometrikus területképlet alapján:

$$T_{VFG}=\frac{46\cdot 20\cdot\sin\beta_1}{2}\approx 451\ \mathrm{m}^2\quad\text{vagy}\quad T_{VFG'}=\frac{46\cdot 20\cdot\sin\beta_2}{2}\approx 360\ \mathrm{m}^2.$$

b) Jelölje a vízellátás költségét V, a gázellátásét G, míg az elektromos rendszerét E. A feladat szövege alapján $E=\sqrt{V\cdot G}$ és $E=1{,}5\cdot V$. Mivel a számtani sorozat n-edik ($n>1$) eleme a tőle szimmetrikusan elhelyezkedő elemek számtani közepe, ezért a következő egyenlet írható fel:

$$V+2{,}25\cdot V-100\,000=3\cdot V,\quad\text{ahonnan}\quad V=400\,000\ \text{Ft}.$$

A vízellátás költségeinek ismeretében $E=600\,000$ Ft, valamint $G=900\,000$ Ft.

c) A versenytárgyalás minden résztvevőjének legfeljebb 5 ismerőse lehet a tárgyalás résztvevői között. Válasszunk ki egy résztvevőt a tárgyalók közül, legyen ő A.

A skatulyaelv alapján két eset lehetséges:

I. eset: A legalább 3 másik résztvevőt ismer (például B-t, C-t és D-t).

Ha B, C és D között van kettő, akik ismerik egymást, például B és C, akkor találtunk három olyan résztvevőt, akik kölcsönösen ismerik egymást (A, B, C).

Ha B, C és D között nincs kettő, akik ismernék egymást, akkor ők kölcsönösen nem ismerik egymást.

II. eset: A legalább 3 másik résztvevőt nem ismer (például B-t, C-t és D-t).

Az I. esethez hasonló okoskodással:

Ha B, C és D között van kettő, akik nem ismerik egymást, például B és C, akkor találtunk három olyan résztvevőt, akik kölcsönösen nem ismerik egymást (A, B, C).

Ha B, C és D között nincs kettő, akik nem ismernék egymást, akkor ők kölcsönösen ismerik egymást.

Tehát az előbbiek miatt mindig van három olyan résztvevő, akik kölcsönösen ismerik, vagy kölcsönösen nem ismerik egymást.

7. *Tekintsük a következő,* fagráfra *vonatkozó állítást:*

Ha 5 fagráfnak összesen 41 éle van, és ezeket a fagráfokat egy gráfnak tekintjük, akkor ezen gráf pontjainak száma páros.

a) Adjuk meg az előbbi állítás logikai értékét (igaz vagy hamis). A választ indokoljuk. *(3 pont)*

b) Igazoljuk, hogy ha egy ötpontú egyszerű *gráfnak* 8 *éle van, akkor a gráfnak van legalább két olyan pontja, amelyből pontosan három él indul ki.* *(5 pont)*

2017. november 8-án a Fővárosi Állat- és Növénykertben kiselefánt született. A hírt először csak az állat egyik gondozója tudja.

c) Hányféleképpen juthat el a hír a többi 4 gondozóhoz, ha mindenki telefonon beszél a másikkal, és a lehető legkevesebb hívással értesül mindenki a hírről? *(8 pont)*

Megoldás. *a)* Mivel egy n pontú fagráf éleinek száma $n-1$, így az 5 db fagráfnak 5-tel kevesebb éle van, mint pontja. Az előbbiek miatt az 5 db különböző, diszjunkt fagráfból álló gráf csúcsainak száma 46, tehát az állítás igaz.

b) Tekintsünk egy 5 pontú teljes gráfot, vagyis egy olyan gráfot, amelyben minden pontot minden másikkal pontosan egy él köt össze. Az előbbi gráfnak összesen 10 éle van. Töröljünk le a 10 élből kettőt, hogy 8 élünk legyen.

Elsőként bármelyik élet letörölhetjük, ekkor olyan gráfot kapunk, amelyben két pontból 3, a többi háromból 4 él indul ki.

Másodikként vagy olyan élet törlünk le, amely az egyik 3 és az egyik 4 fokszámú pontot köti össze, vagy olyat, amely két 4 fokszámú pontot köt össze.

Utóbbi esetben négy 3- és egy 4 fokszámú pont marad, míg előbbi esetben egy 2-, két 3- és két 4 fokszámú pont marad.

Látható, hogy mindegyik esetben van legalább két 3 fokszámú pont.

c) Jelölje A azt a gondozót, aki először tudja meg a hírt. Összesen 4 telefonhívás kell ahhoz, hogy mindenkihez eljusson a hír.

Ha A hívja fel mind a 4 másik gondozót, akkor 1 eset van.

Ha A csak 3 másik gondozót hív fel, és a 3 felhívott gondozó közül valamelyik hívja fel a negyediket, akkor összesen $4\cdot 3=12$ eset van.

Ha A csak 2 másik gondozót hív fel, akkor a 2 felhívott gondozót $\binom{4}{2}$-féleképpen választhatja ki. A bármely 2 gondozót hívja fel, a másik 2 gondozó 8-féleképpen értesülhet a hírről, így összesen $\binom{4}{2}\cdot 8=48$ ilyen eset van.

Ha A csak 1 másik gondozót hív fel, akkor a 4 gondozó közül bármelyiket felhívhatja. Bármelyiküket hívja fel, a felhívott felhívhatja mind a 3 másik gondozót, ami 1 eset.

Az A által felhívott gondozó felhívhat 2 gondozót, és utána valamelyikük hívja fel a negyedik gondozót, aki még nem értesült a hírről. Ezt 6-féleképpen tehetik meg.

Az A által felhívott gondozó 1 gondozót hív fel, és ő hívja fel a többieket, ez 3 eset.

Mindenki 1 gondozót hív fel, ami $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ eset.

Mivel A négyféleképpen választhatja ki, hogy melyik gondozót hívja fel, ezért itt összesen $4 \cdot (1 + 6 + 3 + 6) = 64$ eset van.

Az 5 gondozó összesen 125-féleképpen értesítheti egymást.

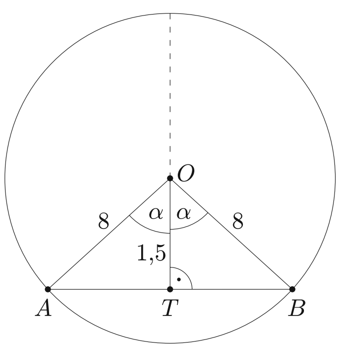
8. *Az ábrán egy* 300 méter *hosszú egyenes alagút bejárata látható, mely egy* 8 méter *sugarú kör egy része. Az alagúton keresztülvivő autóút az alagút tetejétől* 9,5 méterre *található.*

a) Milyen széles az autóút? (*3 pont*)

b) Mekkora térfogatú kőzetmennyiséget kellett eltávolítani az alagút fúrása során? (*5 pont*)

Egy túlméretes szállítmány olyan téglatest alakú tárgyat szállít, melyet a jármű 1,5 méter *magasan lévő platójára helyeznek.*

c) Mekkora lehet legfeljebb egy olyan tárgy keresztmetszete, ami még átvihető a kétsávos alagúton szabályosan közlekedve? (*8 pont*)



Megoldás. *a*) Az *ábra* szerint az OTB derékszögű háromszögben az TB szakasz hossza (m-ben számolva) $TB = \sqrt{8^2 - 1{,}5^2} = \sqrt{61{,}75}$ (m), így az autóút kb. 15,7 m széles.

b) Az ábra szerint az OTB derékszögű háromszögből: $\cos\alpha = \frac{1{,}5}{8} = 0{,}1875$, ahonnan $\alpha \approx$ $\approx 79{,}2°$, tehát a nagyobbik körcikk középponti szöge $360° - 2\alpha \approx 201{,}6°$.

Az AOB egyenlő szárú háromszög területe:

$$T_1 = \frac{8^2 \cdot \sin 2\alpha}{2} \ (\approx 11{,}8 \text{ m}^2).$$

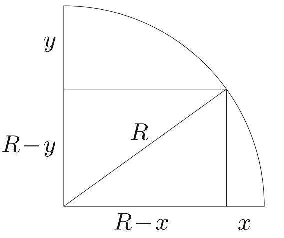
A teljes kör területe $T = 8^2\pi$ ($\approx 201{,}1$ m^2), ezért a nagyobb körcikk területe

$$T_2 = \frac{360° - 2\alpha}{360°} \cdot 8^2\pi \ (\approx 112{,}6 \text{ m}^2),$$

a nagyobb körszelet területe $T_1 + T_2 \approx 124{,}4$ m^2.

Az eltávolított kőzetmennyiség kb. $300 \cdot 124{,}4 = 37\,320$ m^3.

c) Az *ábra* jelöléseit használva írjuk fel a téglalap alakú síkmetszet területét: $T=(R-x)(R-y)$, ugyanakkor $(R-x)^2+(R-y)^2=R^2$.



Az $\frac{a^2+b^2}{2}\geqslant ab$ egyenlőtlenség alapján $a=R-x$ és $b=R-y$ választással $\frac{R^2}{2}\geqslant T$ adódik. Egyenlőség csak $a=b$, vagyis $x=y$ esetén lesz, amikor is

$$R-x=R-y=\frac{R\cdot\sqrt{2}}{2}.$$

Tehát a maximálisan átvihető tárgy keresztmetszete egy négyzet, melynek oldala kb. $\left(4\sqrt{2}\approx\right)$5,7 méter.

9. *A gumiszerelő műhelyben a szakember tudja, hogy normál körülmények között a gépjárművek első – meghajtott – két kerekén lévő gumik* 30 000 *kilométer alatt, a hátsó gumik* 50 000 *kilométer alatt kopnak el.*

a) *Hány kilométert képes biztonságosan autózni adott gumiszettel az autós, ha az első- és hátsó tengelyen lévő kerekek egymással kicserélhetők?* (*6 pont*)

A személygépkocsikra való gumik gyártósoráról lekerülő termékeket nagyon alaposan ellenőrzik. Egy gyártósori széria jellemzően 80 000 *gumit tartalmaz, melyből általában* 400 *darab hibás (méret és/vagy anyag összetételi eltérés miatt). Az automatikus minőségellenőrzésen az ellenőrző berendezés csak a valóban hibás gumik* 99%*-át találja meg, a jó termékek* 2%*-át viszont hibásnak minősíti.*

b) *Mekkora annak a valószínűsége, hogy az automatikus ellenőrző berendezés által hibásnak minősített gumi valóban hibás?* (*5 pont*)

c) *Mekkora valószínűséggel képes az automatikus ellenőrző berendezés a jó minősítést megállapítani?* (*5 pont*)

Megoldás. *a*) Ha az első tengelyen 30 000 km, a hátsón 50 000 km megtétele után kopik el a meghajtott gumi, akkor az első tengelyen a gumi $\frac{1}{30\,000}$-ed, a hátsó tengelyen pedig $\frac{1}{50\,000}$-ed része kopik el kilométerenként.

Jelölje a az első, míg b a hátsó tengelyen futott km-ek számát, ekkor mindkét gumipárra felírható az alábbi egyenlet: $\frac{a}{30\,000}+\frac{b}{50\,000}=1$, amiből $5a+3b=150\,000$. Mivel az előbbi egyenlet mindkét gumipárra igaz és az egyenletes kopás miatt $a=b$, ezért $8a=150\,000$, ahonnan $a=18\,750$ km.

Tehát mindkét tengelyen 18 750 km-t fut a gumipár, így összesen maximum 37 500 km-t lehet velük biztonságosan megtenni.

b) és *c*)

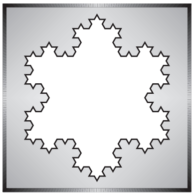
	Jó gumi	Hibás gumi	Összesen
Jónak minősíti	$0{,}995\cdot 0{,}98=0{,}9751$	$0{,}005\cdot 0{,}01=0{,}00005$	0,97515
Hibásnak minősíti	$0{,}995\cdot 0{,}02=0{,}0199$	$0{,}005\cdot 0{,}99=0{,}00495$	0,02485
Összesen	0,995	0,005	1

A táblázat alapján annak a valószínűsége, hogy az automatikus ellenőrző berendezés által hibásnak minősített gumi valóban hibás:

$$p = \frac{0{,}00495}{0{,}00495 + 0{,}0199} = \frac{99}{497} \approx 0{,}1992.$$

A táblázat alapján annak a valószínűsége, hogy az automatikus ellenőrző berendezés a megfelelő minősítést állapítja meg: $p = 0{,}9751 + 0{,}00495 = 0{,}98005$.

Varga Péter
Budapest



C gyakorlatok megoldása

C. 1387. *Határozzuk meg a számrendszer x alapját, ha teljesül az alábbi egyenlet:*

$$2016_x = x^3 + 2x + 342.$$

Matlap (Kolozsvár)

I. megoldás. Az x egy 6-nál nagyobb pozitív egész szám, mert az x alapú számrendszerben felírt szám tartalmaz 6-os számjegyet. Mivel $2016_x = 2x^3 + x + 6$, ezért a következő egyenletet írhatjuk fel:

$$2x^3 + x + 6 = x^3 + 2x + 342,$$

$$x^3 - x - 336 = 0.$$

Vizsgáljuk az egyenlet megoldásait a természetes számok körében, ezek a konstans tag osztói közül kerülhetnek ki. A -336 pozitív osztói sorban: $1, 2, 3, 4, 6, 7, \ldots$. Elég 7-től vizsgálni, mert $x > 6$. Az $x = 7$ kielégíti az egyenletet. Tehát $(x - 7)$ kiemelhető az egyenlet bal oldalán álló kifejezésből:

$$x^3 - x - 336 = (x - 7)(x^2 + 7x + 48) = 0.$$

Mivel egy szorzat pontosan akkor 0, ha az egyik tényezője 0, ezért meg kell még vizsgálni, hogy a másodfokú kifejezés értéke mikor 0. De az $x^2 + 7x + 48 = 0$ másodfokú egyenlet diszkriminánsa $D = 7^2 - 4 \cdot 48 < 0$, ezért nincs valós gyöke.

Tehát az egyetlen megoldás $x = 7$.

Csóka Zoárd (Győri Műszaki Szakképzési Centrum Jedlik Ányos Gépipari és Informatikai Szakgimn., Szki. és Koll., 10. évf.)

Rendezzük az $x^3 - x - 336 = 0$ egyenletet:

$$336 = x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x + 1)(x - 1) = (x - 1)x(x + 1).$$

Ezt felhasználva más módon is el lehetett jutni a megoldáshoz. Mutatunk néhány lehetséges utat.

II. megoldás. Mivel $x \in \mathbb{N}$ (illetve $x \geqslant 7$ a 2016_x-ben szereplő 6-os számjegy miatt), ezért lényegében három olyan, egymást követő pozitív egész számot keresünk, melyek szorzata 336. Mivel $\forall x_1 < x_2$ $(x_1, x_2 \in \mathbb{N})$ esetén

$$(x_1 - 1)x_1(x_1 + 1) < (x_2 - 1)x_2(x_2 + 1),$$

azért mert a két szorzatban a második kifejezés tényezői páronként mindig nagyobbak, az egyenletnek csak egy valós gyöke van. A korábban meghatározott legkisebb lehetséges $x = 7$ esetén az egyenlőség valóban fennáll $(6 \cdot 7 \cdot 8 = 336)$, tehát ez az egyetlen megoldás.

Apagyi Dávid (Kecskeméti Katona J. Gimn., 9. évf.)

III. megoldás. Mivel x pozitív egész, ezért $x(x-1)(x+1)$ 3 egymást követő pozitív egész szám szorzata.

336 prímtényezős felbontása: $2^4 \cdot 3 \cdot 7$. Ebből ki is jön, hogy $6 \cdot 7 \cdot 8 = 336$, így $x = 7$ és más megoldás nem lehetséges.

Demeter Gergő (Szegedi Radnóti M. Kísérleti Gimn., 11. évf.)

IV. megoldás. Az utolsó egyenletből azt kapjuk, hogy három szomszédos, pozitív egész szám szorzata lesz 336. Mivel az adott számrendszerben fel lehet írni a 6-os számjegyet, ezért $x \geqslant 7$.

$$\sqrt[3]{(x-1)x(x+1)} = \sqrt[3]{336} \approx 6{,}95.$$

A három szám mértani közepe $6{,}95\ldots$, és a mértani közép nem lehet kisebb mindhárom számnál, vagyis a legkisebb szám maximum 6, tehát $x \leqslant 7$. Vagyis az x csak 7 lehet. Hogy az $x = 7$ jó-e, azt könnyen kiszámolhatjuk: $6 \cdot 7 \cdot 8 = 336$, vagyis ez tényleg jó megoldás.

Dobák Dániel (Budapest V. Ker. Eötvös J. Gimn., 10. évf.)

274 dolgozat érkezett. 5 pontos 210, 4 pontos 35, 3 pontos 14, 2 pontos 12, 1 pontos 1, 0 pontos 1 dolgozat. Nem versenyszerű 1 dolgozat.

C. 1468. *Igazoljuk, hogy ha a és b nemnegatív számok, akkor*

$$\frac{1}{2}(a+b)^2 + \frac{1}{4}(a+b) \geqslant a\sqrt{b} + b\sqrt{a}\,.$$

Mikor áll fenn egyenlőség?

Megoldás. A feladat feltétele alapján $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ $(a, b \in \mathbb{R})$, így $\sqrt{a}$ és $\sqrt{b}$ léteznek. Legyen

$$E(a;b) = \frac{1}{2}(a+b)^2 + \frac{1}{4}(a+b) - a\sqrt{b} - b\sqrt{a}.$$

Azt kell belátni, hogy $E(a;b) \geqslant 0$.

$$E(a;b) = \frac{1}{2}(a+b)^2 + \frac{1}{4}(a+b) - a\sqrt{b} - b\sqrt{a} =$$

$$= \frac{1}{2}a^2 + ab + \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{4}a + \frac{1}{4}b - a\sqrt{b} - b\sqrt{a} =$$

$$= \left(\frac{1}{2}a^2 - ab + \frac{1}{2}b^2\right) + \left(ab + \frac{1}{4}a - a\sqrt{b}\right) + \left(ab + \frac{1}{4}b - b\sqrt{a}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(a^2 - 2ab + b^2\right) + a\left(b + \frac{1}{4} - \sqrt{b}\right) + b\left(a + \frac{1}{4} - \sqrt{a}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(a-b)^2 + a\left(\sqrt{b} - \frac{1}{2}\right)^2 + b\left(\sqrt{a} - \frac{1}{2}\right)^2.$$

Tehát

$$E(a;b) = \frac{1}{2}\underbrace{(a-b)^2}_{\geqslant 0} + \underbrace{a}_{\geqslant 0}\underbrace{\left(\sqrt{b} - \frac{1}{2}\right)^2}_{\geqslant 0} + \underbrace{b}_{\geqslant 0}\underbrace{\left(\sqrt{a} - \frac{1}{2}\right)^2}_{\geqslant 0},$$

és mivel nemnegatív számok szorzata és összege is nemnegatív, kapjuk, hogy $E(a;b) \geqslant 0$ (és ez az, amit bizonyítani akartunk).

Az egyenlőség akkor teljesül, ha (az összegben) minden tag nulla:

$$\frac{1}{2}(a-b)^2 = 0 \quad \to \quad a - b = 0 \quad \Rightarrow \quad a = b$$

és

$$a\left(\sqrt{b} - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0 \quad \text{vagy} \quad \sqrt{b} - \frac{1}{2} = 0, \quad \text{azaz} \quad b = \frac{1}{4}$$

és

$$a\left(\sqrt{a} - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 0 \quad \text{vagy} \quad \sqrt{a} - \frac{1}{2} = 0, \quad \text{azaz} \quad a = \frac{1}{4}.$$

Mindezek alapján az egyenlőség akkor teljesül (az $a = b$ feltétel figyelembevételével), ha $a = b = 0$, illetve ha $a = b = \frac{1}{4}$.

Molnár István (Békéscsaba, Széchenyi István Szki., 11. évf.)

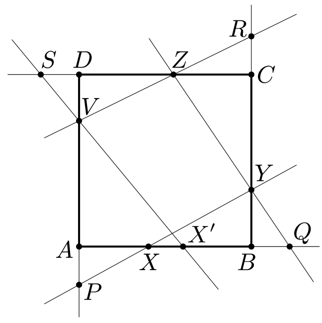
Megjegyzés. A versenyzők többsége a honlapon közölthöz hasonló módon oldotta meg a feladatot. A leggyakoribb hiba az egyenlőség egyik esetének hiánya volt.

43 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 10 versenyző: Agócs Katinka, Balog Lóránd, Kiszelovics Dorina, Magyar Boglárka, Mészáros Márton, Molnár István, Németh Csilla Márta, Spányik Teodor, Surján Anett, Szécsi Adél Lilla. 4 pontos 13, 3 pontos 5, 2 pontos 1, 1 pontos 10, 0 pontos 4 dolgozat.

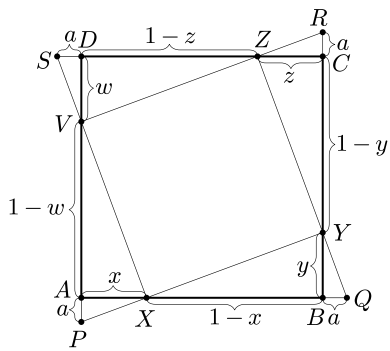
Matematika feladat megoldása

B. 4910. *Az $ABCD$ négyzet oldalegyenesein vegyük fel a P, Q, R és S pontokat az* ábra *szerint úgy, hogy $AP=BQ=CR=DS$. Az AB oldal tetszőleges belső X pontjából kiindulva a PX egyenes messe BC egyenesét Y-ban, QY messe CD egyenesét Z-ben, RZ a DA egyenest V-ben, végül SV az AB egyenest X'-ben. Bizonyítsuk be hogy ha X' és X egybeesnek, akkor $XYZV$ négyzet.*

(*5 pont*)



Megoldás. Tudjuk, hogy $X=X'$. Legyen a négyzet oldala egységnyi, ez nem jelent korlátozást. Legyen $AP=BQ=CR=DS=a$, továbbá $AX=x$, $XB=1-x$, $BY=y$, $YC=1-y$, $CZ=z$, $ZD=1-z$, $DV=w$ és $VA=1-w$.



Ekkor a DVZ háromszög hasonló lesz a CRZ háromszöghöz, mivel a DV oldal párhuzamos a CR oldallal, a másik két oldaluk pedig egy egyenesre esik. Megfelelő oldalaik aránya tehát megegyezik:

$$\frac{z}{1-z}=\frac{a}{w}.$$

Ugyanígy az SDV és az XAV háromszögek is hasonlóak lesznek, tehát a megfelelő oldalaik aránya megegyezik:

$$\frac{a}{w}=\frac{x}{1-w}.$$

Ebből a két egyenletből következik, hogy

$$\frac{z}{1-z}=\frac{x}{1-w}.$$

Ugyanígy felírva a PAX és XBY, illetve QBY és ZCY hasonló háromszögekre az arányokat kapjuk, hogy

$$\frac{a}{x}=\frac{y}{1-x}\quad\Longleftrightarrow\quad\frac{x}{1-x}=\frac{a}{y}\ \text{ és }\ \frac{a}{y}=\frac{z}{1-y}.$$

Ezzel tehát az is teljesül, hogy

$$\frac{z}{1-y}=\frac{x}{1-x}.$$

Osszuk el egymással a $\frac{z}{1-z}=\frac{x}{1-w}$ és $\frac{z}{1-y}=\frac{x}{1-x}$ egyenletek megfelelő oldalait. Kapjuk, hogy

$$(1)\qquad \frac{1-y}{1-z}=\frac{1-x}{1-w}.$$

Az oldalak betűzésétől függetlenül jöttek ki ezek az arányok, így ugyanezek miatt felírható az is, hogy:

$$\frac{1-z}{1-w}=\frac{1-x}{1-y}.$$

Ebből átrendezéssel:

$$(2)\qquad \frac{1-y}{1-w}=\frac{1-x}{1-z}.$$

Az (1) és (2) hányadosára:

$$\frac{1-w}{1-z}=\frac{1-z}{1-w}.$$

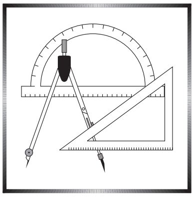
Ez pedig csak úgy lehet, ha

$$1-w=1-z.$$

Szimmetria miatt $1-y=1-x=1-w=1-z$ is igaz lesz. Ez pedig azt jelenti, hogy az $ABCD$ négyzet oldalait egyenlő arányban osztják az $XYZV$ négyszög csúcsai, tehát az XBY, YCZ, ZDV és VAX háromszögek egybevágó derékszögű háromszögek. Ebből pedig már következik, hogy $XYZV$ négyzet (mivel oldalai egyenlő hosszúak és merőlegesek egymásra), és éppen ezt akartuk belátni.

Csizmadia Viktória (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.) dolgozata alapján

Összesen 69 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 43, 4 pontot 8 versenyző. 2 pontos 2, 1 pontos 3 tanuló dolgozata. 0 pontot kapott 13 tanuló.



A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (1483–1489.)

Feladatok 10. évfolyamig

C. 1483. Mennyi a $6|x-1|+5|x-2|+4|x-3|+3|x+4|+2|x-5|$ kifejezés legkisebb értéke?

C. 1484. Az $ABCD$ olyan konvex négyszög, amelynek átlói nem merőlegesek egymásra. Az A, B, C, D csúcsokból az AC, illetve BD szakaszokra bocsátott merőlegeseknek létezik a csúcsoktól különböző talppontja, jelölje ezeket rendre A_1, B_1, C_1, D_1. Bizonyítsuk be, hogy az ezek által meghatározott négyszög hasonló az eredetihez.

Feladatok mindenkinek

C. 1485. Legyen $x=1^2+3^2+5^2+\ldots+2017^2$ és $y=2^2+4^2+6^2+\ldots+2018^2$. Adjuk meg az

$$\frac{y-x}{y+x-(1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+2017\cdot 2018)}$$

tört értékét.

C. 1486. Adott az ABC szabályos háromszög és a k kör, melyeknek közös középpontja az O pont, területük pedig egyaránt $\sqrt{\frac{\pi}{\sqrt{27}}}$. Legyenek az AO, BO, CO szakaszok meghosszabításainak a k körrel való metszéspontjai rendre az A', B', C' pontok. Adjuk meg az $AC'BA'CB'$ hatszög területének pontos értékét.

C. 1487. Kilenc színész háromfős helyzetgyakorlatokat játszik. Legkevesebb hány gyakorlatra van szükség ahhoz, hogy bármely két színész szerepeljen közösen?

Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1488. Öt szakaszról tudjuk, hogy bármelyik háromból mint oldalakból valódi háromszög szerkeszthető. Bizonyítsuk be, hogy az így kapott háromszögek közül legalább az egyik hegyesszögű.

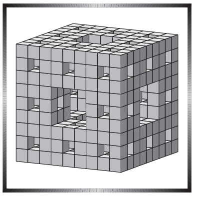
C. 1489. Egy sakktábla bal alsó sarkában áll egy sötét futó, jobb alsó sarkában pedig egy világos futó. Mindkét futó a saját színén haladva egyesével lép felfelé haladva a táblán véletlenszerűen jobbra vagy balra, míg el nem érik a felső sort. Mennyi a valószínűsége, hogy a sötét futó a világos futótól jobbra érkezik a felső sorba?

❄

Beküldési határidő: 2018. június 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

A B pontversenyben kitűzött feladatok (4957–4965.)



B. 4957. Egy pozitív egészekből álló halmazt nevezzünk *tyű-de-jónak,* ha a számok között nincs kettő, melyek különbsége 2. Hány tyű-de-jó részhalmaza van az $\{1,2,3,\ldots,10\}$ halmaznak?

(*3 pont*) Javasolta: *Róka Sándor* (Nyíregyháza)

B. 4958. Egy háromszög oldalai a, b, c, a beírt kör sugara r, a köréírt kör sugara R. Bizonyítsuk be, hogy ha

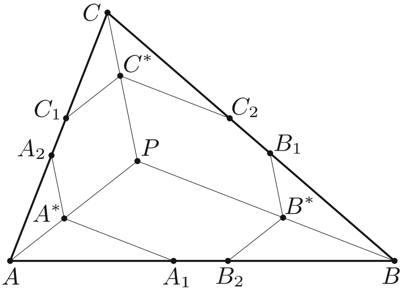
$$a+b+c=\frac{4}{rR} \quad \text{és} \quad \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}=6,$$

akkor $R=2r$.

(*4 pont*) (*Román versenyfeladat*)

B. 4959. Amikor Barnabás egyet bukfencezik, akkor a zsebében lévő n darab üveggolyó bármelyike egymástól függetlenül $0<p<1$ valószínűséggel kiesik a zsebéből. Ha egy bukfenc során legalább egy üveggolyó kiesett Barnabás zsebéből, akkor abbahagyja a bukfencezést, különben folytatja. Tudjuk, hogy miután abbahagyja Barnabás a bukfencezést, éppen 50% eséllyel van páros mennyiségű üveggolyó a zsebében. Mennyi lehetett n értéke?

(*4 pont*)



B. 4960. Legyen P az ABC háromszög belső pontja, az A^*, B^* és C^* pontok pedig rendre az AP, BP és CP szakaszok tetszőleges pontjai. Húzzunk párhuzamost az A^* ponton keresztül BP-vel és CP-vel, ezek messék az AB és AC oldalakat rendre az A_1 és A_2 pontokban az *ábra* szerint. Hasonlóan, a B^*-on keresztül CP-vel és AP-vel húzott párhuzamosok a BC és AB oldalakat rendre a B_1 és B_2 pontokban, míg a C^*-n keresztül AP-vel és BP-vel húzott párhuzamosok az AC és BC oldalakat rendre a C_1 és C_2 pontokban metszik. Mutassuk meg, hogy

$$AC_1\cdot BA_1\cdot CB_1=AB_2\cdot BC_2\cdot CA_2.$$

(*3 pont*) Javasolta: *Kozma József* (Szeged)

B. 4961. Három egységnyi sugarú kör metszetét az $\widehat{AB}$, $\widehat{AC}$ és $\widehat{BC}$ körívek határolják, a metszet kerülete k. Számítsuk ki az A, B és C középpontú, egységnyi sugarú körök metszetének kerületét.

(*4 pont*)

B. 4962. Legyen n pozitív egész. Oldjuk meg az

$$\begin{gathered} a_1^2+a_1-1=a_2\\ a_2^2+a_2-1=a_3\\ \vdots\\ a_n^2+a_n-1=a_1 \end{gathered}$$

egyenletrendszert a valós számok halmazán.

(*5 pont*)

B. 4963. Egy háromszög hozzáírt körei legnagyobbikának sugara legyen r_a, a köré írt kör sugara pedig R. Igazoljuk, hogy $r_a \geqslant \frac{3}{2}R$.

(*5 pont*) *Erdős Pál* (1913–1996) feladata

B. 4964. Igaz-e, hogy ha az $f, g : \mathbb{R} \to [0,1]$ függvények periodikusak, és az $f+g$ függvény is periodikus, akkor van közös periódusuk?

(*6 pont*)

B. 4965. Egy $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektorra legyen $\mathbf{e}_{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$. Adott a nem elfajuló ABC háromszög, valamint az ABC síkjával nem egybeeső, de azzal párhuzamos $\mathcal{S}$ sík. Mutassuk meg, hogy pontosan egy olyan $P \in \mathcal{S}$ pont létezik, amire az $\mathbf{e}_{\overrightarrow{PA}} + \mathbf{e}_{\overrightarrow{PB}} + \mathbf{e}_{\overrightarrow{PC}}$ vektor merőleges $\mathcal{S}$-re.

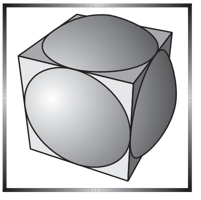
(*6 pont*)

❄

Beküldési határidő: 2018. június 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (725–727.)



A. 725. Legyen $\mathbb{R}^+$ a pozitív valós számok halmaza. Határozzuk meg azokat az $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ függvényeket, melyekre minden $x, y \in \mathbb{R}^+$ esetén teljesül az alábbi egyenlőség:

$$f\big(xy + f(y)^2\big) = f(x)f(y) + yf(y).$$

Javasolta: *Ashwin Sah* (Cambridge, Massachusetts, USA)

A. 726. Adott egy ABC háromszög, melynek beírt körének középpontja I. Messe az AI egyenes az ABC háromszög körülírt körét az $S \neq A$ pontban. Majd legyen az I pont tükörképe BC-re nézve J, és tegyük fel, hogy az SJ egyenes az ABC háromszög körülírt körét a $P \neq S$ pontban metszi másodjára. Mutassuk meg, hogy $AI = PI$.

Javasolta: *Mészáros József* (Galánta, Szlovákia)

A. 727. Tetszőleges $(x_1,\ldots,x_n)$ véges sorozatra jelölje $N(x_1,\ldots,x_n)$ az olyan (i,j) indexpárok számát, amelyekre $1\leqslant i<j\leqslant n$ és $x_i=x_j$.

Legyen p páratlan prímszám, $1\leqslant n<p$, továbbá $a_1,a_2,\ldots,a_n$ és $b_1,b_2,\ldots,b_n$ tetszőleges modulo p maradékosztályok. Bizonyítsuk be, hogy az $1,2,\ldots,n$ indexeknek létezik olyan π permutációja, amire

$$N\big(a_1+b_{\pi(1)},a_2+b_{\pi(2)},\ldots,a_n+b_{\pi(n)}\big)\leqslant\min\big(N(a_1,a_2,\ldots,a_n),N(b_1,b_2,\ldots,b_n)\big).$$

❄

Beküldési határidő: 2018. június 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

Monte-Carlo-módszerek 2.

Februári számunkban bemutattuk a módszer használatát egy matematikai probléma megoldásánál. Folytatásként nézzük meg, hogyan használható a szimulációs módszer a fizika területén, például az elektrosztatikában. Legyen egy V térfogatban N számú pontszerű töltés vákuumban. Adjuk meg az i-edik ponttöltés nagyságát a $\mathbf{Q}_i$ számmal és helyét az $\mathbf{r}_i$ helyvektorral ($1\leqslant i\leqslant N$). A Coulomb-törvény segítségével a tér egy $\mathbf{r}$ vektorral mutatott helyén kiszámítható az előbbi töltések által keltett $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ térerősség és $U(\mathbf{r})$ potenciál, melyek értékei

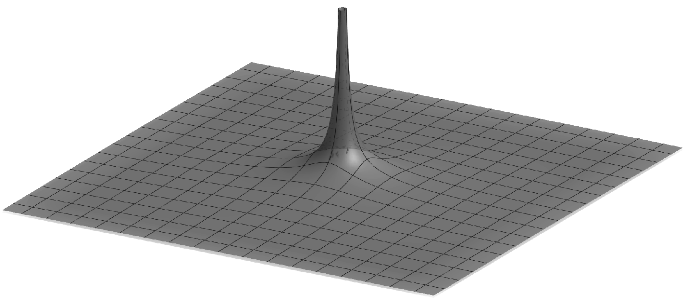
$$\mathbf{E}(\mathbf{r})=k\sum_{i=1}^{N}\frac{Q_i(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|^3}\qquad\text{és}\qquad U(\mathbf{r})=k\sum_{i=1}^{N}\frac{Q_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|}.$$

Az összegzések egyszerűen elvégezhetők, nagyszámú ponttöltés esetén akár számítógépet is segítségül hívhatunk.

A térerősség és a potenciál meghatározása összetettebb feladat, ha a töltések nem pontszerűek, hanem folytonos töltéseloszlások vannak a térrészben, például testeken vagy azok felületén. Ekkor a Gauss-törvény használatával néhány szimmetrikus esetben könnyen kiszámíthatóak az előbbi mennyiségek. Általános esetben azonban el kell végezni az összegzéseket, illetve helyettük ekkor integrálni szükséges. Ha például a Q töltés egy A felületen, egyenletes töltéssűrűséggel helyezkedik el, akkor a felületet gondolatban dA nagyságú elemi részekre bontjuk, melyek mindegyikére $dQ=Q\frac{dA}{A}$ töltés jut $\sigma=\frac{Q}{A}$ töltéssűrűséggel. Az összeg helyére ekkor a következő integrálok lépnek:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r})=k\int\limits_A\frac{\sigma(\mathbf{r}-\mathbf{r}_{dA})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_{dA}|^3}dA\qquad\text{és}\qquad U(\mathbf{r})=k\int\limits_A\frac{\sigma}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_{dA}|}dA.$$

Az $U(\mathbf{r})$ potenciál a tér minden pontjához egy skalár értéket rendel. A függvény általános esetben például úgy szemléltethető, hogy az értékeihez hozzárendeljük egy színskála színeit, és azokkal színezzük a térbeli pontokat. Szerencsére a problémák egy részében a feladat olyan töltéselrendezésű, amely valamely térirányban szimmetrikus, így sokszor elég egy síkmetszetben található töltéseket vizsgálni és ebben a síkban ismerni a térerősség és a potenciál értékét. Ekkor U egy $R^2 \to R$ függvény, amely térben vagy akár síkban is ábrázolható, ez utóbbi esetben pl. szintvonalakkal vagy színekkel. Egy ponttöltés potenciálfüggvényének képe:

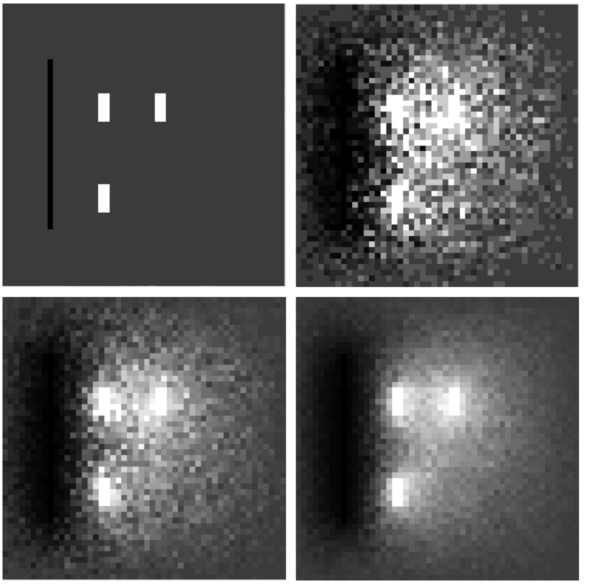


A potenciálfüggvény számítása összetett töltéseloszlások esetén nem egyszerű. A gyakorlati alkalmazások során elegendő a pontenciál közelítő értékének ismerete, ami a következő bolyongásos szimulációval végezhető. Példaként keressük egy síkbeli töltéseloszlás potenciálját. A sík vizsgált részét gondolatban osszuk fel $N \times M$ elemi négyzetre, melyek mindegyike tartalmazhat $\pm q$ elemi töltést, vagy üres. A sík minden négyzetének adjunk egy kezdetben zérus $p(n,m)$ értéket, és indítsunk mindegyikből egy véletlenszerű mozgással rendelkező „részecskét". A bolyongó részecske egy szimulációs lépésben a sík bármely négyzetéből egy csúcsban vagy élben vele szomszédos négyzetre léphet. Ha olyan mezőre ér, amelyben van töltés, akkor a mező töltése hozzáadódik a kiindulási hely $p(n,m)$ értékéhez. A bolyongást minden négyzetre S alkalommal elvégezzük, majd a kapott $p(n,m)$ értékeket S-sel osztjuk. Megmutatható, hogy az így létrejött $p(n,m)$ függvény a q_i töltések által létrehozott elektromos potenciált közelíti. A közelítés annál pontosabb, minél többször végezzük el a szimulációt, tehát S értékének növelésével az eredmény pontosítható.

A lap 2018. márciusi számában kitűzött **I. 453.** feladat lényegében ennek a szimulációnak az elvégzését és a potenciál színskálával történő ábrázolását tűzte ki feladatként a versenyzőknek.

A négy ábrán egy 50×50-es, négyzet alakú terület látható:

- a bal felső képen a negatív és pozitív $\pm q$ elemi töltések helye;
- a jobb felső képen 5 szimuláció elvégzése után a potenciál szürkeárnyalatos ábrája;
- az alsó sor képein ugyanez 20 és 100 szimuláció elvégzése után.



A szimulációt végző program a fenti leírásnak, és az **I. 453.** feladatnak megfelelően a következő fontosabb részekből állítható össze:

1. **Adatok bevitele ($\boldsymbol{N, M, S, \pm q_i}$ töltések koordinátái)**
2. **Kezdőértékek megadása**
3. **Szimuláció elvégzése $\boldsymbol{S}$-szer minden egységnégyzetre**
4. **$\boldsymbol{p(n,m)}$ értékeinek leképezése egy színskálára és ábrázolásuk**

A szimuláció elvégzéséhez érdemes fölvenni egy q kétdimenziós tömböt, melynek értékei megadják az elhelyezett töltések értékét a téglalap n-edik sorában és m-edik oszlopában (vagy 0-t), illetve egy hasonló p tömböt, amely a potenciál értékét tartalmazza a szimuláció során (kezdeti értéke 0).

Mivel egy töltéssel rendelkező négyzetből induló bolyongás azonnal egy töltéshez ér, ezért azokon a helyeken, ahol $q(n,m)$ nem nulla, $p(n,m)$ értéke egyenlő $q(n,m)$ értékével. Minden más esetben addig változtatunk helyet, amíg egy töltéssel rendelkező négyzethez nem érünk. Előfordulhat ugyan, hogy a bolyongás „kivezet" a vizsgált területről, vagyis túllép a határokon. Ekkor két lehetőség közül választhatunk: vagy engedjük, hogy a bolyongás tetszőleges távolra vezessen, vagy abbahagyjuk a bolyongást, és nem változtatunk a kiindulási négyzet p értékén, és új bolyongást indítunk. Az első esetben a program igen sokáig futna, amit nem szeretnénk, ezért érdemes a második esetet választani, illetve a vizsgált terület méreteit úgy megadni, hogy a töltések ne a szélén helyezkedjenek el. Így az elkóborlás esélye csekély, és nem befolyásolja számottevően a szimuláció eredményét.

A program többi részének elkészítése nem nehéz, az elkészült programok megnézhetők és tesztelhetők honlapunkon az **I. 453.** feladatnál.

Schmieder László

Informatikából kitűzött feladatok

I. 457. Egy síkon K darab pálcika fekszik – a *Marokkó* nevű játékhoz hasonlóan – melyeket pozitív egész számokkal azonosítunk. A pálcikák elhelyezkedése véletlenszerű, egymást úgy keresztezhetik, hogy a nagyobb azonosítójú van mindig feljebb. A pálcikák végpontjainak koordinátái egész számok. A pálcikák egyesével gyűjthetők össze úgy, hogy egy pálcika elvételekor a többi pálca nem mozdulhat meg: az a pálcika vehető el, amelyet felülről nem keresztez másik. Két pálcika végpontjának találkozása nem számít keresztezésnek.

Készítsünk programot `i457` néven, amely a pálcikák azonosítójának egy olyan sorrendjét adja meg, amellyel a pálcikák mindegyike elvehető úgy, hogy minden lépésben az elvehető pálcikák közül a legkisebb sorszámút választjuk.

A program standard bemenetének első sorában a pálcikák K $(2 \leqslant K \leqslant 50)$ számát és az ezt követő K sorban a pálcikák azonosítóját és végpontjainak (x_1, y_1) és (x_2, y_2) $(1 \leqslant x_1, y_1, x_2, y_2 \leqslant 50)$ koordinátáit adjuk meg. A program írja ki a standard kimenetre a pálcikák azonosítójának szóközzel elválasztott sorrendjét, amely megadja az összes pálcika elvételének megfelelő sorrendjét.

Példa a bemenetre (a / sortörést jelöl):	Kimenet

`9`
`1 17 29 18 19 / 2 26 27 19 20 / 3 22 29 15 22`
`4 18 14 15 24 / 5 20 14 18 24 / 6 20 22 22 12`
`7 25 19 19 11 / 8 23 14 21 24 / 9 29 28 27 38`
	`4 3 1 5 6 8 2 7 9`

Beküldendő egy tömörített `i457.zip` állományban a program forráskódja és rövid dokumentációja, amely megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

I. 458 (É). Az éjszakai égbolt csillagai közti könnyebb eligazodás érdekében az emberek már több ezer évvel ezelőtt is az egymáshoz közel látszó, fényesebb csillagokat emberi vagy isteni lények, állatok vagy tárgyak képével azonosították. Egy-egy ilyen, égen látható csillagcsoportot az oda gondolt alakzattal együtt csillagképnek hívtak. Feladatunk a ma használatos, modern és hivatalosan elfogadott 88 csillagkép adatainak feldolgozása adatbázis-kezelő program segítségével.

Az adatok a `csillagkephely.txt` és `szomszedoscs.txt` állományokban állnak rendelkezésünkre. Az állományok tabulátorral tagolt, UTF-8 kódolású szövegfájlok, az első sorok a mezőneveket tartalmazzák.

1. Készítsünk új adatbázist `csillagkepek` néven. A mellékelt adatállományokat importáljuk az adatbázisba a fájlnévvel azonos nevű táblákba. Beolvasáskor állítsuk be a megfelelő típusokat és kulcsokat. A második táblánál hozzunk létre kulcsot.

Táblák:

csillagkephely (cskhely, csknev, latinnev, nterulet, szterulet, tlateszaktol, tlatdelig, legfenyescs)

cskhely	az adott csillagkép azonosítója (szám), ez a kulcs;
csknev	az adott csillagkép magyar neve (szöveg);
latinnev	az adott csillagkép latin neve (szöveg);
nterulet	az adott csillagkép területe négyzetfokban megadva (szám);
szterulet	az adott csillagkép területe hány százaléka az égbolt területének (szám);
tlateszaktol	megadja, hogy az adott csillagkép hányadik foktól látható teljes egészében az északi féltekén (szám);
tlatdelig	megadja, hogy az adott csillagkép hányadik fokig látható teljes egészében a déli féltekén (szám);
legfenyescs	az adott csillagképben látható legfényesebb csillag fényessége magnitúdóban kifejezve (szám).

szomszedoscs (cskhely, szomszedoshely)

cskhely	az adott csillagkép azonosítója (megegyezik a csillagkephely táblában szereplő azonosítóval) (szám);
szomszedoshely	a cskhely azonosítójú csillagképpel szomszédos csillagkép azonosítója (szám).

Készítsük el a következő feladatok megoldásait. Az egyes lekérdezéseknél ügyeljünk arra, hogy mindig csak a kért értékek jelenjenek meg és más adatok ne. Megoldásainkat a zárójelben lévő néven mentsük el.

2. Bővítsük az adatbázisunkat a 88. *Dél Keresztje* csillagképpel és adataival. A hiányzó adatok megtalálhatók a feladat forrását képező weboldalon*.
3. Módosítsuk az szterulet megjelenési formátumát úgy, hogy az a százalékjellel együtt százalék formátumban jelenjen meg.
4. Adjuk meg annak a csillagképnek a nevét, amelynek a legtöbb szomszédos csillagképe szerepel az adatbázisban. Írassuk ki azt is, hogy hány szomszédja van. Ha több azonos számú is van, jelenítsük meg mindegyiket. (4szomszed)
5. Adjuk meg, hogy mekkora területet fednek le a csillagképek összesen. Az eredményt függvény segítségével kerekítsük egészre. (5egnagysag)
6. Melyek azok a csillagképek, amelyekben van a Vízöntő legfényesebb csillagánál fényesebb csillag? Jelenjen meg a csillagkép neve és a benne található legfényesebb csillag magnitúdója. A magnitúdó kisebb értéke jelenti a nagyobb fényességet. (6fenyes)
7. Határozzuk meg, melyik három csillagkép látható a legnagyobb tartományban. Adjuk meg a csillagkép latin nevét és a teljes láthatóság szögtartományának nagyságát. (7fok)
8. Számoljuk össze, hány csillagkép nevében szerepel az „északi" előtag. (8eszaki)

*A feladat forrása: `https://hu.wikipedia.org/wiki/Csillagképek_méret_szerinti_listája` (utolsó letöltés: 2017. 11. 12.).

9. Vizsgáljuk meg, hogy a „Déli hal" csillagkép – nevéhez hűen – valóban nagyobb szögtartományban látható-e a déli féltekén azoknál a csillagképeknél, amelyek nevében szerepel a „hal", de nem szerepel a „déli" szórészlet. Válaszként jelenítsük meg a „Déli hal" csillagkép déli féltekén való láthatósága és az összes többi „hal" csillagkép déli féltekén lévő átlagos láthatóságának különbségét. (9tobbe)
10. Készítsünk lekérdezéssel új táblát „allatok" néven, melybe kigyűjtjük az állatöv 12 csillagképének (Kos, Bika, Ikrek, Rák, Oroszlán, Szűz, Mérleg, Skorpió, Nyilas, Bak, Vízöntő, Halak) legfontosabb adatait: a csillagkép azonosítóját, magyar és latin nevét, a területét és a szomszédos csillagképek számát. (10allatok)

Beküldendő egy tömörített `i458.zip` állományban az adatbázis, valamint egy rövid dokumentáció, amelyből kiderül az alkalmazott adatbázis-kezelő neve és verziószáma.

I. 459. A kenguru nyelvben csak a K, E és N betűket használják. Egyetlen egybetűs értelmes szó van, az E. A két- vagy több-betűs szavak közül azok értelmesek a kenguru nyelvben, amelyek tartalmaznak E betűt, és az utolsó betűjüket elhagyva olyan szót kapunk, amely nem értelmes a kenguru nyelvben.

Írjunk programot, amely elállítja az X betűből ($1 \leqslant X \leqslant 12$) álló értelmes szavakat a kenguru nyelvben.

Beküldendő egy `i459.zip` tömörített mappában a program forráskódja és rövid dokumentációja, amely tartalmazza a megoldás rövid leírását, és megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

I/S. 27. Egy ország N városa között autóbuszjáratok közlekednek, melyeknek ismerjük a menetrendjét. A városokat pozitív egész számokkal jelöljük. Az 1-es városból szeretnénk eljutni az N-es városba autóbuszok segítségével. Minden járat két város között közlekedik, az egyes járatok azonos időközönként követik egymást. Tudjuk minden járatról a napi első indulási időpontot és a járat menetidejét. A járatok utolsó indulási ideje 20:00, később már nem indulnak autóbuszok. Az alábbi példa első járata az 1-es várostól a 4-es városig közlekedik, az út 80 percig tart, az első járat 7:00-kor indul (a nap 420. percében), majd minden következő 200 perccel az előző után, és így az utolsó 17:00-kor.

Átszálláskor legkorábban a megérkezés után legalább 10 perccel később induló buszokat érjük el biztonságosan. Minden városban van szálloda, így nem jelent gondot valamelyikben megszállni éjszakára. Számítsuk ki, hogy legkevesebb hány percig tart eljutni az induló városból a cél városba, illetve adjuk meg, hogy mely városokat érintünk egy ilyen utazás során. Ha több megoldás is lehetséges, akkor elég egyet megadni. A menetrend csak az eljutás szempontjából fontos járatokat tartalmazza, nem az összes járatot, de az 1-es városból biztosan el lehet jutni buszokkal az N-es városba.

A program a standard bemenet első sorából olvassa be a városok N számát, majd a következő N sorból a járatok induló és cél városát, a menetidőt, a nap első járatának indulási idejét 0:00-tól számítva, illetve az egymást követő buszok indulása közötti eltérés idejét percben. A program írja a standard kimenet első sorába a legrövidebb eljutás idejét percben, majd a következő sorba az egy ilyen időtartamú út során érintett városokat sorrendben.

Példa:

Bemenet (a / sortörést jelöl):	Kimenet

`7 / 1 4 80 420 200 / 1 3 125 380 240 / 4 2 220 340 90`
`2 5 110 360 65 / 2 3 70 320 80 / 3 6 180 510 180`
`3 5 60 430 95 / 5 6 40 420 60 / 6 7 100 390 120`
`5 7 160 440 180`
	`400`
	`1 3 5 7`

Korlátok: $4 \leqslant N \leqslant 100$, a menetidők nem hosszabbak 10 óránál.

Értékelés: a megoldás lényegét leíró dokumentáció 1 pontot ér. További 9 pont kapható arra a programra, amely a korlátoknak megfelelő bemenetekre helyes kimenetet ad 1 másodperc futásidő alatt. Részpontszám kapható arra a programra, amely csak kisebb N értékek esetén ad helyes eredményt 1 másodpercen belül.

Beküldendő egy `is27.zip` tömörített állományban a megoldást leíró dokumentáció és a program forráskódja.

S. 126. Általánosítsuk az idén februárban kitűzött **C. 1466.** feladatot. Egy bizottság összesen A alkalommal ülésezett. A tagok közül minden ülésen pontosan S személy vett részt, de bármely két tag legföljebb egyszer volt együtt jelen. Legalább hány tagból áll a bizottság?

A program a standard bemenet első sorából olvassa be az ülések A számát és az egy ülésen résztvevő személyek S számát. A program írja a standard kimenet első sorába, hogy legkevesebb hány tagból áll a bizottság.

Példa:

Bemenet	Kimenet
`4 3`	`6`

Korlátok: $3 \leqslant S \leqslant 10$, $3 \leqslant A \leqslant 12$.

Értékelés: a megoldás lényegét leíró dokumentáció 1 pontot ér. További 9 pont kapható arra a programra, amely a korlátoknak megfelelő bemenetekre helyes kimenetet ad 1 másodperc futásidő alatt. Részpontszám kapható arra a programra, amely csak kisebb bemeneti értékek esetén ad helyes eredményt 1 másodpercen belül.

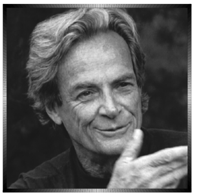
Beküldendő egy `s126.zip` tömörített állományban a megoldást leíró dokumentáció és a program forráskódja.

❄

A feladatok megoldásai regisztráció után a következő címen tölthetők fel:
`https://www.komal.hu/munkafuzet`
Beküldési határidő: 2018. június 10.

❄

Feynman professzor a matematika és a fizika kapcsolatáról



2018. május 11-én van Richard P. Feynman születésének százéves évfordulója.

Ebből az alkalomból közlünk részleteket az egyik olyan előadásból, melyet Feynman professzor 1964-ben, Nobel-díjjal történt kitüntetése előtt egy évvel tartott a Cornell Egyetemen. Az akkor már nemzetközi hírű fizikaprofesszor azok számára tartotta előadásait, akik – mint a felkéréskor megfogalmazták – szerették volna jobban megismerni a fizikai törvények jellegét. Ezzel a címmel – The Caracter of Physical Law – 1965-ben könyvben is hozzáférhetővé váltak az előadások, s e könyv Gajzágó Éva fordításában 1983-ban magyarul is megjelent.* Most ebből a könyvből idézünk, abból a fejezetből, melyben a matematika és a fizika kapcsolatáról beszélt a professzor.

„… Be fogom mutatni a gravitáció törvényét három eltérő megfogalmazásban, amelyek – bár teljesen egyenértékűek – mégis egészen másképpen hangzanak.

Az első állítás az, hogy a tárgyak között olyan erő hat, melyet a már ismert

$$F = G \cdot \frac{m \cdot m'}{r^2}$$

összefüggés ad meg. Ennek az erőnek a hatására minden tárgy gyorsul, vagyis meghatározott módon változtatja mozgását. Ez a törvény szokásos megfogalmazási módja, s a továbbiakban ezt nevezem majd Newton-törvénynek. A törvénynek ez a megfogalmazása azt mondja, hogy az erő egy véges távolságban lévő valamitől függ. Azt mondjuk: a törvény nem lokális jellegű, mivel egy tárgyra ható erő nagysága attól függ, hogy egy másik tárgy hol van.

Sokan nem szívlelik a távolhatás gondolatát. Honnan tudja egy itt lévő tárgy, hogy mi történik amott? Nos, van a törvény megfogalmazásának egy másik módja is, ami meglehetősen elvont, az úgynevezett „mezőelmélet". Ezt meglehetősen nehéz elmagyarázni, ezért inkább csak hozzávetőlegesen vázolom a lényegét. Itt ugyanis valami egészen másról van szó. A tér minden egyes pontjához egy-egy számot rendelünk (tudom, ez csak egy szám, s nem valamiféle mechanizmus; épp ez a baj a fizikával, hogy csak matematikailag tudjuk leírni!), és ez a szám helyről helyre változik. Ha a tér valamely pontjába egy tárgyat helyezünk, az arra ható erő abba az irányba mutat, amelyik irányban ez a szám a leggyorsabban változik. (Meg is adom ennek a számnak a szokásos elnevezését, ez a potenciál, és az erő a potenciál leggyorsabb változásának irányába mutat.) Továbbá, az erő nagysága azzal arányos, hogy mozgás közben milyen mértékű potenciálváltozást érzékelünk. Ez az állítás egyik része, de ez még nem elég, mert meg kell mondanom, hogyan határozható meg a potenciál megváltozásának nagysága. Mondhatnám, hogy a potenciál a tárgyaktól mért távolság reciproka szerint változik, de ez nem volna más, mint visszatérés az előbbi távolhatás elmélethez.

*Richard Feynman: *A fizikai törvények jellege,* Magvető Kiadó (Budapest, 1983).

A törvény másképp is megfogalmazható. Egy kicsiny gömb esetén a potenciál a külső viszonyok ismerete nélkül is meghatározható. Ha meg akarjuk határozni a potenciált e kicsiny gömb középpontjában, ehhez ismernünk kell a potenciál értékét a gömb felületén. Vagyis nem kell messzebbre tekintenünk, csupán a kérdéses pont egy parányi környezetében kell ismernünk a potenciál értékét, továbbá azt kell még tudnunk, hogy e kicsiny gömb belsejében összesen mekkora tömeg található. Ha mindezt ismerjük, a szabály a következő: a potenciál a középpontban egyenlő az átlagos potenciál a gömb felületén, mínusz a G gravitációs állandó osztva a kis gömb sugarának (amit a-val jelölök) kétszeresével, és szorozva a kicsiny gömb belsejében lévő tömeggel:

$$\textit{Potenciál a középpontban} =$$
$$= \textit{átlagos potenciál a felületen, mínusz } \frac{G}{2a}\textit{-szor a belül lévő tömeg.}$$

Láthatjuk, hogy ez a törvény különbözik az előbbitől, mivel azt, hogy mi történik egy adott pontban, annak függvényében adja meg, hogy mi történik e pont közvetlen környezetében. Newton törvénye megadja az események leírását egy adott időpontban, feltéve, hogy tudjuk, mi történt a megelőző időpillanatban. Vagyis időben pillanatról pillanatra adja meg a változást, de térben helyről helyre ugrik. A második megfogalmazás viszont mind térben, mind időben lokális, a potenciál változása csak közvetlen környezetétől függ. A két állítás azonban matematikailag egyenértékű."

Itt álljunk meg egy pillanatra. Feynman professzor e második meghatározásában jól látható az elektrodinamika egyik súlyos problémája: a végtelen megjelenése a képletekben, most éppen a potenciál megadott képletében. Ha ugyanis a ponttöltés absztrakciójára gondolunk, ahol is $a = 0$, a potenciál végtelenné válik. A kvantumelektrodinamika (QED) kidolgozásakor éppen az volt az egyik nehézség, hogy olyan elméletet kellett alkotni, ahol a végtelenek nem okozhatnak már gondot. De figyeljünk tovább a professzorra, hogyan rukkol ki a harmadik meghatározással. Nem titok: ez illeszkedik legjobban a QED általa felállított elméletéhez.

„Létezik még egy, az előbbiektől merőben különböző megfogalmazás is, amely az előbbiektől mind filozófiailag, mind meggondolásainak jellegében eltér. Akik a távolhatás gondolatától idegenkednek, azoknak mutattam be a törvény egy olyan megfogalmazását, amely megszabadul ettől a nehézségtől. Most egy olyan megfogalmazást szeretnék ismertetni, amely filozófiailag ennek pontosan az ellenkezője. Itt már szó sincs arról, hogy a dolog hogyan változik helyről helyre, az egész leírás egy átfogó állításban fejeződik ki, a következőképpen: Ha van egy több részecskéből álló rendszerünk, és azt akarjuk megtudni, hogy ezek valamelyike hogyan jut el egyik helyről a másikra, azt úgy kaphatjuk meg, hogy tanulmányozzuk a részecske olyan lehetséges mozgásait, amelyekkel az egy meghatározott idő alatt juthat el a tér egyik pontjából egy másikba … Fölveszünk különféle görbéket, s valamennyi görbéhez kiszámítunk egy bizonyos mennyiséget. (Nem akarom itt elmondani, hogy mi ez a mennyiség, de azok számára, akik már hallottak róla, megemlítem, hogy ez a kinetikus és a potenciális energia különbségének a pályára vonatkozó átlaga.) Ha ezt a mennyiséget különböző pályákra kiszámítjuk, mindegyik pályára más és más számot kapunk. Lesz ezek között a számok között egy legkisebb érték, és éppen az ehhez tartozó pálya lesz

az, amelyen a részecske a valóságban mozogni fog, vagyis a részecske pályáját, pl. egy ellipszist, most egy – a teljes görbére vonatkozó – állítással fejeztük ki. Elvesztettük a kauzalitás ideáját, mely szerint a részecske a vonzást érzi, és annak hatására mozog. Helyébe egy olyan elképzelést állítottunk, mely szerint a részecske mintegy „végigszaglássza" valamennyi lehetséges pályát, majd kiválasztja a neki leginkább tetszőt (azt, amelyre az általunk kiszámított mennyiség a legkisebb értéket veszi fel)."

Ezután Feynman professzor azt hangsúlyozza, hogy mivel a három megközelítés matematikailag ekvivalens, ezért nincs mód arra, hogy kísérletek segítségével tegyünk különbséget közöttük. Más a helyzet azonban, ha valamilyen új jelenségkörben szeretnénk az arra érvényes törvényeket felállítani. Melyik terjeszthető ki az új jelenségkörre is? Felteszi a kérdést: „Mennyire lehetnek segítségünkre új törvények felismerésében?" Majd így folytatja:

„Mindaddig, amíg a fizika nem tekinthető teljesnek, és új törvényeket keresünk, a különböző megfogalmazások kulcsot adhatnak ahhoz, hogy mi történhet más körülmények között. És ekkor már pszichológiai értelemben nem egyenértékűek, mivel más és más feltevéseket sugalmazhatnak azzal kapcsolatban, hogy milyenek lehetnek a jelenségek egy szélesebb körére érvényes törvények. Hogy egy példát említsek: Einstein felismerte, hogy az elektromos *jelek nem terjedhetnek a fénynél sebesebben. Ezt általánosította, és feltételezte, hogy ez egy általános érvényű elv. … Ezzel szemben mind a térelmélet, mind a minimumelv továbbra is érvényes, szép és egyszerű marad. … Feltételezte, hogy állítása mindenre érvényes, így többek között a gravitációra is. Ha semmiféle jel sebessége nem haladhatja meg a fényét, akkor az idő nélkül terjedő erőhatás képét nem fogadhatjuk el. Így Einstein általánosított gravitációs elméletében Newton módszere alkalmatlan a fizikai jelenségek leírására, és hozzá még meglehetősen nehézkes is. … "*

Előadása vége felé Feynman professzor külön is kitért a matematikusok és a fizikusok eltérő munkamódszerére, amelyet kutatásaik közben alkalmaznak. Többek között ezt a példát hozta:

„A matematikusok szeretik tételeiket olyan általánosan megfogalmazni, amennyire csak lehetséges. Ha például azt mondom nekik: »A közönséges háromdimenziós térről akarok valamit megtudni«, ők így válaszolnak: »Itt vannak az n dimenziós terekre vonatkozó tételek.« »Igen, de engem csak a háromdimenziós eset érdekel.« »Rendben van, helyettesítse be az $n = 3$-at.« És akkor kiderül, hogy sok nagyon bonyolult matematikai tétel, egy meghatározott speciális esetben jóval egyszerűbb alakot ölt. A fizikus mindig egy meghatározott esettel foglalkozik, sosem érdeklik az általánosságok. Mindig valamiről beszél, nem pedig egy elvont akármiről. Például le akarja írni a gravitációs törvényt három dimenzióban, nem érdekli egy tetszőleges erőhatás n dimenzióban. Vagyis az általánosságot mindig egy kicsit mérsékelni kell, mert a matematikusok túl széles érvényességi körrel dolgozták ki állításaikat. De az általánosság azért hasznos is, mert gyakran előfordul, hogy szegény fizikus kénytelen visszasomfordálni és megkérdezni: »Elnézést uraim, talán mégis mondhatnának nekem valamit a négydimenziós esetről is …« "

Végül pedig ezekkel a szavakkal zárta az előadást:

„Összegezve, Jeans szavait idézném, aki azt mondta: »Úgy tűnik, a Nagy Építőmester matematikus volt«. És ezért nehéz a természet valódi, legmélyebb szépségeinek átérzését megosztani olyanokkal, akik nem beszélik elég jól a matematika nyelvét. C. P. Snow »két kultúráról« beszélt. Én azt gondolom, hogy a kétféle kultúrához aszerint sorolhatók az emberek, hogy képesek-e a matematikát olyan fokon megérteni, hogy a természet efféle szépségeit érzékelni tudják."

A két kultúra Magyarországon is kedvelt vitatéma volt azokban az években, amikor Feynman professzor úgy érezte, szükséges állást foglalnia a témában. Szimbolikus, hogy könyve itthon a „Gyorsuló idő" sorozatban jelent meg, abban a sorozatban, melynek címe Marx professzornak a két kultúra vitában megjelent írását örökítette tovább.

Radnai Gyula

Megoldásvázlatok a 2018/4. szám emelt szintű fizika gyakorló feladatsorához

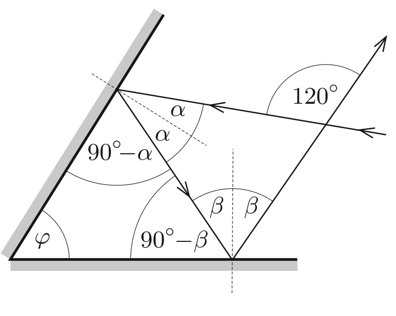
Tesztfeladatok

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
B	A	A	C	C	A	C	D	A	D	B	B	D	B	C

Számolásos feladatok

1. A kilépő röntgenfoton energiáját a fékeződő elektrontól kapja. A legkisebb hullámhosszú foton frekvenciája a legnagyobb, ekkor az elektron teljes mozgási energiája a foton energiáját adja. Az elektron mozgási energiáját az elektromos mező eU munkája révén nyeri. Tehát $eU = hf$. Felhasználva a foton frekvenciája és hullámhossza közötti $c = f\lambda$ összefüggést, megkapjuk a legkisebb hullámhossz értékét:

$$\lambda = \frac{hc}{Ue} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J\,s} \cdot 3 \cdot 10^{8}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{10^{5}\ \mathrm{V} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}} = 1{,}24\ \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m}.$$



2. *a*) Az *ábra* alapján

$$2\alpha + 2\beta = 120^\circ \qquad \text{és} \qquad \varphi = \alpha + \beta,$$

vagyis $\varphi = 60^\circ$.

b) Hasonló meggondolások alapján $\varphi = 90^\circ$.

3. *a*) ${}^{222}_{86}\mathrm{Rn} \to {}^{4}_{2}\alpha + {}^{218}_{84}\mathrm{X}$. Az X elem (mint az a periódusos rendszerből kinézhető) a *polónium, Marie Curie* és *Pierre Curie* fedezték fel, és Lengyelországról nevezték el.

b) Ha 88,6% elbomlik, akkor marad 11,4%. A bomlástörvény alapján:

$$0{,}114\,N = n \cdot 2^{-\frac{t}{3{,}83\,\mathrm{nap}}}.$$

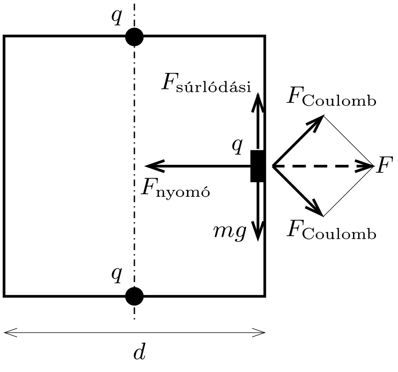
Ebből megkapjuk, hogy 12 nap alatt bomlik el a radongáz 88,6%-a.

c) Az α-részecske mozgási energiája:

$$5{,}486 \cdot 10^{6} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J} = 8{,}777 \cdot 10^{-13}\ \mathrm{J} = \frac{1}{2}mv^2.$$

Ebből az α-részecske sebessége $1{,}62 \cdot 10^{7}$ m/s. Az impulzus megmaradás alapján $m_\alpha v_\alpha = m_{\mathrm{Po}} v_{\mathrm{Po}}$. Mivel a polónium izotóp tömegszáma, így tömege is kb. 54,5-szerese az α-részecske tömegének, sebessége ugyanannyiad része az α-részecske sebességének, mintegy $3{,}0 \cdot 10^{5}$ m/s nagyságú.

4. *a*) A töltött test egyensúlyban van, mert a rá ható erők eredője zérus. A töltésre hat a nehézségi erő (mg), a henger falának nyomóereje ($F_{\text{nyomó}}$), a rögzített töltések taszítóereje (F_{Coulomb}), a henger fala által kifejtett tapadási súrlódási erő ($F_{\text{súrlódási}}$) az *ábrán* látható módon.



Az egyensúly feltételéből adódó egyenletek:

$$mg = F_{\text{súrlódási}} \qquad \text{és} \qquad F_{\text{nyomó}} = F,$$

ahol F a két Coulomb-erő eredője. Kihasználva, hogy a súrlódási erő maximális értéke

$$F^{(\max)}_{\text{súrlódási}} = \mu_0 F_{\text{nyomó}},$$

az alábbi egyenleteket kapjuk:

$$m^{(\max)} g = \mu_0 F_{\text{Coulomb}}\sqrt{2}, \qquad \text{ahol} \qquad F_{\text{Coulomb}} = k\frac{q^2}{\left(\frac{d}{\sqrt{2}}\right)^2}.$$

Behelyettesítve a megadott értékeket a maximális tömegre kb. 6,5 gramm adódik.

b) A töltött test most egyenletes körmozgást végez, tehát az eredő erő a kör közepe felé mutató

$$F_{\text{nyomó}} - F = m\left(\frac{d}{2}\right)(2\pi n)^2.$$

Felhasználva, hogy

$$m^{(\max)} g = F^{(\max)}_{\text{súrlódási}} = \mu_0 F_{\text{nyomó}},$$

és

$$F_{\text{nyomó}} = \sqrt{2}k\frac{q^2}{\left(\frac{d}{\sqrt{2}}\right)^2} + m^{(\max)}\left(\frac{d}{2}\right)(2\pi n)^2,$$

majd behelyettesítve a megadott értékeket a maximális tömegre ebben az esetben

$$m^{(\max)} = \frac{\sqrt{2}k\frac{q^2}{\left(\frac{d}{\sqrt{2}}\right)^2}}{\frac{g}{\mu_0} + \left(\frac{d}{2}\right)(2\pi n)^2} \approx 8{,}4\ \text{g}$$

adódik.

Varga Balázs
Göd

Mérési feladat megoldása

M. 374. *Mérjük meg valamilyen fajta méz optikai törésmutatóját!*

(*6 pont*) Közli: *Gnädig Péter,* Vácduka

Megoldás.

A méréshez felhasznált eszközök

– Akácméz, ennek az optikai törésmutatóját mértem;
– egy lézer, fényforrásként;
– egy nagyon keskeny „tartály” (mézet öntöttem bele);
– szögmérő (a beesési és a kilépési szögeket mértem);
– hősugárzó (a méz melegítése);
– hőmérő (a méz hőmérsékletének mérésére).

A mérés helye

A mérést az iskolában végeztem el, és az iskolai eszközöket (iskolai optikai szett, hősugárzó, lézer, edény, szögmérő) használtam, a mézet pedig én hoztam.

A mérés elve

Amennyiben egy közeghatárhoz (jelen esetben levegő–méz) α beesési szögben érkezik meg a fény az n_1 optikai törésmutatójú közegben (jelen esetben levegő, $n_1 \approx 1$) és β „kilépési szöggel” lép be a másik, n optikai törésmutatójú közegbe (jelen esetben a mézbe), akkor a Snellius–Descartes törvény alapján

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n}{n_1} = n.$$

A mért szögekből a törésmutató kiszámítható.

Kivitelezés

Először az igen vékony tartályt körülbelül félig megtöltöttem mézzel, majd belehelyeztem a kör alakú szögmérőt úgy, hogy a középpontja épp a méz szintjének felső határára (a méz felszínére) essék. Ezután a tartályt a mágnestáblához „ragasztottam", ugyanezt tettem a lézerrel. Ezt követően a lézer által kibocsátott (vörös) fény irányát beállítottam úgy, hogy épp a szögmérő középpontja felé induljon el a fény. Az α és β szöget a szögmérővel közvetlenül meg tudjuk mérni, ezekből pedig a méz n törésmutatója is könnyen meghatározható.

Természetesen több α szögnél is végeztem méréseket, sőt több különböző hőmérsékleten (jóllehet ezt nem kérte a feladat szövege). A törésmutató ugyanis, ha kevéssé is (amit mérésem is igazolt), hőmérsékletfüggő. Először szobahőmérsékleten mértem, majd ezt követően hősugárzóval melegítettem a mézet, hőmérőt helyeztem bele, és megmértem a méz új hőmérsékletét, majd gyorsan elvégeztem az ehhez a hőmérséklethez tartozó méréseket. Ezután folytattam a melegítést ...

Mérési eredmények

Ötféle hőmérsékleten végeztem méréseket, $\alpha = 0, 20, 30, \ldots, 80°$-nál mértem meg β értékét, a kapott eredményeket táblázatba foglaltam. (A mérési adatok táblázatát és a dolgozathoz mellékelt fényképeket terjedelmi okokból nem közöljük. – A Szerk.)

Először $\sin\alpha$–$\sin\beta$ grafikont akartam készíteni (ennek meredekségeként elvileg a törésmutatót kaptam volna meg), viszont ez túl pontatlannak tűnt. Így minden egyes méréshez kiszámoltam a hozzá tartozó n értéket, és egy adott hőmérsékleten a különböző szögeknél kapott n-eket átlagoltam. (Az $\alpha = 10°$-os szöghöz tartozó számot kihagytam az átlagolásból, mert akkor β mérése nagyon pontatlan volt.) Így kaptam meg a végeredményt, amely szerint az akácméz optikai törésmutatója: $n = 1{,}49 \approx 1{,}50$.

A törésmutató hőmérsékletfüggése igen csekély volt, ezt tehát nem tudtam megbízhatóan kimutatni. Bár a törésmutatók átlagára különböző értékeket is kaptam, ezt az átlagtól erősen eltérő 2-3 mérési eredmény okozhatta. Valószínűsíthető, hogy az akácméz (és általában a folyadékok) törésmutatója a hőmérséklet növekedésével csökken, de ez nem következik a méréseimből.

Hibaforrások

1. A szögmérés pontossága. A szögmérőn 5 fokonként vannak a beosztások, ez alapján az α és β szöget is kb. $\Delta\varphi = 2{,}3°$-os pontossággal lehetett meghatározni (aszerint, hogy a be- és kilépő lézernyaláb éppen egy beosztásra, vagy inkább két beosztás közé esik).

2. A méz szintjének pontossága. Amennyiben a szögmérő középpontja nem épp a mézszint tetejére esik, akkor a fénytörés sem a méz középpontjában következik be, következésképp a mért szögek nem egyeznek meg pontosan a kívánt α és β értékekkel. A szögmérőt minden mérés után megigazítottam, így ezt a hibaforrást kb. $\Delta h = 1$ mm-re tudtam csökkenteni. (A szögmérő sugara kb. 5 cm volt.)

3. A lézersugár esetleg nem a szögmérő síkjában vagy ezzel „párhuzamosan" (vízszintesen eltolva), hanem valahogyan „ferdén" esik be. Mivel vékony az edény, ezzel a hibalehetőséggel nem kell foglalkozni.

4. A hőmérséklet mérése. Ennek az adatnak a pontossága nem igazán fontos, elég csak körülbelüli értékét tudni. A szobahőmérséklet mérése $\pm 0{,}1\,^\circ\mathrm{C}$ pontosságú (hőmérő pontossága), magasabb hőmérsékleteken kb. $\Delta T = 1{,}5\,^\circ\mathrm{C}$ a hiba (mert a lézerrel való szögmérés során a méz hőmérséklete lassan csökkent, 2-4 fokot).

Hibaszámítás

A fő hibaforrás a szögmérésből származik (bár nagy α szögeknél a mézszint „pontatlansága" is jelentős szerepet játszik).

Foglalkozzunk a szögméréssel: $\Delta\varphi = 4{,}36 \cdot 10^{-2}$ rad (elég kicsi), vagyis a

$$\sin\Delta\varphi \approx \Delta\varphi \qquad \text{és} \qquad \cos\Delta\varphi \approx 1$$

közelítéseket alkalmazhatjuk. Ha a mért szög φ, akkor ezen szög szinuszának abszolút hibája

$$\Delta(\sin\varphi) = \sin(\varphi + \Delta\varphi) - \sin\varphi \approx \cos\varphi \cdot \Delta\varphi = 4{,}36 \cdot 10^{-2} \cdot \cos\varphi,$$

vagyis n (szögmérésből fakadó) pontatlansága

$$\frac{\Delta n}{n} = \frac{\Delta(\sin\alpha)}{\sin\alpha} + \frac{\Delta(\sin\beta)}{\sin\beta} = 4{,}36 \cdot 10^{-2} \cdot (\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta),$$

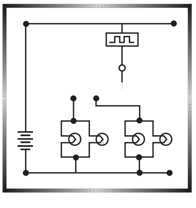
tehát

$$\Delta n \approx 6{,}5 \cdot 10^{-2} \cdot (\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta).$$

Ez főleg kis szögeknél jelentős (pl. $\alpha = 10^\circ$-nál nagyon nagy).

Fajszi Bulcsú (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.)

11 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott 6 megoldás. Hiányos (1–3 pont) 4, nem értékelhető 1 dolgozat.



Fizika gyakorlat megoldása

G. 624. *A Balatonon újonnan létesített vitorláskikötők egy része jégmentes, azaz a bent hagyott hajók körül igen nagy hidegben sem fagy be. Ezt a víz felkeverésével érik el. Miért működik ez a módszer?*

(*3 pont*)

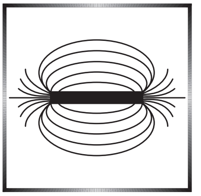
Megoldás. A víz 4 °C-on a legsűrűbb, ezért az állóvizekben – ha csökken a hőmérséklet – a 4 fokos víz a tó fenekére süllyed. Az ennél hidegebb víz felülre (a felszín közelébe) kerül, és ott tovább hűlve általában megfagy. A víz – ha nincsenek benne áramlások – rossz hővezető, a felső (már megfagyott) réteg és az alatta lévő, kicsit melegebb vízréteg között csak lassú a hőcsere, a jégréteg csak lassan „hízik".

Ha a vizet felkavarjuk, akkor a 4 °C-os (tehát a fagypont feletti hőmérsékletű) víz felülre kerül, keveredik az ottani (hidegebb) vízzel, és az egész vízmennyiség együtt hűl, emiatt az egyes részei önmagukban nem tudnak megfagyni. (Természetesen a hosszú ideig tartó, igen hideg teleken egy egész tó is befagyhat, különösen akkor, ha a víz nem túl mély, de szerencsére a Balatonnál ettől nem kell tartani.)

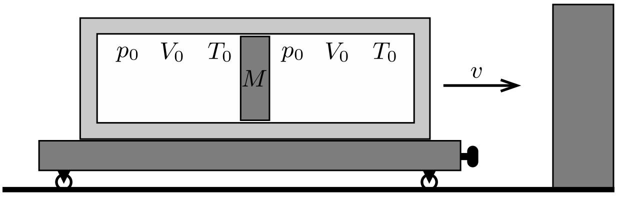
Több dolgozat alapján

52 dolgozat érkezett. Helyes 40 megoldás. Hiányos (1 pont) 10, hibás 2 dolgozat.

Fizika feladatok megoldása



P. 4974. *Targoncához erősített, hőszigetelő hengerben* $M=20$ kg *tömegű, könnyen mozgó, hőszigetelő dugattyú* $V_0=50$ liter *térfogatú,* $T_0=300$ K *hőmérsékletű,* $p_0=10^5$ Pa *nyomású levegőrészeket választ el. A targonca* $v=10$ m/s *sebességgel halad egy fal felé, amellyel tökéletesen rugalmatlanul ütközik. Legfeljebb mekkora hőmérsékletet ér el a fal felőli részben lévő levegő a folyamat során?*



(*5 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest

Megoldás. Amikor a kocsi nekiütközik a falnak, a tartályban lévő dugattyú v kezdősebességgel (az ütközés előtti sebességével) mozog tovább. A bal és a jobb oldali térfélben található levegőrészek – a jó hőszigetelelés miatt – adiabatikusan tágulnak, illetve nyomódnak össze. A fal felőli rekeszben lévő gáz akkor éri el a legmagasabb hőmérsékletét, amikor a térfogata a legkisebb lesz, vagyis amikor a dugattyú éppen megáll.

Jelöljük a levegőrészek térfogatát ebben az állapotban

$$V_1=V_0+\Delta V \qquad \text{és} \qquad V_2=V_0-\Delta V$$

módon, a nyomások pedig legyenek p_1 és p_2. A levegő kb. 99 százalékát kétatomos gáz alkotja, így a levegőmolekulák szabadsági foka $f=5$-nek, a fajhőhányados pedig $\kappa=\frac{f+2}{f}=\frac{7}{5}=1{,}4$-nek vehető.

Az adiabatikus állapotváltozás egyenlete szerint

$$p_1=p_0\frac{V_0^\kappa}{V_1^\kappa}, \qquad \text{illetve} \qquad p_2=p_0\frac{V_0^\kappa}{V_2^\kappa}.$$

A nyomásokkal és a térfogatokkal kifejezhető a levegőrészek belső energiája:

$$E_0 = \frac{f}{2} p_0 V_0, \qquad E_1 = \frac{f}{2} p_1 V_1 \qquad \text{és} \qquad E_2 = \frac{f}{2} p_2 V_2.$$

Felírhatjuk még (az ütközés utáni pillanattól a dugattyú megállásáig) az energiamegmaradás törvényét:

$$2E_0 + \frac{Mv^2}{2} = E_1 + E_2,$$

vagyis

$$\frac{Mv^2}{f p_0 V_0^{\kappa}} + 2V_0^{1-\kappa} = (V_0 + \Delta V)^{1-\kappa} + (V_0 - \Delta V)^{1-\kappa}.$$

Az ismert adatok behelyettesítése után (ha az SI mértékegységeket nem írjuk ki) az alábbi összefüggést kapjuk:

$$(0{,}05 + \Delta V)^{-0{,}4} + (0{,}05 - \Delta V)^{-0{,}4} = 6{,}9.$$

Ezt az egyenletet a szokásos algebrai módszerekkel nem lehet megoldani, ezért közelítő módszerrel próbálkozunk: fokozatosan leszűkítjük azt az intervallumot, amely a keresett ΔV értéket tartalmazza. Mivel $\Delta V = 0{,}01$-nél a fenti egyenlet bal oldala 6,71, $\Delta V = 0{,}02$-nél pedig 6,96, a keresett ΔV valahol 10 és 20 liter között lehet.

Tovább felezve az intervallumok hosszát a következő értékeket kapjuk:

$$\begin{aligned}
\Delta V &= 0{,}01500 &\longrightarrow&\quad 6{,}807;\\
\Delta V &= 0{,}01750 &\longrightarrow&\quad 6{,}877;\\
\Delta V &= 0{,}01875 &\longrightarrow&\quad 6{,}918;\\
\Delta V &= 0{,}01813 &\longrightarrow&\quad 6{,}897;\\
\Delta V &= 0{,}01844 &\longrightarrow&\quad 6{,}908;\\
\Delta V &= 0{,}01828 &\longrightarrow&\quad 6{,}902;\\
\Delta V &= 0{,}01820 &\longrightarrow&\quad 6{,}899;\\
\Delta V &= 0{,}01824 &\longrightarrow&\quad 6{,}901;\\
\Delta V &= 0{,}01822 &\longrightarrow&\quad 6{,}900.
\end{aligned}$$

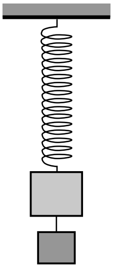
A $\Delta V = 18{,}22$ liter ($0{,}018\,22\ \mathrm{m}^3$) tehát már nagyon jól közelíti a pontos értéket. Ezek szerint $V_2 = V_0 - \Delta V = 31{,}78$ liter, a gáz hőmérséklete pedig (az adiabatikus egyenlet és a gáztörvény alapján)

$$T_2 = T_0 \left(\frac{V_0}{V_2}\right)^{\kappa-1} = 300\ \mathrm{K} \cdot \left(\frac{50}{31{,}78}\right)^{0{,}4} \approx 360\ \mathrm{K} = 87\ {}^\circ\mathrm{C}.$$

Pácsonyi Péter (Zalaegerszegi Zrínyi M. Gimn., 10. évf.)

47 dolgozat érkezett. Helyes 30 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 3, hiányos (2 pont) 12, hibás 2 dolgozat.

P. 4991. *Egy állványon függő csavarrugóra egymás alá két, fonállal összekötött, összesen* 4 kg *tömegű testet erősítettünk az* ábra *szerint. Ha az alsó test leesik, a rugón maradó rezgőmozgásba jön. Ha a két testet felcseréljük, és ezután esik le az alsó test, a felső ismét rezegni fog. A két rezgésidő különbsége* 0,3 s. *Mekkora a két test tömege külön-külön, ha együtt a rugón* 1,5 s *periódusidejű rezgést végeznek?*



(*4 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest

Megoldás. Tudjuk, hogy az összesen $m=4$ kg tömegű két test $T=1{,}5$ s periódusidővel rezeg, tehát

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}.$$

Innen kiszámíthatjuk a rugóállandót:

$$D=\frac{4\pi^2m}{T^2}=70{,}2\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}.$$

Ugyanilyen erősségű rugón az m_1 és $m_2=4\ \mathrm{kg}-m_1$ tömegű testek rezgésideje

$$T_1=2\pi\sqrt{\frac{m_1}{D}}\qquad \text{és}\qquad T_1=2\pi\sqrt{\frac{m_2}{D}},$$

a különbségük pedig

$$2\pi\sqrt{\frac{m_1}{D}}-2\pi\sqrt{\frac{4\ \mathrm{kg}-m_1}{D}}=0{,}3\ \mathrm{s}.$$

Innen (D kiszámított értékét behelyettesítve és az SI mértékegységeket elhagyva) a

$$\sqrt{m_1}-\sqrt{4-m_1}=0{,}4$$

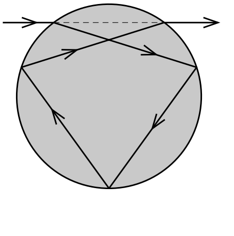
egyenletet kapjuk, amelynek gyökei: 2,56, illetve 1,44.

A két test tömege tehát külön-külön: $m_1=2{,}56$ kg és $m_2=1{,}44$ kg.

Stiga Viktória (Budapest, Német Nemzetiségi Gimn., 11. évf.)
dolgozata alapján

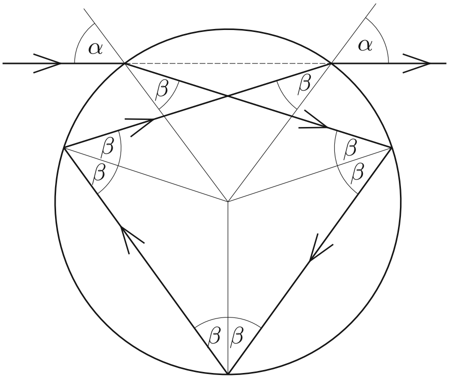
81 dolgozat érkezett. Helyes 70 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 9, hiányos (2 pont) 1, hibás 1 dolgozat.

P. 4998. *Egy gömb alakú vízcseppre érkező fénysugár az* ábrán *látható módon három belső visszaverődés után az eredeti irányban halad tovább. Mekkora beesési szöggel lépett be a fénysugár a vízcseppbe?* (*A víz törésmutatója* $n=4/3$.)



(*5 pont*) Közli: *Cserti József,* Budapest

Megoldás. A fénysugár eltérülése az egyenes iránytól összesen 2π radián (lásd az *ábrát*):



$$2(\alpha-\beta)+3(\pi-2\beta)=2\pi.$$

Innen $\alpha=4\beta-90°$, vagyis

$$\sin\alpha=-\cos(4\beta)$$

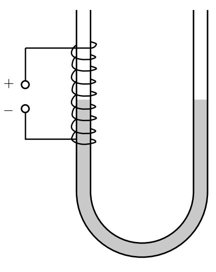
következik. Másrészt (a törési törvény értelmében) fennáll, hogy $\sin\alpha = \frac{4}{3}\sin\beta$, vagyis

$$4\sin\beta+3\cos(4\beta)=0.$$

Ennek az egyenletnek – a feladat szempontjából elfogadható – megoldása $\beta=34{,}95°$, és ennek megfelelően a beesési szög: $\alpha=49{,}8°$.

Schrott Márton (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., 11. évf.)

42 dolgozat érkezett. Helyes 29 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 5, hiányos (1–3 pont) 8 dolgozat.



P. 5000. *Az* ábrán *látható* U-*alakú csőbe vizet töltöttünk. Hogyan és mennyire változik meg a cső két szárában a víz szintje, ha a bal oldali csőszárat szorosan körülvevő N menetes, ℓ hosszúságú tekercsbe I erősségű áramot vezetünk? (A cső átmérője jóval kisebb a tekercs hosszánál. A víz relatív permeabilitása $\mu_{\rm r}$, számértéke* 1*-nél egy nagyon kicsivel kisebb.)*

(Lásd még *Radnai Gyula: Az elektromágnes húzóerejéről* szóló cikket a KöMaL 2000. évi 4. számában és a honlapunkon.)

(*6 pont*) Közli: *Vigh Máté,* Budapest

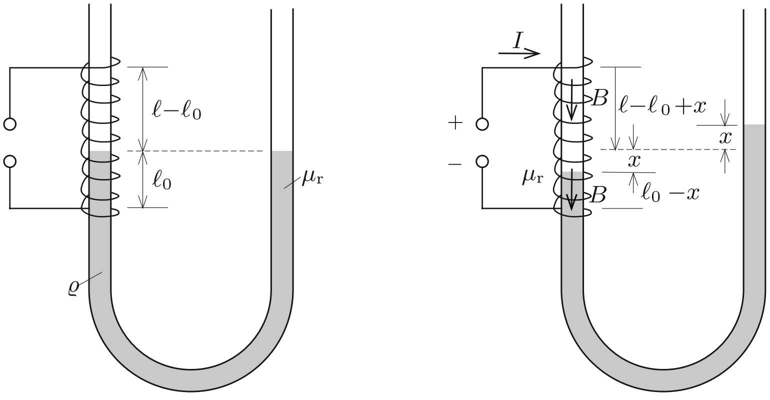
I. megoldás. Jelöljük az *ábrán* látható módon ℓ_0-lal azt a távolságot, amenynyire a víz „belóg” a tekercsbe az áram bekapcsolása előtt, x-szel pedig azt, amennyivel lesüllyed a vízszint a tekercsben az áram bekapcsolása után.

A tekercsben (annak vízzel teli részében is és a levegőt tartalmazó részében is)

$$B(x)=\frac{NI\mu_0\mu_{\rm r}}{(\ell-\ell_0+x)\mu_{\rm r}+(\ell_0-x)}$$

nagyságú mágneses indukció alakul ki (lásd az idézett cikket). Ez az indukció látható módon függ az x távolságtól. A teljes (A keresztmetszetű) tekercsen áthaladó mágneses fluxus:

$$\Phi(x)=NAB(x),$$



ami ugyancsak x függvénye. A fluxus kifejezhető a tekercs önindukciós együtthatójával is:

$$\Phi(x)=L(x)I.$$

Az áramjárta tekercs mágneses energiával rendelkezik, aminek nagysága

$$E_{\text{mágn.}}(x)=\frac{1}{2}LI(x)^2=\frac{1}{2}\Phi I=\frac{1}{2}ANI\cdot B(x), \tag{1}$$

vagyis

$$E_{\text{mágn.}}(x)=\frac{1}{2}\,\frac{N^2I^2A\mu_0\mu_\mathrm{r}}{(\ell-\ell_0+x)\mu_\mathrm{r}+(\ell_0-x)}. \tag{2}$$

A folyadék gravitációs helyzeti energiája (az árammentes állapot azonos vízszintmagasságú állapotához viszonyítva)

$$E_{\text{helyzeti}}=\varrho gAx^2, \tag{3}$$

hiszen $m=\varrho Ax$ tömegű folyadékmennyiség tömegközéppontja x-szel magasabbra került.

Számítsuk most ki, hogy mennyit változna a rendszer mágneses, illetve gravitációs energiája, ha valamilyen ok miatt az x távolság egy kicsiny $\Delta x\ll x$ értékkel növekedne. A (2) képletből közvetlen számolással adódik:

$$\Delta E_{\text{mágn.}}=E_{\text{mágn.}}(x+\Delta x)-E_{\text{mágn.}}(x)=$$

$$=\frac{N^2I^2A\mu_0\mu_\mathrm{r}(1-\mu_\mathrm{r})\Delta x}{2\big[(\ell-\ell_0+x+\Delta x)\mu_\mathrm{r}+(\ell_0-x-\Delta x)\big]\big[(\ell-\ell_0+x)\mu_\mathrm{r}+(\ell_0-x)\big]}\approx$$

$$\approx\frac{N^2I^2A\mu_0(1-\mu_\mathrm{r})\Delta x}{2\ell^2}. \tag{4}$$

(Az utolsó lépésnél kihasználtuk, hogy $\Delta x \ll x$ és $\mu_\mathrm{r} \approx 1$.) Ugyanezt az eredményt a differenciálszámítás alkalmazásával is megkaphatjuk:

$$\Delta E_{\text{mágn.}} \approx \frac{\mathrm{d}E_{\text{mágn.}}(x)}{\mathrm{d}x} \cdot \Delta x.$$

Mivel víznél $\mu_\mathrm{r} < 1$ (a víz *diamágneses*), (4)-ből leolvasható, hogy a vízszint kicsiny lesüllyedésekor (vagyis $\Delta x > 0$ esetén) a rendszer mágneses energiája *növekszik.*

Hasonló módon számíthatjuk ki a (3)-ból, hogy mennyit változna a víz helyzeti energiája, ha a vízszint valamilyen ok miatt egy kicsiny Δx értékkel lesüllyedne:

(5)
$$\begin{aligned}\Delta E_{\text{helyzeti}} &= E_{\text{helyzeti}}(x+\Delta x) - E_{\text{helyzeti}}(x) = \\ &= \varrho g A \Delta x (2x + \Delta x) \approx 2\varrho g A x \cdot \Delta x,\end{aligned}$$

ami így is megkapható:

$$\Delta E_{\text{helyzeti}} \approx \frac{\mathrm{d}E_{\text{helyzeti}}(x)}{\mathrm{d}x} \cdot \Delta x.$$

Látható, hogy $x > 0$ és $\Delta x > 0$ esetén a folyadék helyzeti energiája is *növekszik.*

Vajon mi fedezné a rendszer mágneses és gravitációs helyzeti energiájának megváltozását, ha a vízszint Δx értékkel lesüllyedne? A vízszint elképzelt változásakor a tekercsen áthaladó mágneses fluxus

$$\Delta\Phi = I\Delta L$$

értékkel megváltozik, miközben az áramforrás (áramgenerátor) biztosítja, hogy az I áramerősség változatlan maradjon. A fluxusváltozás feszültséget indukál a tekercsben, emiatt az áramforrás feszültségének is meg kell növekednie

$$U = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

értékkel (ahol Δt az elképzelt változás ideje). Ilyen körülmények között az áramforrás több energiát ad le, mint amennyit korábban (a Joule-hő fedezésére) leadott, a különbség

(6)
$$W = UI\Delta t = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} I \Delta t = I\Delta\Phi.$$

(6) és (1) összevetéséből látszik, hogy $W = 2\Delta E_{\text{mágn.}}$.

Egyensúly esetén az elképzelt (virtuális) vízszintváltozásnál teljesülnie kell a

$$W = \Delta E_{\text{mágn.}} + \Delta E_{\text{helyzeti}}$$

összefüggésnek. Ha a fenti összefüggés nem állna fenn, akkor valamilyen előjelű Δx mellett W nagyobb lenne, mint a rendszer mágneses és gravitációs energiájának megváltozása. A különbség fedezhetné a folyadék mozgási energiáját, és így a folyadék nem maradna egyensúlyban, hanem mozgásba jönne.

Az egyensúly feltétele tehát

$$W = 2\Delta E_{\text{mágn.}} = \Delta E_{\text{mágn.}} + \Delta E_{\text{helyzeti}},$$

ami (4) és (5) felhasználásával így írható:

$$\frac{N^2 I^2 A\mu_0(1-\mu_\mathrm{r})\Delta x}{2\ell^2} = 2\varrho g A x \cdot \Delta x.$$

Innen a vízszint keresett megváltozása az áram hatására:

$$x = \frac{N^2 I^2 \mu_0(1-\mu_\mathrm{r})}{4\ell^2 \varrho g}.$$

Mivel $x > 0$, a víz a tekercs belsejében egy kicsit lesüllyed.

Olosz Adél (Pécs, PTE. Gyak. Ált. Isk., Gimn. és Szakgimn., Óvoda 11. évf.) dolgozata alapján

II. megoldás. A vízszint mágneses mező okozta eltolódását a mágneses indukció nagysága határozza meg, és a vízszint egyensúlyi helyzete nem függ attól, hogy mi hozza létre a mágneses mezőt. Cseréljük fel a feladatban szereplő tekercset egy ugyanolyan geometriájú, rövidre zárt szupravezető tekerccsel, amiben ugyancsak I erősségű áram folyik az egyensúlyi állapotban. Ez a rendszer energetikailag zárt (hiszen nem kapcsolódik külső áramforráshoz), ezért az egyensúlyi állapotát az összes (mágneses + gravitációs) energia minimuma határozza meg.

A folyadék gravitációs helyzeti energiája (az I. megoldás jelöléseit használva)

$$E_{\text{helyzeti}}(x) = \varrho g A x^2.$$

A tekercs belsejében

$$B = \mu_0 \frac{NI}{\ell} \tag{7}$$

indukciójú mágneses mező van, hiszen mind a levegő, mind pedig a víz relatív permeabilitása jó közelítéssel 1-nek tekinthető. A mágneses tér energiája az energiasűrűség $B^2/(2\mu_0\mu_\mathrm{r})$ képletből számolható. Mivel a tekercs $\ell_0 - x$ hosszú részét víz, $\ell - \ell_0 + x$ hosszú részét pedig levegő tölti ki, a mágneses energia:

$$E_{\text{mágn.}}(x) = \frac{B^2 A}{2\mu_0}\left(\frac{\ell_0 - x}{\mu_\mathrm{r}^{(\text{víz})}} + \frac{\ell - \ell_0 + x}{\mu_\mathrm{r}^{(\text{levegő})}}\right).$$

Ebben a kifejezésben B a (7) összefüggéssel megadott mágneses indukció, ami szupravezető tekercs esetében (a mágneses fluxus állandósága miatt) nem függ x-től.

A rendszer teljes energiája

$$E(x) = E_{\text{helyzeti}}(x) + E_{\text{mágn.}}(x) = \varrho g A x^2 + \mu_0 \frac{N^2 I^2 A}{2\ell^2}\left(\frac{\ell_0 - x}{\mu_\mathrm{r}^{(\text{víz})}} + \frac{\ell - \ell_0 + x}{\mu_\mathrm{r}^{(\text{levegő})}}\right).$$

Ez x-ben másodfokú kifejezés, aminek minimumát pl. teljes négyzetté alakítással, a parabola tulajdonságainak felhasználásával, esetleg deriválással határozhatjuk meg:

$$x=\mu_0\frac{N^2I^2\left(\mu_{\rm r}^{(\text{levegő})}-\mu_{\rm r}^{(\text{víz})}\right)}{4\ell^2\varrho g\mu_{\rm r}^{(\text{víz})}\mu_{\rm r}^{(\text{levegő})}}\approx\mu_0\frac{N^2I^2(1-\mu_{\rm r})}{4\ell^2\varrho g},$$

ahol $\mu_{\rm r}=0{,}999\,992$ a víz relatív permeabilitása, a levegő $1{,}000\,000\,36$ értékű relatív permeabilitását pedig 1-gyel helyettesítettük.

Elek Péter (Debreceni Ref. Koll. Dóczy Gimn. 11. évf.)
dolgozata alapján

11 dolgozat érkezett. Helyes Elek Péter és Olosz Adél megoldása. Kicsit hiányos (5 pont) 5, hiányos (3–4 pont) 3, hibás 1 dolgozat.

P. 5008. *Egy egyatomos gázt oly módon melegítünk, hogy a folyamat során a mólhője a gázállandó (R) legyen. Hányszorosára változik a gáz térfogata, ha a hőmérséklete a kétszeresére nő?*

(*5 pont*) *Példatári feladat*

Megoldás. Az állandó mólhőjű folyamatok az úgynevezett *politropikus folyamatok,* amelyek a

$$pV^n=\text{állandó}$$

egyenlettel jellemezhetők (n a politropikus kitevő). (Ezen folyamatok közé tartoznak az izobár, az izochor, az izotermikus és az adiabatikus állapotváltozások is.)

A politropikus fajhő a

$$c_n=c_V\cdot\frac{n-\kappa}{n-1}$$

képlet alapján számítható (lásd pl. a `http://www.sulinet.hu/tovabbtan/felveteli/ttkuj/fizika/hotan/hotan.htm` honlapon), és ugyanilyen összefüggés érvényes a mólhőre is:

$$C_n=C_V\cdot\frac{n-\kappa}{n-1}.$$

Egyatomos gázok mólhője állandó térfogaton

$$C_V=\frac{f}{2}R=\frac{3}{2}\cdot R,$$

a fajhőhányados pedig

$$\kappa=\frac{f+2}{f}=\frac{5}{3}.$$

Esetünkben $C_V=R$, tehát

$$R=\frac{3}{2}R\cdot\frac{n-\frac{5}{3}}{n-1},$$

ahonnan $n = 3$ következik. Ezek szerint a folyamat során

$$p \cdot V^3 = \text{állandó},$$

amit az általános gáztörvény felhasználásával

$$T \cdot V^2 = \text{állandó}$$

alakban is felírhatunk. Innen leolvashatjuk, hogy miközben a gáz hőmérséklete a kétszeresére nő, a térfogata $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}7$-szeresére csökken.

Jánosik Áron (Győr, Révai M. Gimn., 10. évf.)
dolgozata alapján

36 dolgozat érkezett. Helyes 22 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 1, hiányos (1–3 pont) 13 dolgozat.

P. 5010. *Egy ciklotronban protonok felgyorsításához* 10 MHz *frekvenciájú gyorsítófeszültségre van szükség. Mekkora frekvencia kell a deuteronok, az egyszeresen ionizált héliumatomok, illetve a kétszeresen ionizált héliumatomok felgyorsításához?*

(4 pont) *Példatári feladat nyomán*

Megoldás. Jelöljük a protont, a deuteront és a kétféleképpen ionizált héliumatomokat rendre 1, 2, 3 és 4-es indexekkel, továbbá számoljuk a tömegeket és a töltéseket a protonhoz viszonyított relatív egységekben. Így $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, $m_3 = m_4 = 4$, illetve $q_1 = q_2 = q_3 = 1$, és $q_4 = 2$.

A ciklotronban körpályákon mozgó részecskék centripetális gyorsulását a mágneses tér által kifejtett Lorentz-erő biztosítja:

$$qvB = \frac{mv^2}{r},$$

így a v sebességgel mozgó részecske pályájának sugara

$$r = \frac{mv}{qB},$$

a mozgás „frekvenciája" pedig

$$f = \frac{v}{2\pi r} = \frac{q}{m} \cdot \frac{B}{2\pi}.$$

Ugyanekkora frekvenciával kell váltakoznia a gyorsítófeszültségnek is a ciklotron két féltere között, ezzel biztosítható a részecskék sebességének (és ezzel együtt a pályasugaruknak) folyamatos növekedése.

A frekvenciák arányára igaz, hogy:

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{2}, \qquad \text{azaz} \qquad f_2 = 5\ \text{MHz},$$

$$\frac{f_3}{f_1} = \frac{m_1}{m_3} = \frac{1}{4}, \qquad \text{tehát} \qquad f_3 = 2{,}5\ \mathrm{MHz},$$

$$\frac{f_4}{f_1} = \frac{q_4}{q_1} \cdot \frac{m_1}{m_4} = \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}, \qquad \text{így} \qquad f_4 = 5\ \mathrm{MHz}.$$

Garamvölgyi István Attila (Kecskeméti Katona J. Gimn., 10. évf.)

46 dolgozat érkezett. Helyes 39 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 4, hiányos (1–2 pont) 2, hibás 1 dolgozat.

Fizikából kitűzött feladatok

M. 378. Méréssel határozzuk meg, hogy egy szúnyogháló (vagy hasonló, finom szövésű anyag) hány százalékkal csökkenti az ablak fényáteresztő képességét!

(*6 pont*) Közli: *Nagy Piroska Mária,* Dunakeszi

G. 637. Két golyót azonos kezdősebességgel, egyszerre indítunk egy-egy vízszintes, sík felületen. A mozgás során mindkét golyó legurul egy lejtőn, majd felgurul az eredeti szintre, és így jut el az út végére. Az utak hossza ugyanakkora, és a lejtők mélysége is megegyezik. A súrlódási veszteségektől mindkét esetben eltekinthetünk.

Melyik golyó ér hamarabb az út végére?

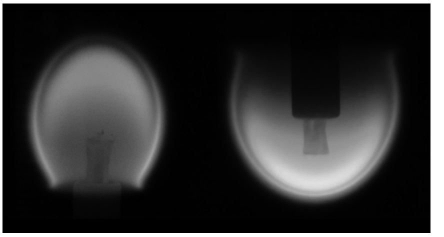
(*3 pont*)

G. 638. Egy kéttonnás gépkocsi kikapcsolt motorral, fékezés nélkül 36 km/h állandó sebességgel gurulna le egy 5 százalékos emelkedésű lejtőn. Mekkora a motor hasznos teljesítménye, ha ugyanezen a lejtőn, ugyanekkora sebességgel haladna felfelé ez a gépkocsi?

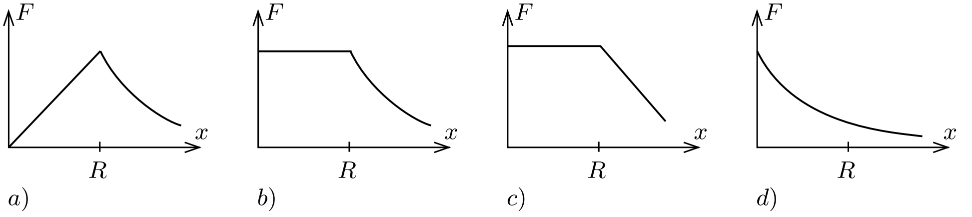
(*3 pont*)

G. 639. Megfigyelték, hogy az égő gyertya lángja a Föld körül keringő űrhajóban gömb alakú. Adjunk magyarázatot erre!

(*3 pont*)



G. 640. Ha a Föld R sugarú, homogén gömb lenne, az alábbi *grafikonok* közül melyik ábrázolná helyesen a gravitációs erő függését a Föld középpontjától mért távolságtól?



(*3 pont*)

P. 5034. Mennyi ideig esett egy v_0 kezdősebességgel vízszintesen elhajított test, amíg az eldobás helyétől s távolságra került? (A légellenállástól tekintsünk el!)

Adatok: $v_0 = 5$ m/s, $s = 20$ m.

(*4 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest

P. 5035. Télen a cinkék egyik kedvenc eledele a magokat is tartalmazó faggyúgolyó, amelyet például egy fa alsó ágára lehet fonállal felfüggeszteni. Egy ilyen golyóból akár két cinke is falatozhat egyszerre. Egy alkalommal a 90 gramm tömegű golyón lakmározó két cinke – valamitől megriadva – egyszerre röppent fel a golyóról, ugyanakkora kezdősebességgel, egymásra merőleges irányban úgy, hogy mindkét madár kezdősebessége a vízszintessel 35°-os szöget zárt be. Az egyenként 18 gramm tömegű cinkék közös felröppenését követően a golyót tartó függőleges fonál 10°-kal lendült hátra, majd 1,4 másodperces lengésidővel kezdett lengedezni.

Mekkora kezdősebességgel röppentek fel a cinkék?

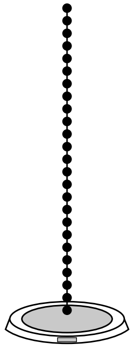
(*5 pont*) Közli: *Radnai Gyula,* Budapest

P. 5036. A Nap körül keringő egyik üstökös legkisebb távolsága a Naptól 0,5 CSE, a legnagyobb pedig 31,5 CSE.

a) Mekkora az üstökös keringési ideje?

b) Mekkora területet súrol az üstököst a (nyugvónak tekinthető) Nappal összekötő szakasz egy év alatt?

(*4 pont*) *Csillagászati versenyfeladat alapján*



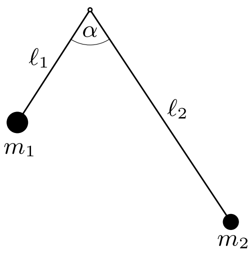
P. 5037. Egy 50 cm hosszúságú, 100 g tömegű, apró szemekből álló láncot függőleges helyzetben lógatunk úgy, hogy a vége éppen egy mérleg felett helyezkedjen el. A láncot egyszer csak elengedjük.

Határozzuk meg és ábrázoljuk a mérleg által mutatott értéket a lánc tetejének a mérlegtől való távolsága, illetve az elengedés pillanatától mért idő függvényében!

(*5 pont*) *A Kvant nyomán*

P. 5038. Két alacsony, de erős fiú áll egymás mellett. Az egyikük, András, $v_0 = 10$ m/s kezdősebességgel, a vízszinteshez képest $\alpha = 30°$-os szögben eldob egy hógolyót. Társa, Bendegúz $t_0 = 0{,}5$ s reakcióidővel később valamekkora sebességgel eldob egy másik hógolyót, és azzal még reptében el akarja találni András „lövedékét". Legalább mekkora sebességgel kell Bendegúznak dobnia, hogy esélye legyen a találatra? (A terep sík, a fiúk vállmagassága $h = 1$ m, és a közegellenállást az egyszerűség kedvéért ne vegyük figyelembe.)

(*5 pont*) Közli: *Gnädig Péter,* Vácduka



P. 5039. Két könnyű, merev pálca hossza ℓ_1, illetve ℓ_2. Egyik végükhöz m_1, illetve m_2 tömegű, kis méretű testet erősítünk, másik végüket mereven összekötjük úgy, hogy a pálcák egymással bezárt szöge α legyen. Ez a rendszer az összekötési ponton átmenő, vízszintes tengely körül szabadon lenghet a pálcák által meghatározott síkban. Mekkora az egyensúlyi helyzetéből kissé kitérített rendszer lengésideje?

(*5 pont*) *Példatári feladat*

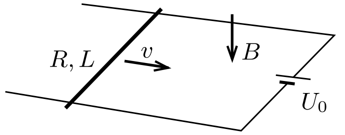
P. 5040. Az 50 m^2 alapterületű és 3 m belmagasságú tanteremben nyitott ajtó mellett a diákok éppen dolgozatot írnak. A hőmérséklet 24 °C, a légnyomás 10^5 Pa. Adjunk becslést a következő mennyiségekre:

a) Mekkora a teremben található levegő tömege?

b) Mekkora a teremben található levegő belső energiája?

c) Mennyivel változna a teremben található levegő belső energiája, ha a hőmérséklet 2 °C-kal emelkedne?

(*4 pont*) Közli: *Széchenyi Gábor,* Budapest



P. 5041. Vízszintes síkban, egymástól $L = 10$ cm távolságra két párhuzamos, elhanyagolható ellenállású, rögzített sín van, amelyeket az *ábra* szerint az egyik végüknél $U_0 = 0{,}3$ V-os, állandó feszültségű áramforrás kapcsol össze. A „berendezés” függőlegesen lefelé mutató, $B = 1$ T indukciójú, homogén mágneses mezőben van. A sínekre merőlegesen $R = 0{,}2\ \Omega$ ellenállású fémpálcát fektettünk, ami a síneken súrlódásmentesen mozoghat.

Mekkora nagyságú és milyen irányú erőt kell a sínekkel párhuzamosan kifejteni a pálcára, hogy az az ábrán jelzett irányban állandó v sebességgel mozogjon, ha

a) $v = 1$ m/s;

b) $v = 5$ m/s?

c) Mekkora a telep által leadott teljesítmény a két esetben?

(*5 pont*) Közli: *Zsigri Ferenc,* Budapest

P. 5042. Egy hagyományos optikai rácsra merőlegesen olyan bíborszínű fényt bocsátunk, amely 652 nm hullámhosszú vörös és 489 nm hullámhosszú kék fény keveréke. A 2 m távolságra lévő ernyőn megfigyelhető legközelebbi bíborszínű fényfoltok távolsága 20 cm. Mekkora a rácsállandó?

(*4 pont*) Közli: *Vigh Máté,* Budapest

P. 5043. Egy $1{,}6\cdot 10^{-13}$ J mozgási energiájú deutérium álló tríciumba ütközik. A lejátszódó magreakció:

$$ {}^{2}_{1}\mathrm{H} + {}^{3}_{1}\mathrm{H} \to {}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{1}_{0}\mathrm{n}. $$

A kilépő neutron sebessége a deutérium sebességének irányával 60°-os szöget zár be.

a) Mennyi energia szabadul fel?

b) Mennyi lesz az α-részecske és a neutron mozgási energiája az ütközés után?

c) Mekkora szöget zár be az α-részecske sebessége a deutérium sebességével?

(Az izotóptömegek táblázata megtalálható honlapunkon a `www.komal.hu/cikkek/atomtomegek.pdf` címen.)

(*5 pont*) Közli: *Kobzos Ferenc,* Dunaújváros

P. 5044. András és Béla ikertestvérek. A 20. születésnapjukon sorsuk megváltozik: András a Földön marad, Béla viszont egy hosszabb űrexpedícióra indul. Az űrhajó állandó sebességgel távolodik a Földtől. Egy év múlva András készít egy fényképet a születésnapi tortájáról, és rádiójelekkel elküldi azt Bélának, aki azt épp a 22. születésnapján kapja meg az űrhajóban.

a) Mekkora sebességgel távolodik az űrhajó a Földtől?

b) Milyen távol van az űrhajó a Földtől András szerint a fénykép megérkezésekor?

c) Béla is készít egy felvételt a 22. születésnapjáról, és azonnal elküldi azt testvérének. Hány éves korában kapja meg András ezt a fényképet?

(*6 pont*) Közli: *Simon Péter,* Pécs

Beküldési határidő: 2018. június 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS
(Volume 68. No. 5. May 2018)

Problems in Mathematics

New exercises for practice – competition C (see page 286): **Exercises up to grade 10: C. 1483.** What is the smallest value of the expression $6|x-1|+5|x-2|+4|x-3|+3|x+4|+2|x-5|$? **C. 1484.** The diagonals of a convex quadrilateral $ABCD$ are not perpendicular. The feet of the perpendiculars dropped from vertices A, B, C, D onto the sections AC and BD are A_1, B_1, C_1, D_1, respectively. (They are different from vertices.) Prove that these points form a quadrilateral similar to the original one. **Exercises for everyone: C. 1485.** Let $x=1^2+3^2+5^2+\cdots+2017^2$ and $y=2^2+4^2+6^2+\cdots+2018^2$. Evaluate the fraction $\frac{y-x}{y+x-(1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+2017\cdot2018)}$. **C. 1486.** A regular triangle ABC and a circle k are both centred at point O, and have an equal area of $\sqrt{\frac{\pi}{\sqrt{27}}}$. Let the extensions of line segments AO, BO, CO intersect circle k at points A', B', C', respectively. Find the exact value of the area of the hexagon $AC'BA'CB'$. **C. 1487.** Nine actors take part of acting exercises each involving three characters. With what minimum number of exercises is it possible to make sure that every pair of actors play together at least once? **Exercises upwards of grade 11: C. 1488.** Given that any three line segments out of a set of five can be used as sides to construct a (non-degenerate) triangle, prove that at least one of the triangles obtained in this way is acute-angled. **C. 1489.** In the lower left corner of a chessboard there is a black bishop, and in the lower right corner there is a white bishop. Each bishop moves up the board in steps of one unit, remaining on fields of its own colour. In each step, it may move to the left or to the right, at random, until it reaches the top row. What is the probability that the black bishop ends up to the right of the white bishop?

New exercises – competition B (see page 287): **B. 4957.** A set with positive integer elements is said to be *jolly good* if it does not contain a pair of numbers whose difference is 2. How many *jolly good* subsets does the set $\{1,2,3,\ldots,10\}$ have? (*3 points*) (Proposed by *S. Róka,* Nyíregyháza) **B. 4958.** The sides of a triangle are a, b, c, the radius of the inscribed circle is r, and the radius of the circumscribed circle is R. Prove that if $a+b+c=\frac{4}{rR}$, $\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}=6$ then $R=2r$. (*4 points*) (*Romanian competition problem*) **B. 4959.** Barnaby has n marbles in his pocket. When he performs a somersault, each marble has a probability of $0<p<1$ to fall out of his pocket, independently of one another. If at least one marble falls out during a somersault then Barnaby will stop performing somersaults. Otherwise he will continue. Given that the probability of having an even number of marbles in his pocket when he stops doing somersaults is 50%, what may be the value of n? (*4 points*) **B. 4960.** Let P be an interior point of triangle ABC, and let A^*, B^* és C^* be arbitrary points of the line segments AP, BP and CP, respectively. Through point A^*, draw parallels to BP and CP, which intersect sides AB and AC at A_1 and A_2, respectively, as shown in the *figure.* Similarly, the parallels drawn through point B^* to CP and AP intersect sides BC and AB at B_1 and B_2, and finally, the parallels drawn through point C^* to AP and BP intersect sides AC and BC at C_1 and C_2, respectively. Show that $AC_1\cdot BA_1\cdot CB_1=AB_2\cdot BC_2\cdot CA_2$. (*3 points*) (Proposed by *J. Kozma,* Szeged) **B. 4961.** The intersection of three unit circles is bounded by the arcs $\widehat{AB}$, $\widehat{AC}$ and $\widehat{BC}$. The perimeter of the intersection is K. Calculate the perimeter of the intersection of the unit circles centred at A, B and C. (*4 points*) **B. 4962.** Let n be a positive integer. Solve the following simultaneous equations on the set of real numbers: $a_1^2+a_1-1=a_2$, $a_2^2+a_2-1=a_3$, $\ldots$, $a_n^2+a_n-1=a_1$. (*5 points*) **B. 4963.** Let r_a be the radius of the largest escribed circle of a triangle, and let R denote the radius of the circumscribed circle. Prove that $r_a \geqslant \frac{3}{2}R$. (*5 points*) (A problem from *Paul Erdős* (1913–1996)) **B. 4964.** Is it true that if the functions $f, g : \mathbb{R} \to [0,1]$ are periodic and the function $f+g$ is also periodic then they have a period in common? (*6 points*) **B. 4965.** For a vector $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, let $\mathbf{e_x} = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$. A given plane $\mathcal{S}$ is parallel, but not identical to the plane of a given (non-degenerate) triangle ABC. Show that there exists a unique $P \in \mathcal{S}$, such that the vector $\mathbf{e}_{\overrightarrow{PA}} + \mathbf{e}_{\overrightarrow{PB}} + \mathbf{e}_{\overrightarrow{PC}}$ is perpendicular to $\mathcal{S}$. (*6 points*)

New problems – competition A (see page 289): **A. 725.** Let $\mathbb{R}^+$ denote the set of positive real numbers. Find all functions $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ satisfying the following equation for all $x, y \in \mathbb{R}^+$: $f\big(xy + f(y)^2\big) = f(x)f(y) + yf(y)$. (Proposed by: *Ashwin Sah,* Cambridge, Massachusetts, USA) **A. 726.** In triangle ABC with incenter I, line AI intersects the circumcircle of ABC at $S \neq A$. Let the reflection of I with respect to BC be J, and suppose that line SJ intersects the circumcircle of ABC for the second time at point $P \neq S$. Show that $AI = PI$. (Proposed by: *József Mészáros,* Galanta, Slovakia) **A. 727.** For any finite sequence $(x_1, \ldots, x_n)$, denote by $N(x_1, \ldots, x_n)$ the number of ordered index pairs (i, j) for which $1 \leqslant i < j \leqslant n$ and $x_i = x_j$. Let p be an odd prime, $1 \leqslant n < p$, and let $a_1, a_2, \ldots, a_n$ and $b_1, b_2, \ldots, b_n$ be arbitrary residue classes modulo p. Prove that there exists a permutation π of the indices $1, 2, \ldots, n$ for which $N\big(a_1 + b_{\pi(1)}, a_2 + b_{\pi(2)}, \ldots, a_n + b_{\pi(n)}\big) \leqslant \min\big(N(a_1, a_2, \ldots, a_n), N(b_1, b_2, \ldots, b_n)\big)$.

Problems in Physics

(see page 314)

M. 378. Measure by what percent does a mosquito net (or any similar material) decrease the transparency of a window.

G. 637. Two balls are started at the same initial speed, each rolls along a horizontal plane first. During the motions both balls roll down along a slope, and then they both roll up to the initial level of their motion, and then they got to the end of the paths. The lengths of both paths are the same, the depths of the paths are also the same. Friction is negligible in both cases. Which ball reaches the end of the path first? **G. 638.** A 2-ton vehicle without operating its engine would move down a slope of 5% elevation at a constant speed of 36 km/h. What would the useful power of its engine be if it goes up along the same slope at the same speed? **G. 639.** It was observed that the flames of a burning candle has a spherical shape in a spaceship revolving around the Earth. Explain this observation. **G. 640.** If the Earth was a uniform density sphere of radius R, which of the *graphs* shown below would be the correct sketch of the gravitational force as a function of the distance measured from the centre of the Earth?

P. 5034. How long did the object, projected horizontally at an initial speed of v_0, fall while it reached a position which was at a distance of s from the position of the projection? (Neglect air resistance.) *Data:* $v_0 = 5$ m/s, $s = 20$ m. **P. 5035.** In winter a favourite type of food for titmice is a fat ball consisting of fat and different seeds. These balls are suspended by means of a piece of thread and hung to a branch of a tree. Even two tits can feed themselves from the same ball at the same time. Once there were two tits on the same ball of mass 90 g, when suddenly they got frightened and flew off at the same moment, with the same initial speed, in perpendicular directions, such that both tits initial velocity made an angle of 35° degree with the horizontal. The fat ball began to swing with a period of 1.4 s, the angular displacement of the thread (with respect to the vertical) was 10°. The mass of each titmouse is 18 g. What was the initial speed of the tits? **P. 5036.** The smallest distance between the Sun and a comet revolving around it is 0.5 AU and the greatest one is 31.5 AU. *a*) What is the period of the comet? *b*) What is the area which is swept by the line segment drawn from the Sun to the comet in one year? (Consider the Sun to be at rest.) **P. 5037.** A 50 cm long, 100 g mass chain of small links is hung such that its lower end is just above a scale. Suddenly the chain is released. Determine and sketch the reading on the scale as a function of the distance of the top of the chain and the scale; and as a function of the time elapsed from the release of the chain. **P. 5038.** Two short but strong boys are standing next to each other. One of them, called Andrew, throws a snowball at an initial speed of $v_0 = 10$ m/s at an angle of $\alpha = 30^\circ$ with respect to the horizontal. His friend Bernard throws another ball at some velocity after the reaction time of $t_0 = 0.5$ s has elapsed. Bernard's goal is to make the two snowballs collide whilst they are in the air. What should the least speed of the second ball be in order that Bernard has a chance to hit Andrew's ball? (The boys are standing in a level field, their shoulders are at a height of $h = 1$ m. For the sake of simplicity do not consider air drag.) **P. 5039.** The lengths of two light, rigid rods are ℓ_1 and ℓ_2. To one end of each a small object is attached, one having a mass of m_1 and the other m_2. The other ends of the rods are attached to each other rigidly such that the angle between the rods is α. The system is pivoted at the attachment of the rods and can swing freely about a horizontal axis, in a plane determined by the rods. What is the period of the motion of the system when it is displaced a bit from its equilibrium position? **P. 5040.** Students are writing a test in a room of base area 50 m^2 and of height 3 m. The door of the room is opened, the temperature is 24 °C, and the pressure is 10^5 Pa. Estimate the following quantities: *a*) What is the mass of the air in the room? *b*) What is the internal energy of the air in the room? *c*) By what amount would the internal energy of the air in the room change, if the temperature increases by 2 °C? **P. 5041.** There is a pair of fixed, parallel rails of negligible resistance in a horizontal plane at a distance of $L = 10$ cm. The rails are connected at one of their ends to the terminals of a voltage supply of constant voltage of $U_0 = 0.3$ V, as shown in the *figure.* The system is in downward magnetic field of magnetic induction of $B = 1$ T. A metal rod of resistance $R = 0.2\ \Omega$ is placed perpendicularly to the rails. The rod can move frictionlessly on the rails. What is the magnitude and the direction of the force which is to be exerted on the rod in order that it moves at a constant speed of v in the direction shown in the figure if *a*) $v = 1$ m/s; *b*) $v = 5$ m/s? *c*) What is the dissipated power of the battery in both cases? **P. 5042.** A beam of magenta light, which is combined from red light of wavelength 652 nm, and blue light of wavelength 489 nm, is perpendicularly incident on a traditional diffraction grating. The distance between the two closest magenta coloured spots on a screen at a distance of 2 m is 20 cm. What is the slit spacing of the diffraction grating? **P. 5043.** A deuterium of kinetic energy $1.6 \cdot 10^{-13}$ J collides with a stationary tritium. The following nuclear reaction occurs: ${}^2_1\mathrm{H} + {}^3_1\mathrm{H} \to {}^4_2\mathrm{He} + {}^1_0\mathrm{n}$. The angle between velocity of the emitted neutron and the velocity of the deuterium is 60°. *a*) How much energy is released? *b*) What is the kinetic energy of the α-particle and the neutron, after the collision? *c*) What is the angle between the velocities of the α-particle and the deuterium? **P. 5044.** Alex and Bob are twins. Their fate changes on their 20th birthday: Alex stays on the Earth, but Bob goes to a longer space-expedition. The spaceship is travelling away the Earth at a constant speed. A year later Alex takes a photo of his birthday cake, and sends it to Bob by means of radio signals, who receives it on his 22nd birthday in the spaceship. *a*) At what speed does the spaceship travel away from the Earth? *b*) According to Alex how far is the spaceship from the Earth when Bob receives the photo? *c*) Bob also takes a photo of his 22nd birthday, and immediately sends it to Alex. How old is Alex when he receives the photo?