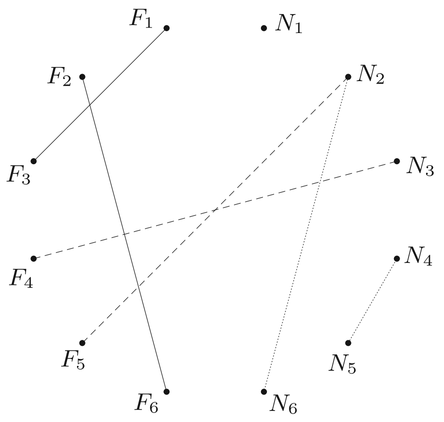


c) A 6 férfiversenyző közül két férfi pároshoz kell kiválasztani játékosokat, úgy, hogy egy férfi játékos nem szerepelhet mindkét párosban (*ábra*).

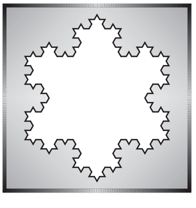
Ez $n_{\mathrm{F}} = \frac{6\cdot5}{2}\cdot\frac{4\cdot3}{2} = 90$-féleképpen lehetséges. Hasonlóan $n_{\mathrm{N}} = 90$-féleképpen lehet kiválasztani a női páros tagjait a 6 nő közül. A vegyes páros tagja bármelyik nő és bármelyik férfi lehet, mert eddig mindenki legfeljebb egy párosban szerepel. Így a két vegyes páros tagjait $n_{\mathrm{V}} = 6\cdot6\cdot5\cdot5 = 900$-féleképpen lehet kiválasztani. Összesen tehát $n_{\ddot{\mathrm{o}}} = n_{\mathrm{F}}\cdot n_{\mathrm{N}}\cdot$ $\cdot\, n_{\mathrm{V}} = 7\,290\,000$ féle kiválasztás lehetséges.

d) Ha Tímea egyik párosba sem kerül be, akkor a női párosok tagjait csak 5 nő közül választhatjuk ki, így $n_{\mathrm{N1}} = \frac{5\cdot4}{2}\cdot\frac{3\cdot2}{2} = 30$. A vegyes páros tagjait 6 férfi és 5 nő közül választhatjuk, vagyis $n_{\mathrm{V1}} = 6\cdot5\cdot5\cdot4 = 600$. Tehát a kedvező esetek száma: $n_{\mathrm{K}} = n_{\mathrm{F}}\cdot n_{\mathrm{N1}}\cdot n_{\mathrm{V1}} = 1\,620\,000$.

Így annak az esélye, hogy Tímea egyik párosba sem kerül be:

$$p = \frac{n_{\ddot{\mathrm{o}}}}{n_{\mathrm{K}}} = \frac{1\,620\,000}{7\,290\,000} = 0{,}2 = 20\%.$$

Lorántfy László
Dabas



C gyakorlat megoldása

C. 1444. *Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget:*

$$x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 8x \leqslant 96.$$

I. megoldás. Alakítsuk a fenti egyenlőtlenséget a következőképpen:

$$x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 8x - 96 \leqslant 0.$$

Mint ismeretes, amennyiben egy egész együtthatós polinomnak gyöke egy egész szám, úgy az a konstans tagjának osztója. Így érdemes megvizsgálni a -96 osztóit, annak reményében, hogy találunk köztük megoldást.

Első esetben $-96 = (-1) \cdot 96 = -96 = 1 \cdot (-96)$. Behelyettesítve láthatjuk, hogy egyik osztó sem megoldás.

Második esetben $-96 = (-2) \cdot 48 = 2 \cdot (-48)$. Behelyettesítve láthatjuk, hogy $x = -2$ gyöke az egyenletnek. Polinomosztással a következő harmadfokú függvényt kapjuk:

$$\left(x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 8x - 96\right) : (x+2) = x^3 - 6x^2 + 20x - 48.$$

A fenti elvet tovább alkalmazva: $-96 = 4 \cdot (-24)$ és $-96 = (-4) \cdot 24$. Behelyettesítve láthatjuk, hogy $x = 4$ szintén gyöke az egyenletnek. Egy további polinomosztással a már megkapott harmadfokú függvény alapján a következőt kapjuk:

$$\left(x^3 - 6x^2 + 20x - 48\right) : (x-4) = x^2 - 2x + 12.$$

Azonban ezen másodfokú polinom esetén a diszkrimináns értéke $4 - 4 \cdot 12 < 0$, vagyis nincs valós gyöke. Tehát az $f(x) = x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 8x - 96$ függvény görbéje pontosan két pontban metszi az x-tengelyt. Mivel $f(-3) = f(5) = 189 > 0$ és $f(0) = -96 < 0$, ezért a függvény a $(-\infty; -2)$ és az $(4; \infty)$ intervallumon pozitív értékeket, míg a $(-2; 4)$ intervallumon negatív értékeket vesz fel. Minthogy grafikonja máshol nem metszi az x-tengelyt, így értéke nem is változhat pozitívról negatívra vagy fordítva egyéb helyeken. Mivel a feladatban szereplő egyenlőtlenség megengedi az egyenlőséget is, ezért $-2 \leqslant x \leqslant 4$ esetén teljesül.

Pszota Máté (Révkomárom, Selye János Gimn., 12. évf.)

Megjegyzés. Sokan számítógépes programmal ábrázolták az $f(x)$ függvényt, és úgy olvasták le a két gyököt. Ám ekkor még egyrészt ellenőrzéssel meg kell róla győződni, hogy valóban gyök a két leolvasott érték (hiszen lehetne a valódi gyök mondjuk $-2{,}00004$ is), másrészt be kell látni, hogy más megoldás nincsen (hiszen bármilyen programmal is ábrázoljuk, mindenképpen csak egy adott intervallumon látszódik a függvény görbéje).

II. megoldás. Azonos átalakításokkal az egyenlőtlenség bal oldala a következő szorzattá alakítható:

$$(x^2 - 2x)\left((x^2 - 2x) + 4\right).$$

Vezessünk be új változót: $y = x^2 - 2x = x(x-2)$, ezzel a megoldandó egyenlőtlenségünk a következő egyszerű alakot ölti:

$$y^2 + 4y \leqslant 96.$$

Adjunk az egyenlőtlenség mindkét oldalához 4-et, így teljes négyzetet kapunk:

$$(y+2)^2 \leqslant 100.$$

Ennek megoldása: $-10 \leqslant y + 2 \leqslant 10$, amiből $0 \leqslant y \leqslant 8$ vagy $-12 \leqslant y < 0$.

Térjünk vissza a régi változóra. A következő egyenlőtlenségeket kapjuk:

$$-12 \leqslant x(x-2) < 0, \quad \text{illetve} \quad 0 \leqslant x(x-2) \leqslant 8.$$

Az $f(x) = x(x-2)$ függvény negatív és zéró értéket a $[0; 2]$ intervallumon vesz fel, minimális értéke $f\left(\frac{0+2}{2}\right) = f(1) = -1$, tehát minden pontban igaz, hogy

$x(x-2) \geqslant -12$. Vagyis az első egyenlőtlenség $x(x-2) < 0$, azaz $x \in (0;2)$ esetén teljesül.

A vizsgált függvény pozitív értékeket az előbbi intervallumon kívül, vagyis $x \notin (0,2)$ esetén vesz fel, itt teljesülni kell az $x(x-2) \leqslant 8$ egyenlőtlenségnek. Az $x^2 - 2x - 8 = 0$ egyenlet gyökei

$$\frac{2-\sqrt{4+4\cdot 8}}{2} = -2 \quad \text{és} \quad \frac{2+\sqrt{4+4\cdot 8}}{2} = 4,$$

tehát ha $x \notin (0,2)$, akkor az $x(x-2) \leqslant 8$ egyenlőtlenség megoldása $x \in [-2;0] \cup$ $\cup\, [2;4]$.

Végül az eredeti egyenlőtlenség megoldása $x \in [-2;4]$.

Werner András (Budapest, Piarista Gimn., 10. évf.)

Megjegyzés. Sokan oldották meg a honlapunkon is látható módon a feladatot: az egyenlőtlenséget

$$(x-1)^4 + 2(x-1)^2 - 99 \leqslant 0$$

alakra hozva, majd bevezetve az $y = (x-1)^2$ változót.

205 dolgozat érkezett. 5 pontos 112, 4 pontos 33, 3 pontos 17, 2 pontos 9, 1 pontos 19, 0 pontos 10 dolgozat. Nem versenyszerű 5 dolgozat.

Matematika feladatok megoldása

B. 4891. *Az S_1, S_2, S_3 körök páronként kívülről érintik egymást. Legyenek A, B és C rendre az S_1 és S_2, S_1 és S_3, S_2 és S_3 körök közös pontjai. Az AB egyenes ismételten elmetszi az S_2 és S_3 köröket a D, illetve az E pontokban. A DC egyenes újabb metszéspontja az S_3 körrel legyen az F pont. Bizonyítsuk be, hogy a DEF háromszög derékszögű.*

(*5 pont*) (*Kvant*)

Megoldás. Használjuk az *ábra* jelöléseit.

Az $O_1O_2O_3$ háromszög oldalait az A, B, C pontok úgy osztják fel, mint a háromszög beírt körének érintési pontjai, hiszen $O_1A = O_1B = r_1$, $O_2A = O_2C =$ $= r_2$ és $O_3B = O_3C = r_3$. Ezért az ABC háromszög körülírt köre éppen az $O_1O_2O_3$ háromszög beírt köre.

Legyen $ADC\sphericalangle = \alpha$. Ekkor a kerületi és középponti szögek tétele miatt az AC ívhez tartozó középponti szög: $AO_2C\sphericalangle = 2\alpha$. Mivel K a beírt kör középpontja, O_2A és O_2C pedig érintők, azért $O_2CK\sphericalangle = 90°$ és $O_2AK\sphericalangle = 90°$, mert az érintők merőlegesek a sugarakra. Ebből adódik, hogy az AO_2CK négyszögben, ami egy