Gyakorló feladatsor
emelt szintű matematika érettségire

I. rész

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket (ha a megoldás pontos értéke nem racionális szám, akkor közelítő értéket is adjunk):

a) $3^{2x+2}+9^{2x+1}=4.$ (*5 pont*)

b) $\log_2(x-3)+\big(\log_4(8x-24)\big)^2=6{,}25.$ (*7 pont*)

2. Egy háromszög oldalhosszai olyan számtani sorozat első három eleme, amelynek második eleme 6.

a) Adjuk meg azt a számhalmazt (a legegyszerűbb alakú) pontos értékekkel, amelynek elemei az ilyen háromszögek területei. (*7 pont*)

b) Van-e az ilyen háromszögek között maximális területű, van-e minimális területű? Ha igen, akkor melyik az? (*2 pont*)

c) Van-e az ilyen háromszögek között két olyan, amelyeknél a beírt kör sugara egyenlő? Ha igen, akkor melyek azok? (*3 pont*)

3. Egy ügyfél egy bankból 1980-ban felvett egymillió Ft kölcsönt, évi 5%-os kamatra, 20 évi, évente egyszeri, azonos összegű törlesztési kötelezettséggel.

a) Mennyi volt az évi törlesztési összeg, 10 Ft-ra kerekítve? (*5 pont*)

A kölcsönszerződést nem lehetett megváltoztatni a növekvő infláció ellenére sem, pedig 1992-ben (12 évvel a tárgyalt hitelfelvétel után) már a bank adott 10%-os kamatot a nála elhelyezett pénzre. Ezért a bank a fent leírt kölcsön felvevőjének felajánlotta, hogy hátralevő tartozását megszüntetheti, ha az éppen fennálló tartozásának 90%-át kifizeti.

b) Mennyivel tartozott az ügyfél 12 év leteltével? (*4 pont*)

c) Mennyit helyezzen el az ügyfél egy (másik) bankban, hogy abból az eredeti törlesztő részletét évente kivéve és 10%-os kamattal számolva 8 év alatt megszüntesse a tartozását? Érdemes-e elfogadni a bank ajánlatát, vagy kisebb összegnek egy (másik) bankban való elhelyezésével érdemes tovább törleszteni a tartozását? (*4 pont*)

4. Jelölje k azt a kört, amelyik érinti a koordináta-rendszer x tengelyét, és érinti az $f(x)=\frac{1}{3}(x^2+20)$ $(x\in\mathbb{R})$ függvény grafikonját a függvénynek a 2 abszcisszájú pontjában. (A függvény grafikonjának az érintése egy pontban azt jelenti, hogy az érintő kör ebben a pontban érinti a grafikonhoz az adott pontban húzott érintőt, és az érintő elválasztja a grafikont és a kört.)

a) Írjuk fel a k kör egyenletét. (*7 pont*)

b) Mennyi annak a korlátos síkidomnak a területe, amelyet az y tengely, az x tengely, a k kör és a függvény grafikonja határol? (*7 pont*)

II. rész

5. *a*) Oldjuk meg az X halmazra az $A \setminus X = B$; $A \cup X = C$ egyenletrendszert, ahol az adott A, B, C halmazokra $B \subset A \subset C$ teljesül. (*6 pont*)

b) Igazoljuk, hogy az A és B ítéletekre az $(A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$ és A ítéletek ekvivalensek. (*6 pont*)

c) Igaz-e, hogy $\forall\, H \subset \mathbb{R}^+$ és $\forall\, h \in H$ esetén $\exists\, n \in \mathbb{N}^+$ úgy, hogy $\frac{1}{n} < h < n$? Ha nem, akkor adjunk rá példát, ha igen, akkor írjuk le, hogy az ilyen n függ-e a h-tól, vagy nem? Állításunkat bizonyítani nem kell. (*4 pont*)

6. *a*) Hány olyan 2018 pontú, páronként nem izomorf fagráf van, amelyekben nincs háromnál több élt tartalmazó út? (*11 pont*)

b) Hol helyezkednek el a koordináta-rendszerben azoknak a 2018 pontú fagráfoknak a pontjai, amelyek mindegyikének pontja az origó, és minden élének a két végpontja olyan $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ pont, amelyre x_1, y_1, x_2, y_2 egész számok, és az $(x_1 - x_2)$, $(y_1 - y_2)$ számoknak az egyike 0, a másik 0, 1, vagy -1. (*5 pont*)

7. Egy társaság 5 nőből és 5 férfiből áll, és köztük két házaspár van.

a) Hányféleképpen ülhetnek le egy kerek asztal köré, ha minden nő mindkét oldalán férfi ül? Két leülés különböző, ha van olyan személy a társaságban akinek a két leülésnél legalább az egyik oldal (jobb vagy bal) felől nem ugyanaz ül, mint a másik leülésnél. (*4 pont*)

b) Hányféleképpen ülhetnek le egy kerek asztal köré, ha minden nő mindkét oldalán férfi ül, és mindkét férj a felesége jobb oldalán ül (két leülés különböző olyan módon, mint az *a*) esetnél). (*4 pont*)

c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a társaság úgy ül le, hogy minden nő mindkét oldalán férfi ül, de egyik férfi sem ül a felesége mellett? (*8 pont*)

8. Legyen

$$f(x) = \begin{cases} \sin 2x, & \text{ha } \ 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ \left|2 \sin (x - \pi)\right|, & \text{ha } \ \pi \leqslant x \leqslant 3\pi. \end{cases}$$

a) Differenciálható-e a függvény az $x_0 = \pi$ pontban? (*4 pont*)

b) Adjuk meg azt a legbővebb halmazt, amelyen a függvény szigorúan monoton növekvő, és amelyen szigorúan monoton csökkenő. (*6 pont*)

c) Adjuk meg bizonyítás nélkül a függvény szélsőértékeinek helyét és értékét, de jelezzük nem csak azt, hogy minimum vagy maximum, hanem a szélsőértéknek a szigorú, a helyi és az abszolút tulajdonságát is. (*6 pont*)

9. Egy könyvesboltban három kiadónak (jelölésük legyen A, B, C) mind a négy középiskolai évfolyam részére szóló matematika tankönyve megtalálható, áruk az évfolyamtól nem, csak a kiadótól függően rendre 1500 Ft, 1800 Ft és 2000 Ft. A könyvekről a boltban levő példányok számára vonatkozóan az alábbi adatok állnak rendelkezésünkre.

9. évfolyamos:	A-ból 102 db, B-ből 120 db, C-ből 78 db van;
10. évfolyamos:	összesen 220 db van, áruk átlagosan 1750 Ft;
11. évfolyamos:	összesen 210 db van, áruk átlagosan 1760 Ft;
12. évfolyamosról:	nincs adat,

de tudjuk, hogy a négy évfolyaméból együtt (tehát az összes könyv) 810 db van, áruk átlagosan 1760 Ft. (Az átlagok egészre kerekített értékek).

a) Mennyi a raktáron levő 9. évfolyamos könyvárak módusza, mediánja, átlaga és szórása? (*6 pont*)

b) Mit tudunk a fenti adatok alapján a 12. évfolyamos könyvek számáról és átlagáráról? (*5 pont*)

c) Ha az A kiadó raktárban levő könyveinek a száma 305, akkor mennyi a B és a C kiadók raktárban levő könyveinek száma, egészre kerekítve (az átlagok is egészre kerekített értékek voltak)? (*5 pont*)

Kántor Sándor
Debrecen

Helyesbítés

A 2018/1. számú feladatsor **8.***b*) feladatának megoldásában az első bekezdésbeli esetvizsgálat nem teljes. Ennek részletezése helyett mutatunk egy egyszerűbb megoldást. Köszönjük *Kántor Sándornak.*

Megoldás. Nevezzük a nem kiválasztott három versenyző sorszámát „visszamaradónak”. Az $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ számsorban a hat kiválasztott számot a három visszamaradó szám csak úgy választhatja szét, hogy legalább két helyen szomszédosak a kiválasztott számok. Ha a visszamaradó számok nem választják szét a kiválasztottakat (tehát a visszamaradók éppen az $1, 2, 3$ vagy a $7, 8, 9$), akkor is van legalább két helyen szomszédos szám.

Ha a szomszédos kiválasztott számok között vannak olyanok, melyekre $a < a+1 < b < b+1$ teljesül, akkor $a+(b+1) = (a+1)+b$, tehát van egyező összeg. Ha nincsenek ilyenek, akkor a két-két szomszédos szám az a, $a+1$ és az $a+1$, $a+2$. Ekkor a maradék három kiválasztott számot ezektől és egymástól is elválasztja egy-egy visszamaradó szám. Tehát van két kiválasztott szám, melyre vagy $a < a+1 < a+2 < b < b+2$, vagy $b-2 < b < a < a+1 < a+2$. Az első esetben $a+(b+2) = (a+2)+b$, a másodikban is lesz egyező összeg. Tehát Botondnak nincs igaza.

Megoldásvázlatok a 2018/2. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *Egy bolthálózat húszéves fennállása alkalmából azzal kedveskedik a vásárlóknak, hogy* 20% *kedvezményt kapnak vásárlásuk összegéből, ha* 4 *kockával dobva a dobott számok összege legalább* 20.