Matematika feladatok megoldása

B. 4848. *Keressük meg az összes olyan P konvex poliédert, aminek a belsejében létezik egy olyan O pont, hogy P minden O-ra illeszkedő síkkal vett metszete O középpontú paralelogramma.*

(*6 pont*)

Megoldás. Jelölje $\langle XYZ\rangle$ az X, Y és Z pontok által feszített síkot.

Először is belátjuk, hogy P középpontosan szimmetrikus O-ra. Legyen X tetszőleges pont P-ben, és tekintsünk egy OX-re illeszkedő S síkot. A $P\cap S$ síkmetszet a feltétel szerint O középpontú paralelogramma, így tartalmazza X-nek O-ra vonatkozó X' tükörképét. Ebből $X'\in P$ is következik, ami igazolja a középpontos szimmetriát.

Legyen P egy lapjának három egymást követő csúcsa (ilyen sorrendben) A, B és C, az AB és BC élek felezőpontjai X és Y. A pontok O-ra vonatkozó tükörképei értelemszerűen A', B', C', X' és Y'.

Az XY egyenes P határát pontosan az XY szakaszban metszi, ezért $\langle OXY\rangle\cap P$ éppen az $XYX'Y'$ paralelogramma, vagyis az XY' szakasz P határára illeszkedik.

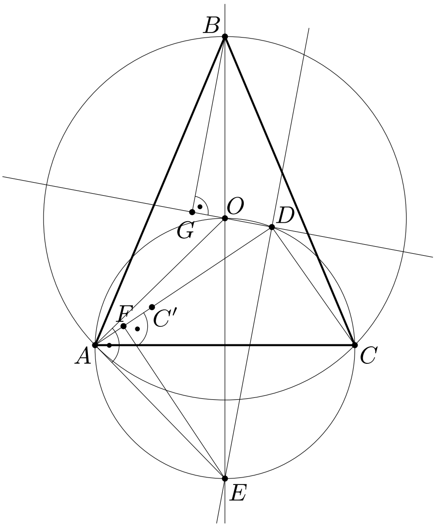
Másrészről az A, B, B' és C' pontok nem egy síkba esnek. Valóban, ha C' illeszkedik az $\langle ABB'\rangle$-ra, akkor $C'\in\langle ABB'\rangle\cap\langle A'B'C'\rangle=A'B'$, ami nem lehet. Így viszont az XY' szakasz az $ABB'C'$ tetraéder két kitérő élének felezőpontját összekötő szakasz, amely a tetraéder, és így egyúttal P belsejében halad. Ezzel ellentmondásra jutottunk, így nem létezik ilyen P poliéder.

Imolay András (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.) dolgozata alapján

21 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott 13 versenyző: Baran Zsuzsanna, Borbényi Márton, Gáspár Attila, Hoffmann Balázs, Imolay András, Janzer Orsolya Lili, Kerekes Anna, Kocsis Júlia, Nagy Nándor, Schrettner Jakab, Simon Dániel Gábor, Tóth Viktor, Weisz Máté. 5 pontos 4, 4 pontos 1, 3 pontos 2, 2 pontos 1 dolgozat.

B. 4863. *Az ABC háromszögben $AB=BC$. A D pont úgy helyezkedik el a háromszög belsejében, hogy $ADC\sphericalangle=2ABC\sphericalangle$. Bizonyítsuk be, hogy a B pontnak az $ADC\sphericalangle$ külső szögfelezőjétől való távolsága az AD és DC szakaszok számtani közepe.*

(*5 pont*) (*Kvant*)



Megoldás. Legyen O az $ABC\triangle$ körülírt körének középpontja, és használjuk az *ábra* jelöléseit. A kerületi- és középponti szögek tétele miatt $ADC\sphericalangle = 2ABC\sphericalangle = AOC\sphericalangle$, ezért az A, C, D és O pontok egy körre illeszkednek. Az $AD = DC$ esetben $D = O$, az állítás triviális, ezért a továbbiakban az általánosság megszorítása nélkül feltesszük, hogy $AD > DC$.

Az $ADC\sphericalangle$ szögfelezője az ADC kört az O-val átellenes E pontban metszi, ami felezi az AC ívet. A C pont DE-re vonatkozó C' tükörképe illeszkedik AD-re. Így $AE = CE = C'E$, s ezért az AC' szakasz F felezőpontjára $EFC'\sphericalangle = 90^\circ$ teljesül. Innen egyrészt a felezés miatt

$$DF = \frac{DC' + DA}{2} = \frac{DC + DA}{2},$$

másrészt definíció szerint $DF = DE \cdot \cos(FDE\sphericalangle)$.

Mivel OE átmérő, a Thalész-tétel miatt $ODE\sphericalangle = OAE\sphericalangle = 90^\circ$. A külső és a belső szögfelezők merőlegesek egymásra, így OD éppen a D-nél lévő külső szögfelező. Legyen G a B merőleges vetülete OD-n. A szimmetria miatt B, O és E kollineárisak, így az $ODE\triangle$ és a $OGB\triangle$ szögei páronként megegyeznek, ezért a háromszögek hasonlóak. Ezt kihasználva

$$BG = \frac{BO}{OE} \cdot DE = \frac{AO}{OE} \cdot DE = \cos(AOE\sphericalangle) \cdot DE = \cos(FDE\sphericalangle) \cdot DE =$$

$$= \frac{DC + DA}{2},$$

amivel az állítást beláttuk.

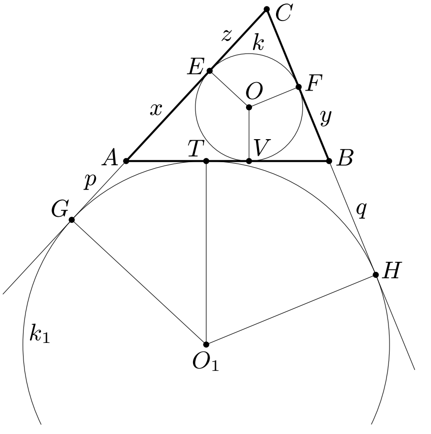
Gáspár Attila (Miskolc, Földes Ferenc Gimn., 11. évf.)

46 dolgozat érkezett. 5 pontos 37, 4 pontos 4, 3 pontos 2, 1 pontos 1, 0 pontos 2 dolgozat.

B. 4889. *Az $ABCD$ érintőtrapéz beírt köre az AB alapot a T, a vele párhuzamos CD alapot az U pontban érinti. Legyen M az AD és BC száregyenesek metszéspontja, és legyen V az AB oldal és az MU egyenesek metszéspontja. Mutassuk meg, hogy $AT = VB$.*

(*4 pont*)

Megoldás. Először lássunk be egy segédtételt. Használjuk az *1. ábra* jelöléseit.



1. ábra

Tétel. *A háromszög beírt és hozzáírt körének egy oldalra eső érintési pontjai szimmetrikusan helyezkednek el, tehát* $AT = VB$.

Bizonyítás. Legyen a háromszög oldalainak hossza a szokásos jelölések szerint a, b, c, a beírt kör érintőszakaszainak hossza x, y, z, a hozzáírt kör érintőszakaszainak hossza p és q, a háromszög kerülete k, és $s = \frac{k}{2}$.

$CG = CH$, mivel a k_1 körhöz C pontból húzott érintőszakaszok.

$CG + CH = CA + AT + TB + BC = k = 2s$, ezért $CG = CH = s$, amiből $AT = p = s - b$.

$2x + 2y + 2z = k$, vagyis $x + y + z = s$.

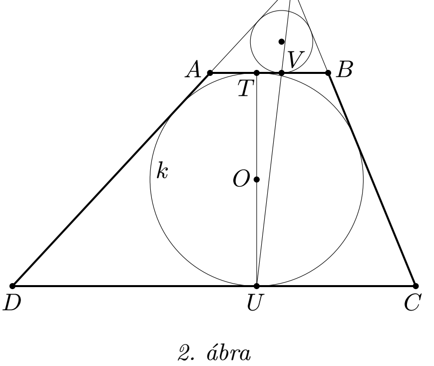
$BV = y = s - (x + z) = s - b$, tehát $AT = BV$.

Két esetre bontjuk a feladat bizonyítását.

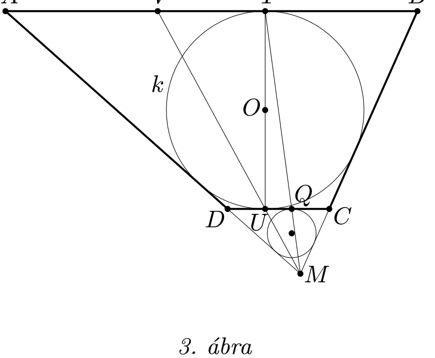
1. eset: $AB < CD$. Használjuk a *2. ábra* jelöléseit. Legyen k a beírt kör.

Ebben az esetben az M metszéspont az AB egyenes C és D pontokat nem tartalmazó oldalára esik. A k kör az MAB háromszög AB oldalához írt köre.

Nagyítsuk az ABM háromszöget az M pontból $\lambda = \frac{MD}{MA}$ arányban. Ekkor az MAB háromszög beírt köre k-ba megy át. Az AB egyenes képe a CD egyenes, hiszen $AB \parallel CD$ és AB érinti a beírt kört, CD pedig érinti k-t. A V pont képe U lesz, hiszen a pont és a képe, valamint M egy egyenesen vannak, és V rajta van az AB egyenesen, így a képe rajta van a CD egyenesen. Tehát az AB egyenest az MAB háromszög beírt köre a V pontban érinti.



2. ábra



3. ábra

Használjuk a segédtételünket. A beírt kör érintési pontjának távolsága az egyik csúcstól egyenlő a hozzáírt kör távolságával a másik csúcstól, vagyis $AT = VB$.

2. eset: $AB > CD$. Használjuk a *3. ábra* jelöléseit.

Most M a CD egyenes A és B pontot nem tartalmazó oldalán lesz. Ekkor k az MCD háromszög hozzáírt köre.

Nagyítsuk az MCD háromszöget az M pontból $\lambda = \frac{MA}{MD}$ arányban. Ekkor MCD beírt köre k-ba megy át. A CD egyenes képe az AB egyenes lesz. Mivel CD érinti a beírt kört, AB pedig érinti k-t, az U pont képe V, a Q pont képe pedig T lesz.

Pontosan akkor igaz, hogy $AT = VB$, ha $DQ = CU$. Utóbbi a segédtételünk értelmében igaz, így $AT = VB$ is teljesül.

Ha $AB = CD$, akkor $ABCD$ paralellogramma, azaz nem létezik az M pont.

Kerekes Anna (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.) és
Döbröntei Dávid Bence (Pápa, Türr István Gimn. és Koll., 12 évf.)
dolgozata alapján

92 dolgozat érkezett. 4 pontos 57, 3 pontos 22, 2 pontos 2, 1 pontos 3, 0 pontos 8 dolgozat.

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (577–582.)

K. 577. Xavér kivett három lapot egy csomag francia kártyából, és letette őket egymás mellé az asztalra. A letett lapokról az alábbi információkat árulta el:

– A három lap között van egy király, amelyiktől közvetlenül jobbra 1 vagy 2 dáma található.
– A három lap között van egy dáma, amelyiktől közvetlenül balra 1 vagy 2 dáma található.
– A három lap között van egy kőr, amelyiktől közvetlenül balra 1 vagy 2 pikk található.
– A három lap között van egy pikk, amelyiktől közvetlenül jobbra 1 vagy 2 pikk található.

Balról jobbra haladva milyen lapok lehetnek az asztalon?

K. 578. Egy $2 \times n$-es táblázat felső sorába beírjuk a pozitív egész számokat 1-től n-ig növekvő sorrendben, az alsó sorába pedig csökkenő sorrendben. Hány olyan 50-nél kisebb n pozitív egész szám van, melyre minden felső sorban lévő szám és az alatta lévő szám relatív prím?

K. 579. 105 lányt és 95 fiút tetszőlegesen 100 párba osztunk. A fiú párok kezet fognak, a lány párok pacsiznak, a vegyes párok pedig elkezdenek táncolni. Mutassuk meg, hogy 5-tel kevesebb kézfogás történik, mint pacsi.