$x(x-2) \geqslant -12$. Vagyis az első egyenlőtlenség $x(x-2) < 0$, azaz $x \in (0;2)$ esetén teljesül.

A vizsgált függvény pozitív értékeket az előbbi intervallumon kívül, vagyis $x \notin (0,2)$ esetén vesz fel, itt teljesülni kell az $x(x-2) \leqslant 8$ egyenlőtlenségnek. Az $x^2 - 2x - 8 = 0$ egyenlet gyökei

$$\frac{2-\sqrt{4+4\cdot 8}}{2} = -2 \quad \text{és} \quad \frac{2+\sqrt{4+4\cdot 8}}{2} = 4,$$

tehát ha $x \notin (0,2)$, akkor az $x(x-2) \leqslant 8$ egyenlőtlenség megoldása $x \in [-2;0] \cup$ $\cup\, [2;4]$.

Végül az eredeti egyenlőtlenség megoldása $x \in [-2;4]$.

Werner András (Budapest, Piarista Gimn., 10. évf.)

Megjegyzés. Sokan oldották meg a honlapunkon is látható módon a feladatot: az egyenlőtlenséget

$$(x-1)^4 + 2(x-1)^2 - 99 \leqslant 0$$

alakra hozva, majd bevezetve az $y = (x-1)^2$ változót.

205 dolgozat érkezett. 5 pontos 112, 4 pontos 33, 3 pontos 17, 2 pontos 9, 1 pontos 19, 0 pontos 10 dolgozat. Nem versenyszerű 5 dolgozat.

Matematika feladatok megoldása

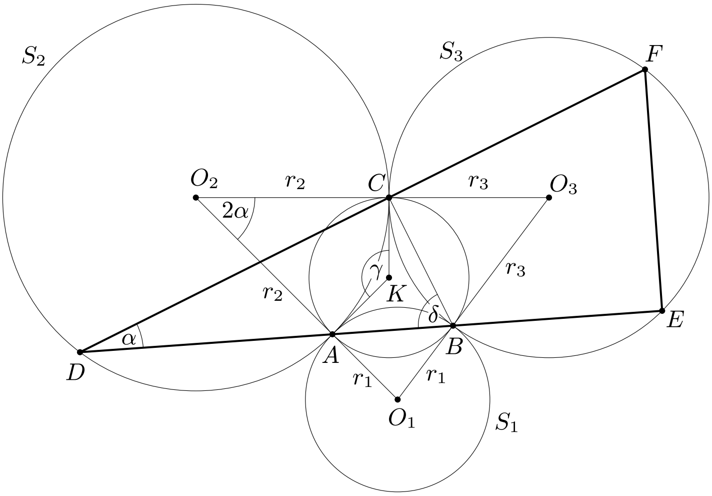
B. 4891. *Az S_1, S_2, S_3 körök páronként kívülről érintik egymást. Legyenek A, B és C rendre az S_1 és S_2, S_1 és S_3, S_2 és S_3 körök közös pontjai. Az AB egyenes ismételten elmetszi az S_2 és S_3 köröket a D, illetve az E pontokban. A DC egyenes újabb metszéspontja az S_3 körrel legyen az F pont. Bizonyítsuk be, hogy a DEF háromszög derékszögű.*

(*5 pont*) (*Kvant*)

Megoldás. Használjuk az *ábra* jelöléseit.

Az $O_1O_2O_3$ háromszög oldalait az A, B, C pontok úgy osztják fel, mint a háromszög beírt körének érintési pontjai, hiszen $O_1A = O_1B = r_1$, $O_2A = O_2C =$ $= r_2$ és $O_3B = O_3C = r_3$. Ezért az ABC háromszög körülírt köre éppen az $O_1O_2O_3$ háromszög beírt köre.

Legyen $ADC\sphericalangle = \alpha$. Ekkor a kerületi és középponti szögek tétele miatt az AC ívhez tartozó középponti szög: $AO_2C\sphericalangle = 2\alpha$. Mivel K a beírt kör középpontja, O_2A és O_2C pedig érintők, azért $O_2CK\sphericalangle = 90°$ és $O_2AK\sphericalangle = 90°$, mert az érintők merőlegesek a sugarakra. Ebből adódik, hogy az AO_2CK négyszögben, ami egy



derékszögű deltoid, $CKA\sphericalangle=\gamma=180^\circ-2\alpha$. Ez a szög középponti szög az ABC háromszög körülírt körében, ezért az AC ívhez tartozó kerületi szög:

$$ABC\sphericalangle=\delta=\frac{180^\circ-2\alpha}{2}=90^\circ-\alpha.$$

A BCD háromszögben $BCD\sphericalangle=180^\circ-\alpha-(90^\circ-\alpha)=90^\circ$.

A $BCFE$ húrnégyszögben $BCF\sphericalangle=180^\circ-BCD\sphericalangle=90^\circ$, ezért a vele szemben lévő $BEF\sphericalangle$ is 90°, vagyis a DEF háromszög derékszögű. Ezt kellett bizonyítani.

Olosz Adél (Pécs, PTE Gyak. Ált. Isk., Gimn., Szakgimn. és Óvoda, 11. évf.) és
Nagy Nándor (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.)
dolgozata alapján

114 dolgozat érkezett. 5 pontos 91, 4 pontos 7, 3 pontos 2, 2 pontos 8, 1 pontos 6 dolgozat.

B. 4901. *Törpfalván járvány ütötte fel a fejét azt követően, hogy csúf kórság fertőzött meg néhány törpöt. Szerencsére a betegségből minden törp egy nap alatt meggyógyul, és ezután egy napig immunissá válik, ám sajnos ezt követően újra fertőződhet. Az állapot megváltozása mindig éjszaka, alvás közben következik be. Kellemetlen, hogy a törpök még betegen sem adják fel azt a megrögzött szokásukat, hogy minden egyes nap minden barátjukat meglátogatják. Márpedig ha egy beteg törp egy nem immunis, egészséges törppel találkozik, az utóbbi bizonyosan megfertőződik. Mutassuk meg, hogy ha Törpfalván* 100 *törp él, akkor a járványnak a kitörését követő* 101. *napon már biztosan vége van.*

(*6 pont*) *BME VIK folklór*

Megoldás. Jelölje B_1 azoknak a törpöknek a halmazát, akik a legelső napon (a járvány kitörésekor) betegek. Legyen továbbá B_2 azoknak a halmaza, akiket a B_1-beli törpök (az 1. napon) megfertőznek; nyilván a B_2 és a B_1 halmazok diszjunktak. Jelölje ezután B_3 azon törpök halmazát, akik a 3. napra megbetegednek; ez csak úgy történhet, hogy a 2. napon megfertőződtek B_2-beli barátaiktól (hiszen akkor csak azok voltak betegek). Értelemszerűen a B_3 és a B_2 halmazok diszjunktak; megmutatjuk, hogy ráadásul B_3 a B_1-től is diszjunkt. Ez abból következik, hogy a 2. napon minden B_1-beli törp immunis volt, így akkor nem fertőződhetett meg – tehát nem tartozhat B_3-ba.

Hasonlóan definiáljuk a $B_4, B_5, \ldots$ halmazokat: minden j-re legyen B_j azoknak a törpöknek a halmaza, akik a j-edik napon betegek. Nyilván a B_j-beliek a B_{j-1}-hez tartozó barátaiktól kapták a fertőzést a $(j-1)$-edik napon. Megmutatjuk, hogy a $B_1, B_2, B_3, B_4, \ldots, B_j$ halmazok páronként diszjunktak. A $j=1,2,3$ értékekre ez világos; tegyük fel, hogy igaz minden $j<n$-re. Vizsgáljuk ezután B_n státuszát. A B_n-nek és a B_{n-1}-nek nincs közös eleme, hiszen az $(n-1)$-edik napon beteg B_{n-1}-beli törpök az n-edik napon éppen egészségesek (sőt, immunisak), ezért egyikük sem tartozhat B_n-be. Mivel az $(n-1)$-edik napon B_{n-2} elemei immunisak, azért egyikük sem betegedik meg aznap, vagyis az n-edik napon valamennyien egészségesek; tehát B_n és B_{n-2} is diszjunktak.

A B_n-nek a $B_1, B_2, \ldots, B_{n-3}$ halmazokhoz való viszonyát tisztázandó tegyük fel indirekten, hogy valamelyikükhöz nem diszjunkt; legyen $1 \leqslant k \leqslant n-3$ olyan érték, amelyre B_n-nek és B_k-nak létezik egy közös T eleme. Jelölje S az egyik olyan elemét B_{n-1}-nek, akitől az $(n-1)$-edik napon T megfertőződött. Az indukciós feltevés szerint S sem B_k-nak, sem pedig B_{k-1}-nek nem eleme, azaz a k-adik napon nem beteg és nem is immunis. Így azonban S-et a k-adik napon megfertőzi beteg barátja T, ezért a $(k+1)$-edik napon S beteg lesz, vagyis $S \in B_{k+1}$. Ebből következik, hogy B_{n-1} és B_{k+1} nem diszjunktak, ami $k+1<n-1<n$ és az indukciós feltevés szerint lehetetlen. Ezzel állításunk n-re is teljesül, tehát j minden értékére igaz.

Ha E-vel jelöljük azoknak a törpöknek a halmazát, akik sosem kapják el a betegséget, akkor az E, B_1, B_2, … – páronként diszjunkt – halmazok egyesítése a 100 lakosból álló teljes Törpfalva. Ha a $B_1, B_2, \ldots B_{100}$ halmazok egyike sem üres, akkor B_{101} már szükségképpen az; ha pedig valamelyikük üres, akkor az utána következő többi is. A 101-edik napon tehát semmiképpen nincs beteg, a járvány véget ér.

139 dolgozat érkezett. 6 pontos 61, 5 pontos 21, 4 pontos 17, 3 pontos 17, 2 pontos 13, 1 pontos 8, 0 pontos 2 dolgozat.

B. 4902. *Adott a síkon négy különböző hosszúságú, egymással párhuzamos szakasz, A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 és A_4B_4. Tetszőleges $1 \leqslant i < j \leqslant 4$ esetén legyen M_{ij} az A_iB_j és A_jB_i egyenesek metszéspontja. Mutassuk meg, hogy az $M_{12}M_{34}$, $M_{13}M_{24}$ és $M_{14}M_{23}$ egyenesek egy ponton mennek át vagy párhuzamosak.*

(*6 pont*)

Megoldás. A feladatot az (ideális egyenessel kibővített) projektív síkon, a Desargues-tétel többszöri alkalmazásával fogjuk igazolni. Ehhez néhány definíciót, és magát Desargues tételét mondjuk ki először.

1. definíció. Az ABC és $A'B'C'$ háromszögek egy *e egyenesre nézve (tengelyesen) perspektívek,* ha az AB és $A'B'$, az AC és $A'C'$, illetve a BC és $B'C'$ egyenespárok P, Q, R metszéspontjai mind rajta vannak az e egyenesen.

Megjegyzés. Az ideális egyenessel kibővített projektív síkon két háromszöget akkor is tengelyesen perspektívnek tartunk a definíció alapján, ha megfelelő oldalpárjaik párhuzamosak (ekkor azok metszéspontjai mind rajta vannak az ideális egyenesen).

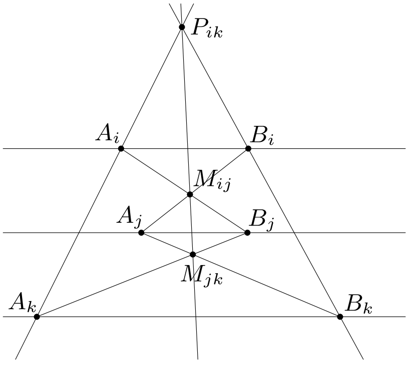
2. definíció. Az ABC és $A'B'C'$ háromszögek egy *S pontra nézve (centrálisan) perspektívek,* ha az AA', a BB', és a CC' egyenesek mind átmennek az S ponton.

Desargues tétele. Ha az ABC és az $A'B'C'$ háromszögek pontra nézve perspektívek, akkor egyenesre nézve is azok, és fordítva is igaz: ha a háromszögek egyenesre nézve perspektívek, akkor pontra nézve is azok.

Ezután térjünk rá a feladat bizonyítására.

Tetszőleges $1 \leqslant i \neq j \leqslant 4$ esetén jelölje P_{ij} az A_iA_j és B_iB_j egyenesek metszéspontját (mivel a megadott szakaszok különböző hosszúságúak, ezért a P_{ij} pontok nem ideális pontok). Legyen továbbá az egymással párhuzamos A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4 egyenesek közös (ideális) pontja D_∞.

Tekintsük az $A_iB_jA_k$ és a $B_iA_jB_k$ (ahol i, j, k tetszőleges különböző $1 \leqslant \leqslant i, j, k \leqslant 4$ indexek) háromszögeket. Mivel a két háromszög a D_∞ pontra nézve perspektív, így Desargues tétele alapján tengelyesen is perspektív, azaz az A_iB_j, A_jB_i, az A_jB_k, A_kB_j, illetve az A_iA_k, B_iB_k egyenespárok M_{ij}, M_{jk} P_{ik} metszéspontjai egy egyenesre esnek (lásd az *ábrát*).



Az i, j, k indexek megfelelő választásával adódik a következő hat darab ponthármasra, hogy az adott ponthármasok mind egy egyenesre esnek: (1) M_{13}, M_{23}, P_{12}; (2) M_{12}, M_{23}, P_{13}; (3) M_{12}, M_{13}, P_{23}; (4) M_{14}, M_{24}, P_{12}; (5) M_{14}, M_{34}, P_{13}, illetve (6) M_{24}, M_{34}, P_{23} mind (külön-külön) egy egyenesre esik.

Továbbá mivel az $A_1A_2A_3$ és $B_1B_2B_3$ háromszögek a D_∞ pontra nézve perspektívek, Desargues tétele alapján tengelyesen is perspektívek, azaz az A_1A_2, B_1B_2, az A_1A_3, B_1B_3, illetve az A_2A_3, B_2B_3 egyenespárok P_{12}, P_{13}, P_{23} metszéspontjai is (akár az imént) egy egyenesre esnek.

Utoljára tekintsük az $M_{12}M_{13}M_{23}$ és $M_{34}M_{24}M_{14}$ háromszögeket.

A fentiek szerint

$$(1+4 \Rightarrow)\ M_{13}M_{23} \cap M_{14}M_{24} = P_{12}, \quad \text{illetve}$$

$$(2+5 \Rightarrow)\ M_{12}M_{23} \cap M_{14}M_{34} = P_{13} \quad \text{és} \quad (3+6 \Rightarrow)\ M_{12}M_{13} \cap M_{24}M_{34} = P_{23},$$

azaz a két háromszög a $P_{12}P_{13}P_{23}$ egyenesre perspektív, de akkor Desargues tétele alapján az $M_{12}M_{13}M_{23}$ és $M_{34}M_{24}M_{14}$ háromszögek pontra nézve is perspektívek, azaz az $M_{12}M_{34}$, $M_{13}M_{24}$ és $M_{14}M_{23}$ egyenesek valóban egy ponton mennek át.

Megjegyzés (diszkusszió). Előfordulhat az A_i, B_i pontok megfelelő választása esetén, hogy az az S pont, amire nézve az $M_{12}M_{13}M_{23}$ és $M_{34}M_{24}M_{14}$ háromszögek perspektívek az ideális egyenes egy pontja. Ekkor – mivel projektív síkon dolgoztunk – természetesen az $M_{12}M_{34}$, $M_{13}M_{24}$ és $M_{14}M_{23}$ egyenesek párhuzamosak lesznek.

Döbröntei Dávid Bence (Pápa, Türr István Gimn. és Koll., 12. évf.) és
Molnár-Sáska Zoltán (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.)
dolgozata alapján

Összesen 23 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott 21 versenyző, 5 pontos 1. 4 pontos további 1 tanuló dolgozata.

B. 4903. Határozzuk meg azokat az a, b, c, d pozitív egész számokat, amelyekre teljesül, hogy $abcd-1 \mid a+b+c+d$.

(*4 pont*) Javasolta: *Szoldatics József* (Budapest)

Megoldás. A szimmetria miatt feltehetjük, hogy $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$. A számnégyesben szereplő 1-esek száma szerint öt eset lehetséges.

1. eset: a, b, c és d közül mind a négy egyenlő 1-gyel.

Ekkor $abcd-1=0$, tehát $a+b+c+d=0$ kellene, hogy legyen, de ez nem teljesül.

2. eset: a, b, c és d közül három egyenlő 1-gyel. Ekkor a megoldás elején tett feltevésünk miatt $a=b=c=1$. Ezt behelyettesítve ezt kapjuk: $d-1 \mid d+3$. Ekkor $d-1 \mid d+3-(d-1)=4$ is fennáll.

Mivel d pozitív egész, ezért a következő lehetőségek vannak: $d-1=1$, azaz $d=2$, és ez megoldás is; $d-1=2$, azaz $d=3$, ez is megoldás; végül $d-1=4$, azaz $d=5$, ami szintén megoldás. Mivel a 4-nek csak ez a három pozitív egész osztója van, ezért itt nem lesz több megoldás.

Ezentúl használni fogjuk a következő két összefüggést: ha $abcd-1 \mid a+b+$ $+c+d$, akkor $abcd-1 \leqslant a+b+c+d$ (ez pozitív egészek esetén teljesül); illetve $a+b+c+d \leqslant 4d$.

3. eset: a, b, c és d közül kettő egyenlő 1-gyel: $a=b=1$. Ekkor $cd-1 \mid c+d+2$. Ezt az esetet tovább bontjuk c értéke szerint.

Ha $c=2$, akkor felírhatjuk ezt az összefüggést:

$$2d-1 \leqslant d+4,$$

$$d \leqslant 5.$$

Itt a $d=2,3,4,5$ eseteket megvizsgálva azt kapjuk, hogy a $d=2$ és a $d=5$ ad megoldást.

Ha $c=3$, akkor ezt írhatjuk fel:

$$3d-1\leqslant d+5,$$
$$d\leqslant 3.$$

Mivel $c\leqslant d$, ezért itt csak a $d=3$ eset lehetséges, ami megoldást is ad.

Ha pedig $c>3$, akkor ezt írhatjuk fel:

$$4d-1\leqslant cd-1\leqslant c+d+2\leqslant 2d+2,\quad \text{amiből}$$
$$2d\leqslant 3.$$

Mivel $d>3$, ezért ez nem lehetséges.

Tehát itt megtaláltuk az összes megoldást.

4. eset: a, b, c és d közül egy egyenlő 1-gyel: $a=1$. Ekkor $bcd-1\mid b+c+d+1$. Mivel $2\leqslant b\leqslant c\leqslant d$, felírhatjuk a következő összefüggést:

$$2\cdot 2\cdot d-1=4d-1\leqslant bcd-1\leqslant a+b+c+d=b+c+d+1\leqslant 3d+1,\quad \text{amiből}$$
$$4d-1\leqslant 3d+1,$$
$$d\leqslant 2.$$

Mivel $d>1$, ezért itt csak a $d=2$ eset lehetséges, ami ad is egy megoldást $b=c=2$ esetén.

5. eset: a, b, c és d közül egyik sem 1. Mivel $2\leqslant a\leqslant b\leqslant c\leqslant d$, ezért felírható az alábbi összefüggés:

$$2\cdot 2\cdot 2\cdot d-1=8d-1\leqslant abcd-1\leqslant a+b+c+d\leqslant 4d,\quad \text{amiből}$$
$$8d-1\leqslant 4d,$$
$$4d\leqslant 1.$$

Ennek pedig $2\leqslant d$ esetén nem lesz megoldása, tehát itt nincs megoldás.

Összefoglalva, a következő megoldásokat kaptuk: $a=1,\ b=1,\ c=1,\ d=2$; $a=1,\ b=1,\ c=1,\ d=3$; $a=1,\ b=1,\ c=1,\ d=5$; $a=1,\ b=1,\ c=2,\ d=2$; $a=1,\ b=1,\ c=2,\ d=5$; $a=1,\ b=1,\ c=3,\ d=3$; $a=1,\ b=2,\ c=2,\ d=2$.

Kálóczi Kristóf (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.)

Megjegyzések. 1. Egy másik, többek által használt gondolatmenet: feltesszük, hogy $a\leqslant b\leqslant c\leqslant d$, amiből $abcd-1\leqslant a+b+c+d\leqslant 4d$. Ebből $abcd\leqslant 4d+1\leqslant 5d$, azaz $abc\leqslant 5$ adódik. Innen (szintén esetszétválasztással) megkaphatóak a megoldások.

2. Több beküldőnél előfordult a következő hiba: az oszthatóság definíciója alapján felírták, hogy $(abcd-1)k=a+b+c+d$, amiből $abcdk=a+b+c+d+k$, továbbá a szimmetria miatt feltették, hogy $k\geqslant d\geqslant c\geqslant b\geqslant a$, amiből az $abcdk\leqslant 5k$ összefüggést kapták. Végül k-val osztva az $abcd\leqslant 5$ egyenlőtlenséghez jutottak. Ezt vizsgálva azonban nem az összes megoldást kapjuk meg. A hiba ott van a gondolatmenetben, hogy $k\geqslant d$ nem feltétlenül teljesül.

3. Honlapunkon egy harmadik megoldás olvasható.

139 dolgozat érkezett. 4 pontos 81, 3 pontos 29, 2 pontos 15, 1 pontos 10, 0 pontos 4 dolgozat.