Feladatok 11. évfolyamtól

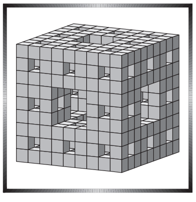
C. 1467. Az O középpontú, $2r$ sugarú és az O-n áthaladó, $r+1$ sugarú körök metszéspontjai legyenek A és B. Mekkora lehet r, ha az AB szakasz a kisebbik kör átmérője?

C. 1468. Igazoljuk, hogy ha a és b nemnegatív számok, akkor

$$\frac{1}{2}(a+b)^2+\frac{1}{4}(a+b)\geqslant a\sqrt{b}+b\sqrt{a}\,.$$

Mikor áll fenn egyenlőség?

Beküldési határidő: 2018. március 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518



A B pontversenyben kitűzött feladatok (4930–4938.)

B. 4930. Bergengóciában, „Turágus” faluban három vallás képviselői a Napimádók, a Holdimádók és a Földimádók. A vallási előírások szerint a szentélynek a falu valamennyi házától vett távolságösszege a lehető legkisebb kell, hogy legyen (függetlenül attól, hogy a házban milyen vallás hívei élnek.) Igazoljuk, hogy ha a Napimádóknak, és a Holdimádóknak már van egy-egy szentélye a faluban, akkor a Földimádók is tudnak építeni egy újabb szentélyt. (A falu sík terepen terül el, és a szentély, illetve a falu házai is pontszerűnek tekintendőek.)

(*3 pont*)

B. 4931. Mutassuk meg, hogy egy háromszög a, b, c oldalaira teljesül, hogy

$$\frac{a^2(b+c)+b^2(a+c)}{abc}>3.$$

(*3 pont*)

B. 4932. A Nagy Meseországi Bestiáriumban az év minden hetére jut egy-egy sárkány. A legfiatalabb sárkány, Alajos 13-fejű, a következő sárkány Botond 14-fejű ... (és így tovább, minden újabb idősebb sárkánynak eggyel több feje van, mint az előzőnek), míg a legidősebb sárkány Zoárd 64-fejű. A meseországi szerzetesek elkészítették a Nagy Sárkánymesés Kódexet. A Kódexbe csak az a mese kerülhet be, amelyben szereplő sárkányok fejeinek a száma pontosan 1001. Bármely két mese esetén van legalább egy olyan sárkány, ami csak az egyik mesében szerepel. Miután a Kódexbe a fenti feltételeknek megfelelő összes lehetséges mesét lejegyezték, a 13-fejű Alajos, vagy a 14-fejű Botond szerepel-e több mesében?

(*5 pont*)

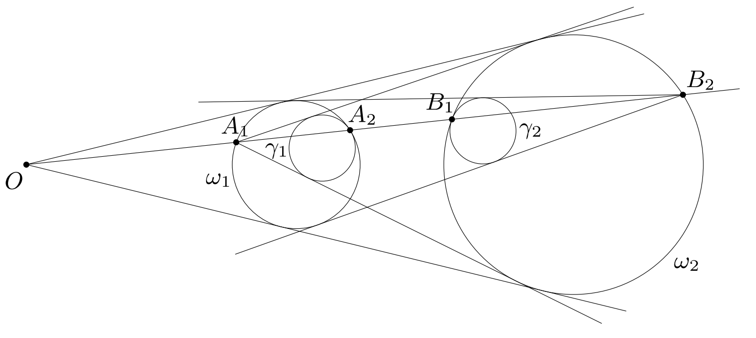
B. 4933. Határozzuk meg az egységnégyzetbe írt maximális kerületű szabályos háromszög területét.

(*4 pont*)

B. 4934. Tetszőleges n és k pozitív egészek esetén jelölje $f(n,k)$ azt, hogy egy $n \times k$-as rácstéglalap egyik átlója hány egységnégyzet belsején halad keresztül. Hány olyan n, k számpár van, amelyre $n \geqslant k$, és $f(n,k) = 2018$?

(*4 pont*)

B. 4935. Adott az O csúcsú szög szárai közé írt két érintő kör, ω_1 és ω_2. Egy, az O pontból induló félegyenes az ω_1 kört az A_1 és a B_1, az ω_2 kört az A_2 és a B_2 pontban metszi úgy, hogy $OA_1 < OB_1 < OA_2 < OB_2$ (lásd az *ábrát*). A γ_1 kör belülről érinti az ω_1 kört és érinti az ω_2 kör A_1 ponton átmenő érintőit. A γ_2 kör pedig belülről érinti az ω_2 kört és érinti az ω_1 kör B_2 ponton átmenő érintőit. Bizonyítsuk be, hogy a γ_1 és γ_2 körök sugara egyenlő.



(*5 pont*) (*Kvant*)

B. 4936. Rögzítsük a k körben az átmérőtől különböző AB húrt, ennek felezőpontja legyen F. A k körvonal A-tól és B-től különböző pontja legyen P. A PF egyenes messe a k kört másodszor X-ben, X tükörképe az AB felezőmerőlegesére Y. Bizonyítsuk be, hogy van a síknak egy olyan pontja, amelyen a PY egyenes P minden helyzetében átmegy.

(*5 pont*) Javasolta: *Surányi László* (Budapest)

B. 4937. A síkon kiválasztunk rácsnégyszögeket úgy, hogy igaz rájuk a következő: akárhogy színezzük a rácspontokat véges sok színnel, mindig van olyan kiválasztott négyszög, amelynek minden csúcsa ugyanolyan színű. Bizonyítsuk be, hogy van végtelen sok olyan kiválasztott négyszög, amelyek közül semelyik kettőnek nincs közös csúcsa.

(*6 pont*) Javasolta: *Surányi László* (Budapest)

B. 4938. Ismert, hogy a tórusz felületére rá lehet rajzolni a 7 pontú teljes gráfot (lásd pl. a Császár-poliédert). Egy sárga görbe bögre oldalán kijelölünk 7 pontot, és bármelyik kettőt össze akarjuk kötni egy-egy görbével úgy, hogy semelyik két görbének ne legyen közös belső pontja. Legalább hány görbét kell ennek eléréséhez átvezetnünk a görbe bögre fülén?

(*6 pont*)

Beküldési határidő: 2018. március 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (716–718.)

A. 716. Az ABC háromszög belsejében, az A-ból induló szögfelezőn felvettünk egy D pontot. Legyen a BD és AC egyenesek metszéspontja E, a CD és AB metszéspontja F. Az ABC háromszög körülírt körét az EF egyenes a P és Q pontokban metszi. Mutassuk meg, hogy ha O a DPQ kör középpontja, akkor OD merőleges BC-re.

Javasolta: *Michael Ren* (Andover, Massachusetts, USA)

A. 717. Egy pozitív egészt *lustának* nevezünk, ha nincs 3-nál nagyobb prímosztója. Mutassuk meg, hogy két szomszédos négyzetszám között legfeljebb két lusta szám lehet.

Javasolta: *Gyenes Zoltán* és *Kós Géza* (Budapest)

A. 718. Jelölje $\mathbb{R}[x,y]$ a kétváltozós, valós együtthatós polinomok halmazát. Azt mondjuk, hogy az $f \in \mathbb{R}[x,y]$ polinomnak az (a,b) számpár *zérushelye,* ha $f(a,b)=0$.

Igaz-e, hogy ha a $p,q \in \mathbb{R}[x,y]$ polinomoknak végtelen sok közös zérushelye van, akkor létezik olyan nem konstans $r \in \mathbb{R}[x,y]$ polinom, ami kiemelhető p-ből és q-ból is?

Beküldési határidő: 2018. március 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518