

Matolcsi Dávid, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 11. osztályos tanulója (tanárai *Dobos Sándor*, *Kiss Géza* és *Kiss Gergely*); valamint

Molnár-Sáska Zoltán, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 12. osztályos tanulója (tanárai *Hujter Bálint*, *Gyenes Zoltán*, *Pósa Lajos* és *Szűcs Gábor*).

Egy versenyző az első feladat megoldása mellett a harmadik feladatot is megoldotta, azonban az indoklása hiányos. Ezért a teljesítményéért

III. díjban és 25 000 Ft pénzzutalomban részesül

Kerekes Anna, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 11. osztályos tanulója, (tanárai *Dobos Sándor*, *Kiss Géza* és *Kiss Gergely*).

Két további versenyző akadt, aki a harmadik feladatban jelentős részeredményt ért el. Ennek megfelelően

Dicséretet és fejenként 10 000 Ft pénzzutalmat kapnak

Alexy Marcell, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 12. osztályos tanulója (tanárai *Hujter Bálint*, *Gyenes Zoltán* és *Szűcs Gábor*) az első feladat hiányos és a harmadik feladat lényegében helyes megoldásáért, illetve

Záhorsky Ákos, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 12. osztályos tanulója (tanárai *Hujter Bálint*, *Gyenes Zoltán* és *Szűcs Gábor*) az első feladat helyes és a harmadik feladat hiányos megoldásáért.

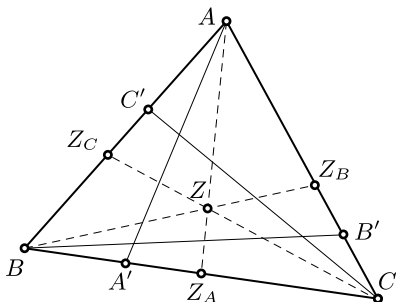
A versenybizottság ezúton köszöni meg minden versenyző és felkészítő tanár munkáját, a díjazottaknak pedig további sikereket kívánva szívből gratulál.”

A 2017. évi Kürschák József Matematikai Tanulóverseny feladatainak megoldásai

1. Legyen ABC tetszőleges háromszög, és válasszuk az A' , B' és C' pontokat egymástól függetlenül, egyenletes eloszlással rendre a BC , CA és AB oldalakról. A sík Z pontja esetén jelölje $p(Z)$ annak a valószínűségét, hogy az AA' , BB' és CC' egyenesek által határolt háromszög tartalmazza Z -t. Határozzuk meg az ABC háromszögnek azt a Z belső pontját, amelyre $p(Z)$ a lehető legnagyobb.

Megoldás. Legyenek Z_A , Z_B és Z_C rendre az AZ , BZ és CZ egyenesek metszéspontjai az ABC háromszög szemközti oldalával. Jelölje

$$\alpha := \frac{BZ_A}{BC}, \quad \beta := \frac{CZ_B}{CA} \quad \text{és} \quad \gamma := \frac{AZ_C}{AB}$$



azt, hogy ezek a pontok milyen arányban osztják az egyes oldalakat. Ekkor

$$\frac{Z_A C}{BC} = \frac{BC - BZ_A}{BC} = 1 - \frac{BZ_A}{BC} = 1 - \alpha,$$

és hasonlóan

$$\frac{Z_B A}{CA} = 1 - \beta, \quad \text{illetve} \quad \frac{Z_C B}{AB} = 1 - \gamma.$$

A Ceva-tétel alapján

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{BZ_A}{Z_A C} \cdot \frac{CZ_B}{Z_B A} \cdot \frac{AZ_C}{Z_C B} = \frac{BZ_A}{BC} \cdot \frac{BC}{Z_A C} \cdot \frac{CZ_B}{CA} \cdot \frac{CA}{Z_B A} \cdot \frac{AZ_C}{AB} \cdot \frac{AB}{Z_C B} = \\ &= \frac{\alpha\beta\gamma}{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)} \end{aligned}$$

adódik, azaz

$$(1) \quad \alpha\beta\gamma = (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma).$$

Können látható, hogy az AA' , BB' és CC' egyenesek által határolt (esetleg elfajuló) háromszög pontosan akkor tartalmazza a Z pontot, ha vagy $BA' \leq BZ_A$ és $CB' \leq CZ_B$, valamint $AC' \leq AZ_C$ teljesül; vagy akkor, ha $BA' \geq BZ_A$, $CB' \geq CZ_B$ és $AC' \geq AZ_C$ áll fenn. Ez azt jelenti, hogy

$$p(Z) = \alpha\beta\gamma + (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma) = 2\alpha\beta\gamma = 2(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma),$$

az utóbbi egyenlőségek (1) miatt teljesülnek. A számtani és mértani közép közti egyenlőtlenségből

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{\frac{p(Z)}{2}} &= \sqrt[3]{\alpha\beta\gamma} \leq \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}, \quad \text{illetve} \\ \sqrt[3]{\frac{p(Z)}{2}} &= \sqrt[3]{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)} \leq \frac{3-\alpha-\beta-\gamma}{3} \end{aligned}$$

következik, ahonnan

$$2\sqrt[3]{\frac{p(Z)}{2}} \leq \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} + \frac{3 - \alpha - \beta - \gamma}{3} = 1$$

alapján $p(Z) \leq \frac{1}{4}$ adódik. Egyenlőség pedig akkor állhat, ha mindkét számtani és mértani közép közti egyenlőtlenségnél egyenlőség áll, azaz ha $\alpha = \beta = \gamma$ teljesül. Ekkor azonban (1) miatt $\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{2}$, azaz Z az ABC háromszög súlypontja. Könnyen ellenőrizhető, hogy a súlypontra minden fenti becslés csakugyan egyenlőséggel teljesül. Ez pedig azt igazolja, hogy a feladat kérdésére a súlypont a válasz. \square

Megjegyzés. A feladat könnyen megoldható a baricentrikus koordináták segítségével. Legyenek tehát α, β, γ az Z baricentrikus koordinátái, azaz $\vec{Z} = \alpha\vec{A} + \beta\vec{B} + \gamma\vec{C}$, ahol \vec{X} jelöli az X ponthoz tartozó helyvektort és $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Ekkor a

$$p(Z) = 2 \cdot \frac{\alpha\beta\gamma}{(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha)}$$

kifejezést kell maximalizálni. Márpedig a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenségből

$$(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha) \geq 2\sqrt{\alpha\beta} \cdot 2\sqrt{\beta\gamma} \cdot 2\sqrt{\gamma\alpha} = 8\alpha\beta\gamma$$

adódik, ahonnan

$$p(Z) = 2 \cdot \frac{\alpha\beta\gamma}{(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha)} \leq 2 \cdot \frac{\alpha\beta\gamma}{8\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{4}$$

következik, egyenlőség pedig kizárólag $\alpha = \beta = \gamma$ esetén áll. A kért valószínűség tehát $\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{3}$ esetén, azaz a súlypontra maximális.

2. *Vannak-e olyan $f(x)$ és $g(x)$ valós együtthatós polinomok, amelyekre az $f(x)^3 - g(x)^2$ polinom elsőfokú?*

I. megoldás. Megmutatjuk, hogy nincsenek ilyen polinomok. Indirekt bizonyítunk, tegyük fel, hogy

$$(2) \quad f(x)^3 - g(x)^2 = ax + b, \quad \text{ahol } a \neq 0.$$

Ez a formula akkor volna jól kezelhető, ha a jobb oldalon teljes négyzet ellenettje állna. Ennek érdekében bevezetjük az y változót, és alkalmazzuk az $x = (-y^2 - b)/a$ helyettesítést. Ekkor

$$f(x) = f\left(\frac{-y^2 - b}{a}\right) = F(y^2), \quad \text{illetve} \quad g(x) = G(y^2)$$

teljesül alkalmas F és G polinomokra, ahonnan

$$(3) \quad F(y^2)^3 = G(y^2)^2 - y^2 = (G(y^2) - y) \cdot (G(y^2) + y)$$

adódik. A bal oldali polinom fokszáma 6-tal osztható, ezért G nem lehet konstans. Ha F konstans tagja 0, akkor ugyanez G -re is igaz. Ám ekkor a bal oldalon álló polinom legalacsonyabb fokú tagjának foka 6-tal osztható, míg a jobb oldalon álló esetében ez a fok pontosan 2. Ezért a G polinom nem konstans, de van konstans tagja. A jobb oldali két tényező relatív prím, hiszen ha egy polinom mindkettőt osztja, akkor a különbségüket és az összegüket, a $2y$ és a $2G(y^2)$ polinomokat is osztja, ám ez utóbbi polinomok relatív prímelek, hisz $2G(y^2)$ konstans tagja nem nulla.

A valós együtthatós polinomok körében érvényes a számelmélet alaptétele, ezért (3) jobboldalának mindkét tényezője egy-egy valós együtthatós polinom köbének konstansszorososa. Mivel minden valós konstans előáll valós szám köbeként, azt kapjuk, hogy vannak olyan, valós együtthatós $p(y)$ és $q(y)$ polinomok, amelyekre

$$(4) \quad p(y)^3 = G(y^2) - y, \quad \text{illetve} \quad q(y)^3 = G(y^2) + y$$

teljesül. Láttuk, hogy G nem konstans. Ezért a (4) két jobb oldalán álló polinom legmagasabb fokú tagja megegyezik és legalább másodfokú. Ugyanez igaz tehát a két bal oldalon álló polinomra is: $p(y)$ és $q(y)$ legmagasabb fokú nemnulla tagja ugyanaz a cy^n monom, ahol $n \geq 1$. Ekkor azonban a

$$(5) \quad 2y = q(y)^3 - p(y)^3 = (q(y) - p(y)) \cdot (q(y)^2 + q(y)p(y) + p(y)^2)$$

egyenlőség jobb oldalán a második tényezőben y^{2n} együtthatója $3c^2 \neq 0$, ezért a jobb oldal nem lehet elsőfokú. A kapott ellentmondás a megoldás elején kimondott állítást bizonyítja. \square

II. megoldás. Ismét indirekt bizonyítunk, tegyük fel tehát, hogy

$$(5) \quad f(x)^3 = g(x)^2 + r(x), \quad \text{ahol } r(x) = ax + b \text{ és } a \neq 0.$$

Nyilván sem f , sem g nem lehet konstans, ezért $\deg f = 2k$ és $\deg g = 3k$ valamilyen pozitív egész k -ra. Legyen $d = \gcd(f, g)$. Ekkor persze $d^2 \mid f^3 - g^2 = r$, ám mivel r elsőfokú, d csak konstans lehet, vagyis f és g egymáshoz relatív prímelek. Most (5) mindkét oldalát deriválva az

$$(6) \quad 3f(x)^2 f'(x) = 2g(x)g'(x) + r'$$

egyenlőséget kapjuk, ahonnan az (5) r' -szereséből kivonva a (6) r -szeresét,

$$f^2(fr' - 3f'r) = g(gr' - 2g'r)$$

adódik. A bal oldal osztható azzal az f^2 polinommal, amihez a jobb oldalon álló g relatív prím, tehát

$$(7) \quad f^2 \mid gr' - 2g'r.$$

Ekkor azonban $\deg f^2 = 4k$, míg $gr' - 2g'r$ foka legfeljebb $3k$. Ráadásul ha a g főegyütthatója d , akkor $(gr' - 2g'r)$ -ben a $3k$ -adfokú tag együtthatója

$$da - 6kda = (1 - 6k)da \neq 0.$$

Vagyis a $gr' - 2g'r$ polinom nem lehet a nulla polinom, és a foka pontosan $3k$.

Tehát a (7) szerint a $4k$ -adfokú f^2 osztója a pontosan $3k$ -adfokú, nemnulla $gr' - 2g'r$ polinomnak, ez pedig lehetetlen. \square

Megjegyzések. 1. Vannak olyan nem konstans f és g polinomok, amelyekre $f^3 - g^2$ másodfokú, például $(x^2 + 2)^3 - (x^3 + 3x)^2 = 3x^2 + 8$. Igazolható, hogy ez csak úgy lehetséges, ha egyrészt f és g relatív prímelek, másrészt pedig ha a fokszámaik $\deg f = 2$ és $\deg g = 3$.

2. A feladat szorosan kapcsolódik az ún. abc-sejtéshez, ami az alábbi mondja ki. Minden pozitív ε -ra van olyan C_ε konstans, hogy ha a, b, c relatív prím pozitív egészek és $a + b = c$, akkor $c < C_\varepsilon \cdot \text{rad}(abc)^{1+\varepsilon}$. Itt $\text{rad}(n)$ az n radikálját jelöli, azaz az n különböző prímosztóinak szorzatát. (Pl. $\text{rad}(2016) = 42$, $\text{rad}(2017) = 2017$ és $\text{rad}(2018) = 2018$.) Az abc-sejtésből számos nehéz tétel és sejtés következik. Levezethető belőle például a nagy Fermat-tételt általánosító Beal-sejtés gyengítése, miszerint az $a^n + b^m = c^k$ egyenletnek

csak véges sok olyan megoldása van a pozitív egészek körében, amelyre a, b, c relatív prímek és n, m, k mindegyike legalább 3. Az abc-sejtésre jelenleg nem ismert általánosan elfogadott bizonyítás. Ígéretes fejlemény azonban Mocsizuki Sinicsi japán matematikus 2012-ben publikált 500 oldalas munkája, amelyben egy egészen új elméletet dolgoz ki és bizonyít számos számelméletet érintő sejtést, többek között az abc-sejtést. Mocsizuki elmélete azonban annyira újszerű, hogy még jelenleg is tart annak ellenőrzése. Tekintettel arra, hogy az intenzív munka ellenére még nem találtak benne lényeges hibát, könnyen elképzelhető, hogy a közeli jövőben bejelentik a sejtés megoldását. Ha pedig ez megtörténik, valószínűleg semmi sem mentheti meg a szerzőt egy igen tekintélyes matematikai díjtól, ami persze nem lehet a Fields-érem, hiszen azt 40 év felettiek nem kaphatják.

Ismert és bizonyított azonban az abc-sejtésnek egy polinomos megfelelője, az ún. Mason-tétel. Jelölje $\text{rad}(f)$ az f komplex együtthatós polinom különböző irreducibilis faktorainak szorzatát. (Tehát $\text{rad}(f)$ foka az f különböző komplex gyökeinek száma.) Legyenek f, g és h olyan komplex együtthatós relatív prím polinomok, amelyek nem mindegyike konstans és $f + g = h$. Ekkor a Mason-tétel szerint

$$\max(\text{deg}(f), \text{deg}(g), \text{deg}(h)) \leq \text{deg}(\text{rad}(fgh)) - 1.$$

A Mason-tétel segítségével a kitzűzött feladat könnyen megoldható. Tegyük fel tehát, hogy (5) teljesül. A II. megoldásban láttuk, hogy f, g relatív prímek, tehát f^3, g^2 és r is azok. Nyilván $\text{deg}(f) = 2k, \text{deg}(g) = 3k$ alkalmas k pozitív egészre. A Mason-tétel szerint ekkor

$$\begin{aligned} 6k = \max(6k, 6k, 1) &\leq \text{deg}(\text{rad}(f^3 g^2 r)) - 1 = \text{deg}(\text{rad}(fgr)) - 1 \leq \\ &\leq \text{deg}(fgr) - 1 = \text{deg}(f) + \text{deg}(g) + \text{deg}(r) - 1 = 5k, \end{aligned}$$

ami ellentmondás, így (5) nem teljesülhet.

3. *Egy $n \times n$ -es T táblázat mezőibe egy-egy számot írtunk úgy, hogy egyik sorban sem szerepel kétszer ugyanaz a szám. Bizonyítsuk be, hogy át lehet rendezni a T -ben szereplő számokat úgy, hogy az átrendezés utáni T^* táblázat minden sorában pontosan ugyanazok a számok álljanak, mint amelyek T megfelelő sorában álltak, de T^* semelyik oszlopában se szerepeljen kétszer ugyanaz a szám.*

I. megoldás. Egy $n \times n$ -es táblázat k -dik oszlopának *hibája* legyen $n - d(k)$, ahol $d(k)$ jelöli a k -dik oszlopbeli különböző számok számát. A *táblázat összhibája* pedig legyen a táblázatbeli oszlopok hibáinak összege. Azt kell igazolnunk, hogy T sorain belül lehet úgy permutálni az ott álló számokat, hogy az így kapott táblázat összhibája 0 legyen. Az alábbiakban egy olyan eljárást mutatunk, amely tetszőleges pozitív összhibájú táblázat esetén bizonyos sorok alkalmas átrendezésével csökkenti az összhibát. Mivel a szóban forgó összhiba egész szám, ezért e hibacsökkentő lépés véges sokszori alkalmazásával a táblázat összhibája 0-ra csökkenthető, és ezzel a feladat állítása bizonyítást nyer.

Tegyük fel tehát, hogy T -ben – mondjuk – az első oszlop hibája pozitív. Ennek oka, hogy legalább két azonos szám (mondjuk két 1-es) szerepel benne. Mivel T minden sorában legfeljebb egy 1-es szerepel, ezért T -nek lesz olyan oszlopa, amiben nem szerepel 1-es. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy a második oszlop ilyen. Egy G irányított gráfot definiálunk a T táblázat első két oszlopában

előforduló számok (mint csúcsok) halmazán úgy, hogy ha valamelyik sorban az első két elem i és j (ebben a sorrendben), akkor G -be behúzzunk egy i -ből j -be vezető élt.

Induljunk el az így kapott G gráf 1-es csúcsából, és haladjunk az irányított élek mentén. Két eset lehetséges. Előbb-utóbb vagy egy olyan u (nyelő) csúcsba érkeünk, ahonnan nem vezet ki él vagy egy olyan v csúcsba érünk, ahol már korábban jártunk. Mindkét esetben felcseréljük a bejárt éleknek megfelelő sorok első két elemét. Ezáltal az első esetben az első oszlopban csökken az 1-esek száma, míg a második oszlopban megjelenik egy 1-es, továbbá, a második oszlopból egy, az első oszlopban eddig nem szereplő u elem kerül át az első oszlopba. Ettől eltekintve az egyes oszlophoz tartozó számhalmazok nem változnak, tehát T összhibája 2-vel csökken. A második esetben az első két oszlophoz tartozó számhalmazok úgy változnak, hogy egy 1-es átkerül az első oszlopból a másodikba, miközben egy ettől különböző, az első oszlopban már eddig is megtalálható v szám átkerül a második oszlopból az elsőbe. Ezáltal az első oszlopban álló számok halmaza nem változik, tehát az első oszlop hibája is annyi marad amennyi volt. Emellett azonban a második oszlop hibája, és ennek megfelelően a táblázat összhibája eggyel csökken. Ezzel a hibacsökkentő lépést leírtuk, a feladat állítását igazoltuk.

II. megoldás. Készítsük el azt a G_T páros gráfot, amelynek egyik színosztályának s_1, s_2, \dots, s_n csúcsait a T táblázat sorai, a másik színosztálybeli a_1, a_2, \dots csúcsokat pedig a T -ben található számok alkotják. Az s_i és a_j csúcsok között pedig akkor fusson él G_T -ben, ha az a_j szám előfordul a T táblázat s_i sorában. Világos, hogy minden s_i csúcs G_T -beli fokszáma pontosan n , míg tetszőleges a_j csúcs fokszáma pedig legfeljebb n , hiszen egyfelől minden sorban pontosan n szám áll, másfelől pedig minden szám legfeljebb n -szer (soronként egyszer) fordul elő a T -ben. König ismert élszínezési tétele szerint tehát G_T élei kiszínezhetők az $1, 2, \dots, n$ színek felhasználásával úgy, hogy a közös végponttal rendelkező élek különböző színt kapjanak.

Ennek a színezésnek a segítségével az alábbi módon rendezzük át a T táblázat sorait. Mivel s_i -ből G_T -ben n különböző színű él indul, ezért ezen élek közül pontosan egy (mondjuk $s_i a_j$) kapta a k -dik színt. Legyen ekkor a_j a T^* táblázat v_i sorának k -dik eleme. A G_T definíciója miatt a_j szerepel a T táblázat s_i sorában, tehát az imént definiált átrendezés valóban végrehajtható a T táblázaton. Mivel a fenti T^* minden egyes oszlopában azonos színre színezett éleknek megfelelő számok állnak, ezért T^* egyetlen oszlopában sem állhat két egyforma szám. Nekünk pedig éppen ezt kellett igazolnunk.

Megjegyzések. 1. A feladat „hátterét” a II. megoldás mutatja: voltaképp König élszínezési tételével egyenértékű a bizonyítandó állítás. A trükk annyi, hogy a táblázat által definiált „szokásos” páros gráf helyett (aholis az oszlopok és a sorok felelnek meg a színosztályoknak, és a táblázat mezői pedig az éleknek), itt az egyik színosztályt a sorok, a másikat pedig a mezőkben álló számok alkotják, az éleket pedig az oszlopok segítségével határozzuk meg. Érdeemes végiggondolni, hogy mit is jelent a feladat állítása a „szokásos” értelmezés szerint. Azt kell igazolnunk, hogy bárhogy is adunk meg a $K_{n,n}$ páros gráf A színosztályának minden csúcsához n különböző színt, a gráf n^2 éle kiszínezhető úgy, hogy az azonos csúcsból induló élek színe különböző legyen és emellett minden él színe az A -beli végponthoz megadott színek közül kerüljön ki.

2. Dinitz sejtése azt mondja ki, hogy ha egy $n \times n$ méretű táblázat mind az n^2 mezejéhez tartozik egy-egy n elemű halmaz, akkor kiválasztható ezen halmazoknak egy-egy eleme úgy, hogy azonos sorban vagy oszlopban álló mezőkhöz tartozó halmazokból ne válasszunk azonos elemet. Világos, hogy a sejtésből azonnal következik a feladat állítása, ha hozzárendeljük minden mezőhöz az adott mező sorában álló számokat. Dinitz sejtését Galvin igazolta, mégpedig abban az általánosabb formában, hogy ha egy G véges, páros gráf minden éléhez legalább akkora színlista tartozik, mint a G -beli legnagyobb fokszám, akkor minden élhez úgy választható a listájából egy-egy szín, hogy az így kapott színezésben azonos színű éleknek ne legyen közös végpontja. Erdemes még megemlíteni, hogy nem páros gráfok esetén ugyanez az állítás azzal a változtatással, hogy a színlisták mérete a G gráf élkromatikus száma (ami páros gráfra König tétele szerint épp a maximális fokszám), nem más, mint az ún. listaszínezési sejtés, amire a mai napig nem ismert bizonyítás.

3. Többen próbálkoztak n szerinti teljes indukció alkalmazásával oly módon, hogy az indukciós lépésben először azt érik el, hogy az utolsó oszlop elemei különbözők legyenek, majd a bal felső $(n - 1) \times (n - 1)$ -es táblázatra alkalmazzák az indukciós feltevést. Sajnos ebben a megközelítésben semmi sem garantálja, hogy az utolsó sor valamelyik (utolsótól különböző eleme) ne egyezzen meg egy másik elemmel ugyanabban az oszlopban. Működik azonban az n szerinti teljes indukció akkor, ha megfelelően általánosítjuk a feladat állítását: azt igazoljuk, hogy amennyiben egy $k \times n$ méretű táblázat mind a k sorában csupa különböző szám áll, továbbá egyetlen szám sem fordul elő n -nél többször a táblázatban, akkor lehetséges a sorokon belül úgy permutálni a számokat, hogy minden oszlopban csupa különböző szám álljon. Világos, hogy $n = 1$ esetén ez teljesül. Tegyük fel, hogy n -re már igazoltuk az állítást, és tekintsünk egy $k \times (n + 1)$ méretű táblázatot. A célunk ekkor az, hogy az utolsó oszlopba úgy rendezzünk be különböző számokat, hogy az első n oszlopra teljesüljön az indukciós feltétel. Ehhez pedig mindössze azt kell elérni, hogy az utolsó oszlopban egyrészt csupa különböző szám álljon, másrészt pedig minden olyan szám, ami pontosan $(n + 1)$ -szer fordul elő a táblázatban, szerepeljen az utolsó oszlopban. A „szokásos” páros gráfot definiálva, a Hall-tételből könnyen látható, hogy egyrészt lehetséges az utolsó oszlopba csupa különböző számot becserélni, másrészt pedig lehetséges úgy permutálni a sorokat, hogy minden olyan szám, ami $(n + 1)$ -szer szerepel a táblázatban, az utolsó oszlopban is előforduljon. Az indukciós lépés igazolásához azonban a két tulajdonság együttes fennállása szükséges. Ezt pedig a Mendelsohn–Dulmage tétel biztosítja, amely szerint ha egy G páros gráfban M_1 és M_2 párosítások (azaz közös végpont nélküli élek halmazai), akkor van olyan M párosítás is G -ben, amely fedi az A színosztály minden M_1 által fedett csúcsát és a B színosztály minden M_2 által fedett csúcsát.

4. Erdemes végül rámutatni egy másik, a feladathoz szorosan kapcsolódó kutatási területre. A Rota-sejtés azt állítja, hogy ha egy $n \times n$ méretű táblázat minden mezejéhez egy-egy \mathbb{R}^n -beli vektor tartozik azzal a tulajdonsággal, hogy az egy sorban álló vektorokból bármely \mathbb{R}^n -beli vektor előállítható skalárral való szorzás és összeadás segítségével, akkor a táblázat sorain belül lehetséges a vektorokat úgy permutálni, hogy minden oszlopra is teljesüljön, hogy bármely \mathbb{R}^n -beli vektor előállítható skalárral való szorzás és összeadás segítségével az adott oszlopban álló vektorokból. A versenyen kitűzött feladat felfogható a Rota-sejtés egy igen speciális eseteként. Hasonlóan a listaszínezési sejtéshez, jelenleg az általános Rota-sejtésre sem ismert bizonyítás.

Fleiner Tamás