B. 4945. Határozzuk meg azokat az n pozitív egészeket, amelyekre

$$1 \cdot 2^0 + 2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + \ldots + n \cdot 2^{n-1}$$

négyzetszám.

(*5 pont*) *Németh László* (Fonyód) javaslata alapján

B. 4946. Az $f(x)$ valós együtthatós polinomra igaz, hogy minden, 10-es számrendszerben 5-re vagy 8-ra végződő k pozitív egész esetén $f(k)$ értéke egész szám.

a) Igazoljuk, hogy $f(0)$ egész szám.

b) Mutassunk példát olyan $f(x)$ polinomra, amire a fenti feltételek teljesülnek, de $f(1)$ nem egész szám.

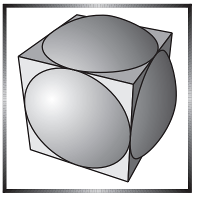
(*6 pont*)

B. 4947. Igazoljuk, hogy egy kockát a keletkező darabok egybevágóságától eltekintve egyféleképpen lehet pontosan öt darab tetraéderre darabolni.

(*6 pont*)

Beküldési határidő: 2018. április 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (719–721.)



A. 719. Legyen ABC nem egyenlőszárú háromszög körülírt körének, illetve beírt körének középpontja O, illetve I. Az A-val szemköztes hozzáírt kör BC-t A_1-ben érinti, a B-vel szemköztes hozzáírt kör CA-t B_1-ben érinti, továbbá a C-vel szemköztes hozzáírt kör AB-t C_1-ben érinti. Legyen P az AB_1C_1 háromszög magasságpontja, H pedig az ABC háromszög magasságpontja. Igazoljuk, hogy ha M a PA_1 felezőpontja, akkor HM és OI párhuzamosak.

Javasolta: *Michael Ren* (Andover, Massachusetts, USA)

A. 720. Egy pozitív egész számot *elevennek* nevezünk, ha van $10^{10^{100}}$-nál nagyobb prímosztója. Bizonyítsuk be, hogy ha S eleven pozitív egészekből álló végtelen halmaz, akkor létezik olyan végtelen T részhalmaza, melynek bármely véges nemüres részhalmazában az elemek összege eleven szám.

A. 721. Legyen $n \geqslant 2$ pozitív egész szám, továbbá $a_1, a_2, \ldots, a_n$ olyan pozitív valós számok, melyek összege 1, négyzetösszege pedig S. Mutassuk meg, hogy ha $b_i = \frac{a_i^2}{S}$ $(i = 1, \ldots, n)$, akkor tetszőleges $r > 0$ mellett

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{(1-a_i)^r} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{(1-b_i)^r}.$$

❄

Beküldési határidő: 2018. április 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

Informatikából kitűzött feladatok

I. 451. Kukac-robot egy számsoron szeretne végighaladni, végigkúszni. A robot onnan kapta a nevét, hogy mozgása a kukacokéra emlékeztet. A kúszás két fázisból áll: először összehúzza magát úgy, hogy testének első része helyben marad a számsoron és a végét előre húzza, amíg csak lehet; majd másodszor fordítva, testének utolsó pontja marad egy helyben és előre kinyúlik, amíg a szabályok engedik.

Szabályok:

– Összehúzott állapotban a Kukac-robot alatt lévő számok összege legalább K, és a lefedett számok száma kettőnél nem lehet kevesebb.

– Kinyújtott állapotban legfeljebb L lehet az alatta levő számok összege és nem nyúlhat öt számnál hosszabban.

– A Kukac-robot induló helyzete: az első két számon helyezkedik el összehúzott állapotban. (A kezdőállapotra a szabályokat nem kell vizsgálni.)

– Beérkezésnek számít az a kinyújtott állapot, amikor a számsor utolsó tagját lefedi.

Készítsünk programot `i451` néven, amely meghatározza, hogy Kukac-robot végig tud-e menni a számsoron és ha igen, akkor legkevesebb hány lépésben.

A program standard bemenetének első sorában 3 szám van: N $(10 \leqslant N \leqslant 10\,000)$ a számsor hossza, K $(2 \leqslant K \leqslant 20)$ összehúzott állapotban a Kukac-robot alatti és L $(K < L \leqslant 45)$ a kinyújtott állapot alatti számok összege. Az ezt követő sorban a számsor tagjait adjuk meg szóközzel elválasztva, azaz N darab számot x_i $(0 \leqslant x_i \leqslant 9)$.