Fizika feladatok megoldása

P. 4956. *Egy csillagászati távcső f fókusztávolságú parabolatükrének tengelye egy adott pillanatban éppen függőleges. A tükör pereme ekkor H-val magasabban van, mint a tükör legmélyebb pontja. Egy m tömegű kis test a tükör peremétől indulva súrlódásmentesen lecsúszik a tükör középpontjáig. Mekkora erővel nyomja ott a tükröt?*

(*5 pont*) A *Kvant* nyomán

I. megoldás. A súrlódásmentesen lecsúszó test sebességét a parabolatükör legmélyebb pontjában az energiamegmaradás törvényéből számíthatjuk ki:

$$mgH = \frac{1}{2}mv^2, \qquad \text{ahonnan} \qquad v = \sqrt{2gH}.$$

A pálya legalsó pontjának közelében a test mozgása egyenletes körmozgással közelíthető. A körpálya sugara (a parabola simulókörének R sugara) megegyezik a parabola p paraméterével, ami a fókusztávolság kétszerese (lásd pl. `https://hu.wikipedia.org/wiki/Fókusztávolság`):

$$R = p = 2f.$$

(Ugyanezt az összefüggést a gömbtükör fókusztávolságának ismert képlete alapján is megkaphatjuk.)

A körmozgás dinamikai feltétele (az *1. ábra* jelöléseit használva):

$$N - mg = m\frac{v^2}{R},$$

ahonnan a keresett nyomóerő:

$$N = mg + m\frac{v^2}{2f} = mg + m\frac{2gH}{2f} = mg\left(1 + \frac{H}{f}\right).$$

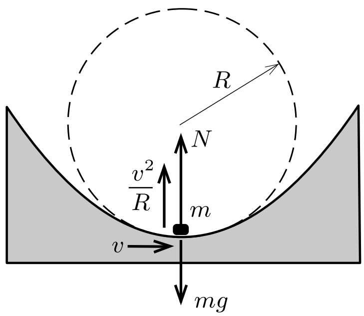
Kolontári Péter (Pécs, Leővey Klára Gimn., 12. évf.)

II. megoldás. Vizsgáljuk meg, hogy hány metszéspontja lehet egy f fókusztávolságú parabolának és a parabolát a talppontjánál érintő r sugarú körnek! A görbék egyenlete

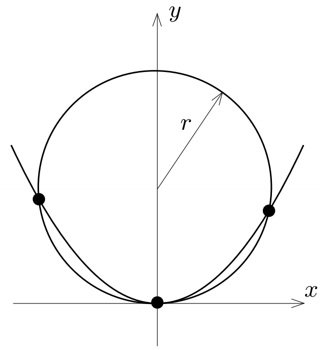
$$4fy = x^2, \qquad \text{illetve} \qquad x^2 + (y-r)^2 = r^2,$$

ahonnan a metszéspont(ok) y koordinátáját megadó összefüggés:

$$y^2 = 2y(r - 2f).$$



1. ábra



2. ábra

Innen látható, hogy ($y \geqslant 0$ miatt) a két görbének csak akkor lesz egynél több metszéspontja, ha $r - 2f > 0$ (*2. ábra*). A legnagyobb kör, amelynek csak egyetlen közös pontja van a parabolával (ez felel meg a simulókörnek) $R = 2f$ sugarú.

Az energiamegmaradás alapján a test sebessége a pályájának legalsó pontjában $v = \sqrt{2gH}$. Newton II. törvénye szerint

$$N - mg = m\frac{2gH}{2f},$$

innen a nyomóerő

$$N = mg\frac{H+f}{f}.$$

Póta Balázs (Győr, Révai M. Gimn., 11. évf.)

III. megoldás. A parabola talppontjának közvetlen közelében a test vízszintes irányú sebességét állandónak, $v = \sqrt{2gH}$ nagyságúnak tekinthetjük, a vízszintes irányú elmozdulást tehát minden pillanatban az

$$x(t) = vt = t\sqrt{2gH}$$

összefüggésből számíthatjuk ki. Másrészt tudjuk, hogy a tükör forgásfelületének vezérgörbéje egy olyan parabola, amelynek egyenlete:

$$y = \frac{x^2}{4f}.$$

Ebből a két egyenletből megkapjuk (közelítőleg) a test függőleges irányú elmozdulását az idő függvényében:

$$y(t) = \frac{x(t)^2}{4f} = \frac{1}{2}\left(\frac{H}{f}g\right)t^2 \equiv \frac{a}{2}t^2.$$

Látjuk, hogy a kis test $a = Hg/f$ nagyságú, függőlegesen felfelé irányuló gyorsulással mozog. Ilyen mozgást az

$$N - mg = ma$$

mozgásegyenlet szerint

$$N = mg + ma = mg\left(1 + \frac{H}{f}\right)$$

erő képes létrehozni, tehát ekkora erővel nyomja a tükör a kis testet, és ugyanekkorával nyomja az is a tükröt.

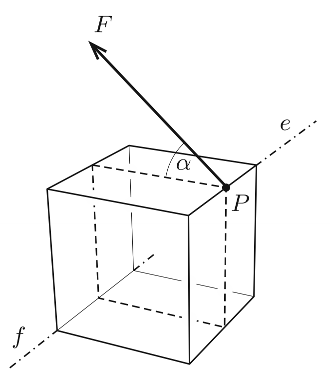
Berke Martin (Zalaegerszegi Zrínyi M. Gimn., 12. évf.)
dolgozata alapján

45 dolgozat érkezett. Helyes 40 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 4, hibás 1 dolgozat.

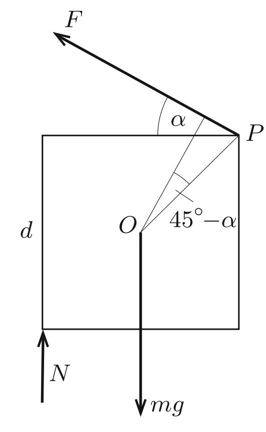
P. 4964. *Legalább mekkora erővel lehet felborítani egy jégen csúszó jégkockát? (A súrlódás elhanyagolható.)*

(*5 pont*) *Példatári feladat*

Megoldás. Belátható, hogy a csúszó jégkocka akkor borítható fel a legkönnyebben, ha a borulást előidéző erő a kocka egyik felső e élének P felezőpontjában, az e élre merőleges (függőleges) síkban hat. Határesetben, valamekkora F nagyságú és a vízszintessel alkalmasan választott α szöget bezáró erő hatására a jégkocka még éppen nem billen meg az e-vel átellenes f él körül, és függőleges irányban sem gyorsul. F-et bármilyen kevéssel meghaladó nagyságú erő hatására a jégkocka megbillen, a tömegközéppontja megemelkedik, és a továbbiakban ezek a mozgások egyre gyorsabban folytatódnak, tehát a jégkocka felborul (*1. ábra*).



1. ábra



2. ábra

A jégkockára ható erők (az F erő, az mg nehézségi erő és az f élnél ható, a talaj által kifejtett függőleges irányú N nyomóerő) mindegyike az e élre merőleges síkban hat. Tekintsük ezeket a (síkbeli) erőket a felborulás határhelyzetében (*2. ábra*).

A d oldalélű kocka O tömegközéppontjára felírt forgatónyomatékok összege nulla:

$$N\frac{d}{2} = F\cos\left(45^\circ - \alpha\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}d.$$

A tömegközéppont függőleges irányú gyorsulása nulla, így

$$mg - N - F\sin\alpha = 0.$$

Ezekből (N kiküszöbölése után) az F erőre α függvényében

$$F(\alpha) = \frac{mg}{\sin\alpha + \sqrt{2}\cos(45^\circ - \alpha)} = \frac{mg}{2\sin\alpha + \cos\alpha}$$

adódik. Ezen kifejezés minimumát, vagyis a nevezőjének maximumát keressük.

A $2\sin\alpha + \cos\alpha$ kifejezés legnagyobb értéke $\sqrt{5}$, amit $\alpha \approx 1{,}1$ radiánnál, vagyis kb. 63°-nál vesz fel*. A szélsőértéket differenciálszámítással, trigonometrikus átalakítások felhasználásával, vagy elemi geometriai megfontolásokkal is meg lehet határozni.

A szabadon csúszó jégkocka felborításához tehát legalább $F = \frac{mg}{\sqrt{5}}$ erő szükséges, ez a jégkocka súlyának kb. 47 százaléka.

Póta Balázs (Győr, Révai M. Gimn., 11. évf.)
dolgozata alapján

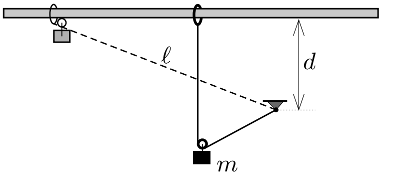
58 dolgozat érkezett. Helyes 13 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 5, hiányos (1–3 pont) 32, hibás 4, nem versenyszerű 4 dolgozat.

P. 4972. *Egy ℓ hosszúságú, könnyű és nyújthatatlan fonál egyik végét felfüggesztjük, a másikat pedig egy kicsiny gyűrűhöz kötjük, amely súrlódásmentesen csúszhat egy – a felfüggesztési pont felett $d < \ell$ magasságban található – vízszintes rúdon. Az ily módon elhelyezett fonálra kifeszített állapotban egy kicsiny csiga közvetítésével m tömegű súlyt akasztunk a rúd közvetlen közelében, majd a rendszert magára hagyjuk.*

a) Mekkora lesz a test sebessége a pálya legalsó pontjában?

b) Milyen görbe mentén mozog a súly?

c) Mekkora erő feszíti a fonalat a pálya legalsó pontjánál?

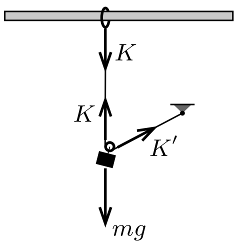


(*5 pont*)

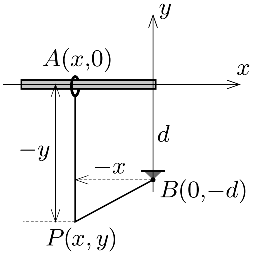
Közli: *Németh Róbert,*
Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn.

Megoldás. Mivel a kicsiny gyűrű súrlódásmentesen csúszhat a vízszintes rúdon, a rúd és csiga közötti fonál a mozgás első szakaszában (amíg a test el nem éri pályájának legalsó pontját) folyamatosan függőleges lesz. Ha ez nem teljesülne, akkor az *1. ábrán* látható K erőnek lenne vízszintes komponense is, ami az elhanyagolható tömegű gyűrűt nagyon nagy (határesetben „végtelen nagy") gyorsulással mozgatná; ez nyilván nem lehetséges. A csiga és a rögzített végpont közötti fonáldarabban ható K' erő kicsiny (elhanyagolható tehetetlenségi nyomatékú) csiga esetében K-val azonos nagyságú, ellenkező esetben a csigára ható eredő forgatónyomaték „végtelen nagy" szöggyorsulást eredményezne.

*Lásd pl. `http://www.wolframalpha.com/input/?i=maximum+2sinx%2Bcosx`.



1. ábra



2. ábra

b) Határozzuk meg először az m tömegű test pályájának alakját! Vegyünk fel egy olyan derékszögű koordináta-rendszert, amelynek x tengelye illeszkedik a rúdra, az y tengely $(0,-d)$ pontja pedig a fonál gyűrűzetlen felfüggesztési pontja (*2. ábra*). Legyen $P(x,y)$ a test pályájának egy tetszőleges pontja a 3. síknegyedben ($x\leqslant 0$ és $y\leqslant 0$.)

A fonál ismert hosszát kifejezhetjük a P pont koordinátáival:

$$AP+PB=-y+\sqrt{x^2+(-y-d)^2}=\ell,$$

ahonnan algebrai átalakítások után

$$y=\frac{x^2}{2(\ell-d)}-\frac{\ell+d}{2}$$

adódik. Ebből leolvasható, hogy a pálya egyenlete egy parabolát határoz meg. A parabola tengelye függőleges, paramétere $p=\ell-d$, fókusztávolsága tehát

$$f=\frac{p}{2}=\frac{(\ell-d)}{2}.$$

A parabola csúcspontja a rúd (vagyis az x tengely) alatt, attól

$$h=\frac{\ell+d}{2}$$

távolságra található.

a) A pálya legalsó pontja a rúd alatt h mélységben található. A rúdtól kezdősebesség nélkül induló m tömegű test sebessége a legalsó pontban (a mechanikai energiamegmaradás tétele szerint):

$$v=\sqrt{2gh}=\sqrt{g(\ell+d)}.$$

c) A parabola görbületi sugara a pálya legalsó pontjában (a gömbtükörre vonatkozó, ismert optikai összefüggés szerint):

$$R=2f=\ell-d.$$

A test mozgásegyenlete:

$$2K - mg = m\frac{v^2}{R},$$

ahonnan (v és R kiszámított értékeinek behelyettesítése után) megkapjuk a keresett fonálerőt:

$$K = mg\,\frac{\ell}{\ell - d}.$$

Megjegyzés. Ha a pálya legalsó pontját elérve a fonál függőleges része „beleakad" a rögzített felfüggesztésbe, akkor a test a továbbiakban egy negyedkör alakú pályán fog mozogni. Ennek sugara

$$R^* = \frac{\ell - d}{2},$$

a test mozgásegyenlete

$$2K^* - mg = m\frac{v^2}{R^*},$$

ahonnan a fonálerő (a fonál beakadása után):

$$K^* = mg\,\frac{3\ell + d}{2(\ell - d)}.$$

Látható, hogy a fonál beakadásakor a fonálerő (és ezzel együtt a test gyorsulása is) hirtelen, pillanatszerűen megváltozik, ezen fizikai mennyiségeket leíró függvényeknek tehát *szakadása* van.

Kozák András (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., 10. évf.)

64 dolgozat érkezett. Helyes 15 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 19, hiányos (1–3 pont) 29, hibás 1 dolgozat.

P. 4973. *Baintner Géza (1892–1980) egyetemi előadásán szerepelt az a kísérlet, amikor három gumikötél Y alakban van összekötve, és az Y szimmetrikus végeit ellenkező fázisban rezegtetve, a keletkező két hullám kioltotta egymást, a harmadik ág nyugton maradt. Kérdés:* Hová lett a két hullám energiája?

(*4 pont*) *Marx György* (1927–2002) feladata

I. megoldás. A két gumikötelet ellentétes irányú kitérítéssel, ellentétes fázisú rezgésbe hozzuk. Az eredő rezgés amplitúdója ekkor a két részrezgés amplitúdójának különbsége lesz. Ha a két összetevő rezgés amplitúdója megegyezik, a két rezgés „kioltja" egymást, és így a harmadik ág nyugalomban marad. Az Y ágak találkozási pontját (amelyik nem mozog) rögzített pontnak is tekinthetjük, ezért az ide érkező hullámok visszaverődnek, fázisuk egymással is és a beérkező hullámok fázisával is ellentétes lesz. Így a csomóponthoz érkező hullámok energiája nem vész el, a visszavert hullámok energiájában megmarad.

Stiga Viktória (Budapest, Német Nemzetiségi Gimn., 11. évf.)

II. megoldás. A kísérlet kezdetekor (amikor a hullámokat keltjük) az Y szimmetrikus szárainak mozgatása során munkát kell befektetnünk, amelyet a gumikötelek el is tárolnak rugalmas energia, illetve mozgási energia formájában. Ezek után viszont a kötelek végeinek mozgatásakor már nem kell munkát végeznünk (energiát bevinnünk), a munkavégzés időbeli átlaga nulla. A gyakorlatban ez nem egészen pontosan teljesül, hiszen a kötélben ható belső erők munkát végeznek a gumi szerkezetében, amely a gumi hiszterézise folytán hőt fejleszt, melegíti a gumikötelet, továbbá a kötél által megmozgatott levegő is „visz el” energiát. Ha ezektől a veszteségektől eltekintünk, akkor kijelenthetjük, hogy nettó energiabetáplálás a rendszerbe nem történik, hiszen kezeinkkel csak visszaverjük az oda érkező beérkező hullámokat. Az Y középpontja és kezeink között a hullámok csak ide-oda mozognak, következésképpen nincsen nettó betáplált energia, mely el tudna „veszni”.

Póta Balázs (Győr, Révai Miklós Gimn., 11. évf.)

31 dolgozat érkezett. Helyes Guba Zoltán, Póta Balázs, Stefán Boglárka Abigél, Stiga Viktória és Viczián Anna megoldása. Kicsit hiányos (2 pont) 6, hiányos (1 pont) 17, hibás 3 dolgozat.

Fizikából kitűzött feladatok

M. 375. Mérjük meg egy ruhacsipesz szorítóerejét nyílásszögének függvényében!

(*6 pont*) Közli: *Légrádi Imre,* Sopron

G. 625. A toronyóra 1,5 m hosszú nagymutatóján az óra középpontjától a mutató vége felé mászik egy pók egyenletesen, 1 mm/s sebességgel. A pók pontban 12 órakor indul.

a) Mennyit mutat az óra, amikor a pók a mutató végére ér?

A mutató végére érve a pók a maga által szőtt fonálon ereszkedik le, melynek az egyik végét a mutató végéhez rögzíti.

b) Milyen sebességgel szője a fonalat, hogy 13 órakor éppen az indulási helyén legyen?

c) Milyen messze volt a pók az óra tengelyétől háromnegyed egykor?

(*3 pont*)

G. 626. Mennyi annak az ℓ hosszúságú fonálingának a lengésideje (kis kitérések esetén), amelynek fonala középen egy szögbe ütközik, miközben áthalad az inga egyensúlyi helyzetén?

(*3 pont*)