Megjegyzés. Egy százalékon belül azonos eredményre jutunk akkor is, ha a mozgási energiát relativisztikusan számoljuk:

$$E_{\text{mozg.}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - mc^2 = \sqrt{p^2c^2 + (mc^2)^2} - mc^2 \approx 2{,}4 \cdot 10^{-15}\ \mathrm{J} = 15\ \mathrm{keV}.$$

b) Az ugyanekkora (10 pm) hullámhosszúságú fotonok energiája:

$$E_{\text{foton}} = h \cdot f = h \cdot \frac{c}{\lambda} = (6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{Js}) \cdot \frac{3 \cdot 10^8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{10^{-11}\ \mathrm{m}} \approx 2 \cdot 10^{-14}\ \mathrm{J} = 125\ \mathrm{keV}.$$

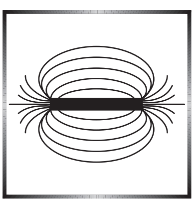
Megjegyzés. A feladat *a*) és *b*) része egymástól függetlenül is megoldható.

c) A mikroszkópoktól elvárjuk, hogy ne tegyék tönkre a preparátumokat, amelyeket bennük vizsgálunk. Tudományosabban megfogalmazva az elvárás az, hogy a mérőműszer minél kevésbé befolyásolja a vizsgálandó tárgyat, jelenséget. Ezért az elektronmikroszkóp látszik alkalmasabbnak, mert annak kisebb energiájú elektronokra van szüksége, mint a fénymikroszkópnak.

Megállapíthatjuk azonban, hogy hiába kisebb az elektronok energiája az ugyanakkora hullámhosszúságú fotonokéhoz képest, a $2{,}4 \cdot 10^{-15}$ J = 15 keV energiájú elektronok is nagy rombolást tudnak végrehajtani (főleg az atomok külső és középső elektronhéjain), tudományosan megfogalmazva ezek az elektronok rugalmatlanul szóródnak az atomi elektronokon. Ezért az elektronhéjak mintázatát még nem sikerült közvetlen módon megfigyelnünk.

A 10 pm hullámhosszúságú fotonok a kemény röntgensugárzás tartományába esnek (energiájuk 125 keV körüli). Még nem találták meg annak a módját, hogy ezeket a röntgensugarakat fókuszálják, vagyis mai tudásunk szerint röntgenlencsék, és így röntgenmikroszkópok sem léteznek.

Honyek Gyula
Budapest



Fizika feladatok megoldása

P. 4958. *Egy uránércdarabban* 200 *millió* ^{233}U *atom található. Az* ^{233}U *izotóp felezési ideje* $1{,}6 \cdot 10^5$ év, *és* ^{229}Th-*ra bomlik, melynek felezési ideje* $7,8 \cdot 10^3$ év. *Ez tovább bomlik* ^{225}Ra-*ra, melynek felezési ideje* 15 *nap. Becsüljük meg az uránércdarabban levő* ^{225}Ra *atommagok számát!*

(*5 pont*) *Országos Szilárd Leó Fizikaverseny,* Paks

Megoldás. Mivel az urán felezési ideje sokkal nagyobb, mint a tóriumé, az pedig sokkal nagyobb, mint a rádium felezési ideje, vagyis

$$T_{1/2}^{\mathrm{U}} \gg T_{1/2}^{\mathrm{Th}} \gg T_{1/2}^{\mathrm{Ra}},$$

az urán aktivitása (időegység alatt bekövetkező bomlások száma) állandónak tekinthető:

$$a(t)^{\mathrm{U}} \approx a(0)^{\mathrm{U}} = \ln 2 \frac{N(0)^{\mathrm{U}}}{T_{1/2}^{\mathrm{U}}}.$$

Elegendően hosszú idő elteltével radioaktív egyensúly (ún. szekuláris egyensúly) áll be: időegység alatt ugyanannyi atommag bomlik el az egyik fajtából, mint amennyi a bomlási sor azt megelőző tagjából keletkezett. Egyensúlyban a bomlási sor egyes tagjainak aktivitása megegyezik:

$$a^{\mathrm{U}} = a^{\mathrm{Th}} = a^{\mathrm{Ra}}, \qquad \text{vagyis} \qquad \frac{N^{\mathrm{U}}}{T_{1/2}^{\mathrm{U}}} = \frac{N^{\mathrm{Th}}}{T_{1/2}^{\mathrm{Th}}} = \frac{N^{\mathrm{Ra}}}{T_{1/2}^{\mathrm{Ra}}}.$$

Innen a rádium atommagok (átlagos) száma az uránércdarabban:

$$N^{\mathrm{Ra}} = \frac{T_{1/2}^{\mathrm{Ra}}}{T_{1/2}^{\mathrm{U}}} N^{\mathrm{U}} \approx \frac{15 \text{ nap}}{1{,}6 \cdot 10^6 \text{ év}} \cdot (200 \cdot 10^6) \approx 51.$$

Hajnal Dániel Konrád (Eger, Dobó I. Gimn., 12. évf.)
dolgozata alapján

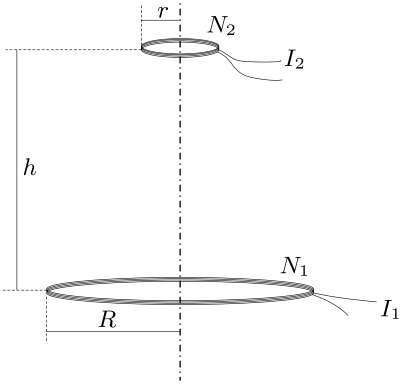
Megjegyzés. A végeredmény független a tórium felezési idejétől; annak megadására csak azért volt szükség, hogy lássuk: a radioaktív egyensúly feltétele teljesül.

Olosz Adél (Pécs, PTE Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.)

33 dolgozat érkezett. Helyes 19 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 12, hiányos (2–3 pont) 2 dolgozat.

P. 4969. *Két lapos tekercs közös szimmetriatengelyen, egymástól h távolságra az ábrán látható módon helyezkedik el. A tekercsek menetszáma N_1, illetve N_2, sugaruk R és r ($r \ll R$), valamint I_1, illetve I_2 erősségű áram folyik bennük. Mekkora erőt fejt ki egymásra a két tekercs?*

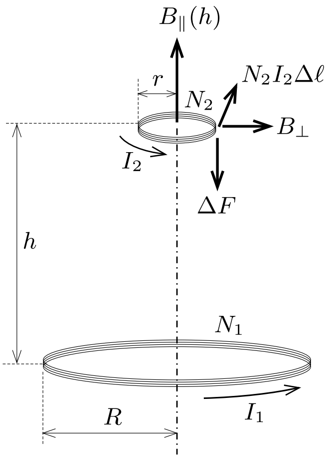
(6 pont) *A Kvant nyomán*



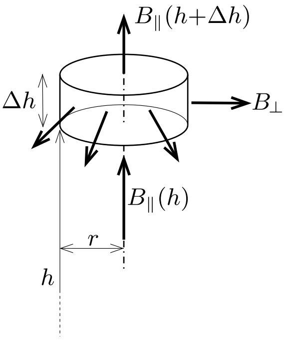
Megoldás. A két tekercs között ható erő vonzó hatású, ha a két áram (I_1 és I_2) körüljárási iránya megegyezik, ellenkező esetben pedig ugyanakkora nagyságú, de taszító. A továbbiakban három különböző megoldást mutatunk a feladatra.

I. megoldás. Az elrendezés forgásszimmetriája miatt a két tekercs között ható eredő erő a szimmetriatengellyel párhuzamos, így elegendő csak az ilyen irányú erőket összegeznünk.

A nagy tekercs által a kis tekercs helyén létrehozott mágneses térnek tengelyirányú $B_\parallel$ komponense, illetve radiálisan kifelé mutató $B_\perp$ komponense van (*1. ábra*). Vegyük észre, hogy a $\Delta\boldsymbol{F} = I\cdot\Delta\boldsymbol{\ell}\times\boldsymbol{B}$ képlet szerint tengelyirányú erőt csak $B_\perp$ okoz, azaz feladatunk ennek a komponensnek a meghatározása.



1. ábra



2. ábra

Ismeretes, de a Biot–Savart-törvény segítségével könnyen le is vezethető (ettől itt most eltekintünk), hogy a nagy tekercs által a tengely mentén, a tekercs középpontjától h távolságban keltett mágneses indukció nagysága

$$B_\parallel(h) = \frac{\mu_0}{2}I_1N_1R^2\big(h^2+R^2\big)^{-3/2}.$$

Vegyünk fel egy igen kicsiny Δh magasságú, r sugarú hengerfelületet (koaxiálisan) a kis tekercs köré (*2. ábra*). Tekintettel arra, hogy $r \ll R$ és $\Delta h \ll h$, a mágneses indukció nagysága a henger alap- és fedőlapján, illetve az oldalpalást mentén állandónak vehető. A henger felső lapján a mágneses indukció nagysága egy kicsiny ΔB-vel különbözik az alaplap menti indukciótól:

$$B_\parallel(h+\Delta h) = B_\parallel(h) + \Delta B_\parallel,$$

emiatt a körlapokon be- és kilépő mágneses fluxus nem egyezik meg. A teljes (zárt) hengerfelületen kilépő összes mágneses fluxus viszont (a mágneses tér forrásmentessége miatt) nulla:

$$B_\parallel(h+\Delta h)\,r^2\pi - B_\parallel(h)\,r^2\pi + 2r\pi\Delta h\,B_\perp = 0,$$

ahonnan megkapható a számunkra érdekes (sugárirányú) komponens:

$$B_\perp = -\frac{r}{2}\frac{\Delta B_\parallel}{\Delta h} \approx \frac{3}{4}\mu_0I_1N_1R^2rh\big(h^2+R^2\big)^{-5/2}.$$

Megjegyzés. Az utolsó lépés jogosságát a kicsiny mennyiségek hányadosának differenciálhányadossal történő közelítésével láthatjuk be:

$$\frac{\Delta B_\parallel}{\Delta h} \approx B'_\parallel(h),$$

de a Newton-féle $(1+\varepsilon)^n \approx 1 + n\varepsilon$ (ha $\varepsilon \ll 1$) közelítő képlet is eredményre vezet:

$$\left[(h+\Delta h)^2 + R^2\right]^{-\frac{3}{2}} \approx \left(h^2 + 2h\Delta h + R^2\right)^{-3/2} \approx \left(h^2+R^2\right)^{-\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{2h\Delta h}{h^2+R^2}\right)^{-3/2} \approx$$

$$\approx \left(h^2+R^2\right)^{-\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{3}{2}\,\frac{2h\Delta h}{h^2+R^2}\right) = \left(h^2+R^2\right)^{-3/2} - 3h\Delta h\left(h^2+R^2\right)^{-5/2}.$$

A kis tekercsre ható eredő erő (kihasználva, hogy a tekercs minden pontjában $\Delta\boldsymbol{\ell}$ merőleges $\boldsymbol{B}_\perp$-re):

$$F = \sum \Delta F = I_2 N_2 B_\perp \sum \Delta\ell = \frac{3}{2}\mu_0 I_1 I_2 N_1 N_2 R^2 r^2 h\left(h^2+R^2\right)^{-5/2}\pi.$$

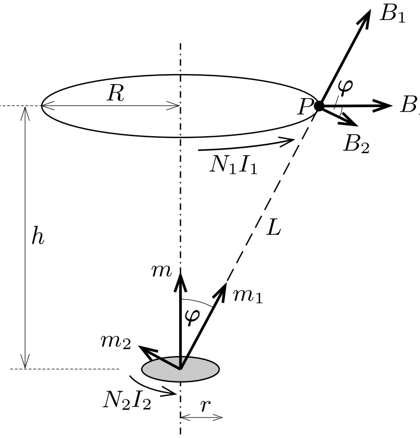
II. megoldás. Mivel a két tekercs egyforma nagyságú erőt fejt ki egymásra, a feladat megoldáshoz számolhatjuk a kis tekercs által a nagy tekercsre kifejtett erőt is.

Minthogy $r \ll R$, a kis tekercs mágneses tere közelíthető egy

$$m = I_2 N_2 \cdot r^2 \pi$$

nyomatékú mágneses dipólus terével.

Bontsuk fel az $\boldsymbol{m}$ vektort két komponensre a *3. ábrán* látható módon. Az egyes komponensek által létrehozott mágneses indukcióvektorok nagyságát (B_1, illetve B_2) és irányát könnyen meghatározhatjuk a dipólustól $L = \sqrt{h^2+R^2}$ távol lévő P pontban, hiszen ezek a *Gauss-féle főhelyzeteknek* felelnek meg. B_1 nagysága az I. Gauss-féle főhelyzetre (a dipól tengelyére eső pontokra) vonatkozó ismert képlet (lásd az I. megoldást) alapján:



3. ábra

$$B_1 = \frac{\mu_0 m_1}{2\pi}\,\frac{1}{L^3} =$$

$$= \frac{\mu_1 m\cos\varphi}{2\pi}\left(h^2+R^2\right)^{-3/2}.$$

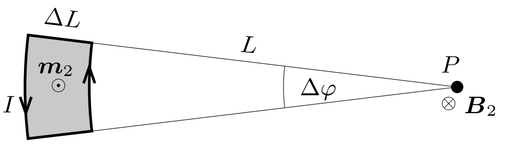
B_2 nagysága a II. Gauss-féle főhelyzetre (a dipól tengelyére merőleges síkban elhelyezkedő pontokra) vonatkozó képlet alapján:

$$B_2=\frac{\mu_0 m_2}{4\pi}\,\frac{1}{L^3}=\frac{\mu_1 m\sin\varphi}{4\pi}\big(h^2+R^2\big)^{-3/2}.$$

Megjegyzés. A II. főhelyzetben a mágneses indukció $\boldsymbol{B}_2$ vektora ellentétes irányú az $\boldsymbol{m}_2$ dipólnyomatékkal, az I. főhelyzetben viszont $\boldsymbol{B}_1$ és $\boldsymbol{m}_1$ azonos irányú vektorok. B_2 nagysága – ugyanakkora L távolság és ugyanakkora dipólnyomaték esetén – éppen fele B_1-nek. Mindezt pl. a Biot–Savart-törvény alkalmazásával láthatjuk be, ha azt a *4. ábrán* látható kicsiny, áramjárta körvezető, vagyis az $m_2=IL\Delta\varphi\Delta L$ nyomatékú mágneses dipól P pontbeli terének kiszámítására használjuk. A mágneses indukcióhoz csak a két kis körív árama ad járulékot, és az eredő tér nagysága:

$$B_2=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\frac{L\Delta\varphi}{L^2}-\frac{(L+\Delta L)\Delta\varphi}{(L+\Delta L)^2}\right)\approx\frac{\mu_0 I\Delta\varphi}{4\pi}\left(\frac{1}{L}-\frac{1}{(L+\Delta L)}\right)\approx$$

$$\approx\frac{\mu_0 I\Delta\varphi\Delta L}{4\pi L^2}=\frac{\mu_0 m_2}{4\pi}\,\frac{1}{L^3}.$$



4. ábra

A 3. ábra alapján a keresett radiális indukciókomponens nagysága

$$B_\perp=B_1\sin\varphi+B_2\cos\varphi=\frac{3}{4}\frac{\mu_0 m}{\pi}\big(h^2+R^2\big)^{-3/2}\sin\varphi\,\cos\varphi=$$

$$=\frac{3}{4}\frac{\mu_0 m}{\pi}\big(h^2+R^2\big)^{-3/2}\frac{R}{\sqrt{h^2+R^2}}\,\frac{r}{\sqrt{h^2+R^2}}=\frac{3\mu_0}{4}I_2N_2Rr^2h\big(h^2+R^2\big)^{-5/2},$$

és végül a nagy tekercsre ható erő:

$$F=2R\pi I_1N_1B_\perp=\frac{3}{2}\mu_0 I_1I_2N_1N_2R^2r^2h\big(h^2+R^2\big)^{-5/2}\pi.$$

III. megoldás. A feladat energetikai megfontolásokkal is megoldható. Legyen a két tekercs önindukciós állandója rendre L_1 és L_2, a kölcsönös indukciós együtthatójuk pedig M. (A kölcsönös indukcióról és a mágneses tér energiájáról lásd még *Gnädig Péter: A kölcsönös indukció* c. cikket a KöMaL 2001. évi 2. számában, illetve *Szász Krisztián: Két párhuzamosan kapcsolt ideális tekercs eredő induktivitása* c. cikket a KöMaL 2011. évi 9. számában és a KöMaL honlapján. – A Szerk.)

A két lapos tekercs kölcsönös indukciós együtthatóját könnyen meghatározhatjuk, ha a nagy tekercs által létrehozott mágneses indukcióvektort a kis tekercs által határolt körlapon állandónak tekintjük. (Ez a feltevés $r \ll R$ miatt jogos.) A kis tekercsen áthaladó mágneses fluxus:

$$\Phi_{1,2} = N_2 r^2 \pi B_{\parallel}(h) = \frac{\mu_0 \pi}{2} I_1 N_1 N_2 R^2 r^2 \big(h^2 + R^2\big)^{-3/2},$$

és így a kölcsönös indukciós együttható:

$$M(h) = \frac{\Phi_{1,2}}{I_1} = \frac{\mu_0 \pi}{2} N_1 N_2 R^2 r^2 \big(h^2 + R^2\big)^{-3/2}.$$

Látható, hogy a kölcsönös indukciós együttható függ a tekercsek távolságától, míg az önindukciós együtthatók nyilván függetlenek h-tól.

A rendszer mágneses terének energiáját az

$$E = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2$$

kifejezés írja le. Ha a két tekercs közötti távolságot egy kicsiny Δh értékkel megnöveljük, miközben F nagyságú húzóerőt fejtünk ki, akkor $W = F\Delta h > 0$ munkát végzünk. Eközben a rendszer mágneses terének energiája

$$\Delta E = I_1 I_2 \, \Delta M(h)$$

értékkel megváltozik. Első gondolatunk az lehet, hogy a munkatétel szerint

$$\Delta E = W, \qquad \text{vagyis} \qquad F = \frac{\Delta E}{\Delta h}.$$

Ez azonban nem lehet igaz, hiszen h növelésekor $E(h)$ csökken, így $\Delta E < 0$ nem egyezhet meg a $W > 0$ munkával.

A hiba forrása a következő: miközben a tekercseket eltávolítjuk egymástól, a bennük folyó áramot csak külső feszültségforrások segítségével tarthatjuk állandó értéken, és ezen feszültségforrások által leadott energiát nem vettük figyelembe az energiamérleg felírásánál. Ha a munkatételt helyesen akarjuk alkalmazni, akkor vagy ki kell számítanunk a külső áramforrások energialeadását, vagy – egy „trükk" alkalmazásával – energetikailag zárttá kell tennünk a rendszert. A továbbiakban a második módszert követjük.

A tekercseket, amelyekben kezdetben I_1 és I_2 áram folyt, oly mértékben lehűthetjük, hogy szupravezetőkké váljanak. Ekkor az áramok fenntartásához nincs szükség külső feszültségforrásra, tehát a tekercsek kivezetéseit akár rövidre is zárhatjuk. A tekercsek között ható erő nyilván csak az áramok nagyságától függ, attól nem, hogy milyen hőmérsékletűek (milyen vezetőképességűek) a vezetékek.

Távolítsuk el gondolatban a két lehűtött (szupravezetővé tett) tekercset egymástól egy kicsiny Δh távolsággal. A rendszer most energetikailag zárt, tehát az általunk végzett $W = F\Delta h$ munka a mágneses energia ΔE megváltozásával lesz egyenlő. Mivel a szupravezető tekercsek mágneses fluxusa nem változhat meg (ellenkező esetben feszültség indukálódna, és az „végtelen nagy" áramot indítana el bennük), a tekercsek eltávolítása közben nemcsak M, hanem I_1 és I_2 is változni fog. A tekercsek fluxusa, vagyis

$$\Phi_1 = L_1 I_1 + M I_2, \qquad \text{illetve} \qquad \Phi_2 = L_2 I_2 + M I_1$$

állandó marad, vagyis

$$L_1 \cdot \Delta I_1 + I_2 \cdot \Delta M + M \cdot \Delta I_2 = 0,$$

továbbá

$$L_2 \cdot \Delta I_2 + I_1 \cdot \Delta M + M \cdot \Delta I_1 = 0.$$

Ha a fenti egyenletek bal oldalának I_1, illetve I_2-szörösét kivonjuk a mágneses energia

$$\Delta E = L_1 I_1 \Delta I_1 + L_2 I_2 \Delta I_2 + I_1 I_1 \Delta M + M\left(I_1 \Delta I_2 + I_2 \Delta I_1\right)$$

megváltozásából, azt kapjuk, hogy

$$\Delta E = -I_1 I_1 \Delta M > 0.$$

(A helyes eredmény csak egy előjelben tér el a naiv, hibás gondolatmenet eredményétől.)

A kölcsönös indukciós együttható kicsiny megváltozását az I. megoldásban alkalmazott módon (differenciálszámítással, vagy a Newton-formula alkalmazásával) számíthatjuk ki:

$$\Delta M = -\frac{3\pi}{2}\mu_0 N_1 N_2 R^2 r^2 h\big(h^2 + R^2\big)^{-5/2}\Delta h,$$

és így a keresett vonzóerő:

$$F = -I_1 I_2 \frac{\Delta M}{\Delta h} = +\frac{3\pi}{2}\mu_0 I_1 I_2 N_1 N_2 R^2 r^2 h\big(h^2 + R^2\big)^{-5/2}.$$

Marozsák Tóbiás (Budapest, Óbudai Árpád Gimn., 12. évf.)

10 dolgozat érkezett. Helyes Elek Péter, Marozsák Tóbiás, Olosz Adél és Tófalusi Ádám megoldása. Hiányos (1–3 pont) 6 dolgozat.

Fizikából kitűzött feladatok

M. 376. Egy félliteres, vízzel teletöltött műanyag palackot a kupakján átmenő, a szimmetriatengelyére merőleges vízszintes tengely körül ingaként meglengetünk. Mérjük meg az inga lengésidejét különböző kezdeti kitérések esetén! Változik-e az eredmény, ha a vizet megfagyasztjuk?

(*6 pont*) Közli: *Gnädig Péter,* Vácduka