Matematika feladatok megoldása

B. 4832. *Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges a, b, c pozitív egész számokhoz találhatók olyan egymáshoz relatív prím r, s pozitív számok, hogy $ar+bs$ osztható c-vel.*

(*5 pont*)

Megoldás. Jelölje d az a és b legnagyobb közös osztóját: $d=(a;b)$. Legyen $r_1=\frac{b}{d}$ és $s_1=\frac{a}{d}$. Ekkor nyilván $(r_1,s_1)=1$ és $ar_1=bs_1=\frac{ab}{d}$, tehát ar_1+ $+b\cdot(-s_1)=0$, ami osztható c-vel.

De egyelőre $s=-s_1<0$. Keressünk olyan, c-vel osztható k pozitív egész számot, melyre $s_2=k-s_1>0$ és $(r_1,s_2)=\left(\frac{b}{d};k-\frac{a}{d}\right)=1$ továbbra is teljesül. Mivel $c\mid k$, ezért $c\mid bk=(ar_1-bs_1)+bk=ar_1+b(k-s_1)=ar_1+bs_2$.

Legyen $k=k'c\cdot\frac{b}{d}$, ahol k' elég nagy ahhoz, hogy $k'c\cdot\frac{b}{d}-\frac{a}{d}>0$ fennáljon.

Azt állítjuk, hogy $(r_1,s_2)=1$ is igaz. Ha ugyanis

$$1<m=(r_1,s_2)=\left(\frac{b}{d},k'c\frac{b}{d}-\frac{a}{d}\right)$$

valamely m pozitív egészre, akkor $m\mid\frac{b}{d}$ miatt $m\mid k'c\frac{b}{d}$ is igaz, amiből $m\mid s_2$ miatt $m\mid\frac{a}{d}$ következik, de ekkor $m\mid\frac{a}{d}$ és $m\mid\frac{b}{d}$, ami ellentmond annak, hogy $\frac{a}{d}$ és $\frac{b}{d}$ relatív prímek. Tehát valóban $(r_1,s_2)=1$.

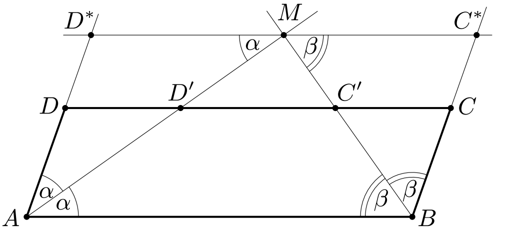
Tehát $r=\frac{b}{d}$ és $s=k'c\cdot\frac{b}{d}$, ahol k' megfelelően nagy, jó választás.

55 dolgozat érkezett. 5 pontos 38, 4 pontos 6, 3 pontos 2, 2 pontos 4, 1 pontos 4 dolgozat. Nem versenyszerű 1 dolgozat.

B. 4836. *Az $ABCD$ paralelogrammában $BC=\lambda AB$. Az A-ból és B-ből induló belső szögfelezők metszéspontja M. Az $ABCD$ paralelogramma hányadrészét fedi le az $ABM\triangle$?*

(*5 pont*) Javasolta: *Kozma József* (Szeged)

Megoldás. Húzzunk párhuzamost az M ponton keresztül az AB oldallal, ez az egyenes messe a BC és AD egyeneseket rendre a C^* és D^* pontokban. Legyen $MAD^*\sphericalangle=MAB\sphericalangle=\alpha$ és $MBA\sphericalangle=MBC^*\sphericalangle=\beta$. Vegyük észre, hogy $AMD^*=MAB\sphericalangle=\alpha$, hiszen váltószögek, és hasonlóan $BMC^*\sphericalangle=MBA\sphericalangle=\beta$. Így az $AMD^*\triangle$ és az $MBC^*\triangle$ egyenlő szárú, amiből $MD^*=D^*A=C^*B=$ $=MC^*=AB/2$ adódik, ahol a második egyenlőségnél kihasználtuk, hogy ABC^*D^* paralelogramma, az utolsó egyenlőségnél pedig, hogy $MD^*+MC^*=$ $=D^*C^*=AB$.



Feltehetjük, hogy $T_{ABC^*D^*} = 2$. Mivel az ABC^*D^* paralelogramma és az $ABM\triangle$ AB oldala és ehhez tartozó magassága közös, a jól ismert területképletek alapján $T_{ABM} = 1$. Továbbá a feltétel szerint $AD = \lambda AB = 2\lambda AD^*$, így ismét a paralelogramma ismert területképlete szerint

$$T_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin 2\alpha = 2\lambda(AB \cdot AD^* \cdot \sin 2\alpha) = 2\lambda T_{ABC^*D^*} = 4\lambda.$$

Az eddigiekből az is következik, hogy az M pont pontosan akkor van benne az $ABCD$ paralelogrammában, ha $\lambda \geqslant 1/2$. Ilyenkor a keresett területarány a fentiekből azonnal adódik:

$$\frac{T_{ABM}}{T_{ABCD}} = \frac{1}{4\lambda}.$$

Ha $\lambda < 1/2$, akkor az M pont $ABCD$-n kívül esik. Messe AM és BM a CD oldalt rendre a D' és C' pontokban. Ekkor a $D^*AM\sphericalangle$-ben a párhuzamos szelők tétele szerint

$$\frac{AD'}{AM} = \frac{AD}{AD^*} = 2\lambda.$$

Világos, hogy $MD'C'\triangle \sim MAB\triangle$, hiszen szögeik páronként megegyeznek, és hasonlóságuk aránya $MD'/MA = 1 - DA'/MA = 1 - 2\lambda$. Ebből következik, hogy $T_{MD'C'} = (1-2\lambda)^2 T_{MAB} = (1-2\lambda)^2$. Végül az $ABM\triangle$ által lefedett területre

$$T_{ABC'D'} = T_{ABM} - T_{MC'D'} = 1 - (1-2\lambda)^2 = 4\lambda - 4\lambda^2.$$

Innen pedig

$$\frac{T_{ABC'D'}}{T_{ABCD}} = \frac{4\lambda - 4\lambda^2}{4\lambda} = 1 - \lambda.$$

Tehát a keresett arány $1/4\lambda$, ha $\lambda \geqslant 1/2$; és $1-\lambda$, ha $\lambda < 1/2$.

109 dolgozat érkezett. 5 pontos 55, 4 pontos 3, 3 pontos 47, 2 pontos 3, 0 pontos 1 dolgozat.

B. 4866. *Xavér és Yvett felváltva mondanak*
a) valós számokat;
b) komplex számokat.

Xavér kezd, és a játék a 100. *szám kimondása után ér véget. Yvett célja az, hogy a kimondott* $a_1, \ldots, a_{100}$ *számokból képzett összesen* $\binom{100}{2}$ *darab kettős szorzat* $a_1a_2 + a_1a_3 + \ldots + a_{99}a_{100}$ *összege* 0 *legyen, Xavér ezt szeretné megakadályozni. Kinek van nyerő stratégiája?*

(*6 pont*)

Megoldás. Nyilván

$$\begin{aligned}S_{100} &= a_1a_2 + a_1a_3 + \ldots + a_{99}a_{100} = \\ &= a_1a_2 + a_1a_3 + \ldots + a_{98}a_{99} + a_{100}(a_1 + a_2 + \ldots + a_{99}),\end{aligned}$$

és ebből Yvett a 100. lépésben már csak az $a_{100}(a_1 + a_2 + \ldots + a_{99})$ részt tudja befolyásolni, ezért hogy $S_{100} = 0$ legyen,

$$a_{100} = -\frac{a_1a_2 + a_1a_3 + \ldots + a_{98}a_{99}}{a_1 + a_2 + \ldots + a_{99}}$$

kimondása lehet részéről az észszerű lépés.

Ha $a_1 + a_2 + \ldots + a_{99} \neq 0$, akkor ezt meg is teheti; ezért aztán Xavérnak csak az lehet a célja, hogy ezt megakadályozza azzal, hogy a 99. lépésben az $a_{99} = -(a_1 + a_2 + \ldots + a_{98})$ számot mondja. De Yvett még ekkor is nyerhet, ha eléri, hogy ebben az esetben

$$S_{99} = a_1a_2 + a_1a_3 + \ldots + a_{98}a_{99} = 0$$

legyen, vagyis

$$\begin{aligned}a_1a_2 + a_1a_3 + \ldots + a_{97}a_{98} + a_{99}(a_1 + a_2 + \ldots + a_{98}) &= 0,\\ a_1a_2 + a_1a_3 + \ldots + a_{97}a_{98} + a_{99}(-a_{99}) &= 0,\\ a_1a_2 + a_1a_3 + \ldots + a_{97}a_{98} - (a_1 + a_2 + \ldots + a_{98})^2 &= 0,\\ -\big(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{98}^2 + a_1a_2 + a_1a_3 + \ldots + a_{97}a_{98}\big) &= 0.\end{aligned}$$

Itt válik el egymástól az *a*) és *b*) rész.

a) Valós számok esetén

$$\begin{aligned}&2\big(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{98}^2 + a_1a_2 + a_1a_3 + \ldots + a_{97}a_{98}\big) = \\ &= \big(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{98}^2\big) + (a_1 + a_2 + \ldots + a_{98})^2\end{aligned}$$

(nemnegatív, és) csak $a_1 = a_2 = \ldots = a_{98} = 0$ esetén nulla.

Ekkor Yvett nem érheti el a célját, ha Xavér már valahol az elején mondott egy nemnulla számot, amit bőven megtehetett – ezért Xavérnak van nyerő stratégiája.

b) Komplex számok esetén viszont

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{98}^2 + a_1a_2 + a_1a_3 + \ldots + a_{97}a_{98} = 0,$$

azaz

$$\begin{aligned}2\big(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{98}^2 + a_1a_2 + a_1a_3 + \ldots + a_{97}a_{98}\big) &= 0,\\ 2a_{98}^2 + 2a_{98}(a_1 + a_2 + \ldots + a_{97}) &+ \\ + 2\big(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{97}^2 + a_1a_2 + a_1a_3 + \ldots + a_{96}a_{97}\big) &= 0,\\ 2a_{98}^2 + 2a_{98}(a_1 + a_2 + \ldots + a_{97}) &+ \\ + \big((a_1 + a_2 + \ldots + a_{97})^2 + a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{97}^2\big) &= 0\end{aligned}$$

másodfokú egyenlet a_{98}-ra, aminek komplex gyökei

$$a_{98_{1,2}} =$$

$$= \frac{-(a_1 + a_2 + \ldots + a_{97}) \pm \sqrt{-(a_1 + a_2 + \ldots + a_{97})^2 - 2\big(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{97}^2\big)}}{2}.$$

Ha e gyökök bármelyikét mondja Yvett a 98. lépésben, akkor ő fog nyerni, ezért ekkor Yvettnek van nyerő stratégiája.

Beke Csongor (Budapest, Békásmegyeri Veres Péter Gimn., 9. évf.)

44 dolgozat érkezett. 6 pontos 33, 5 pontos 2, 4 pontos 1, 3 pontos 3, 2 pontos 1, 1 pontos 2, 0 pontos 1 dolgozat.

B. 4869. *Legyen A a valós számok egy véges halmaza. Azt mondjuk, hogy A elemeinek legalább két csoportba osztása egy* parkettázás, *ha az így kapott (páronként diszjunkt) részhalmazok legalább két eleműek és egymás eltoltjai. Bizonyítsuk be, hogy A-nak páros sok parkettázása van.*

(5 pont)

Megoldás. Az állítást úgy bizonyítjuk, hogy párokba soroljuk az A parkettázásait. A következő jelölést használjuk: ha X és Y számhalmazok, akkor legyen

$$X + Y = \{x + y \mid x \in X \text{ és } y \in Y\}.$$

Nyilván $X + Y = Y + X$, és az X halmaz s-sel való eltoltja ekkor $X + \{s\}$.

Legyen

$$A = \big(B + \{c_1\}\big) \cup \big(B + \{c_2\}\big) \cup \big(B + \{c_3\}\big) \cup \ldots \cup \big(B + \{c_k\}\big)$$

az A halmaz parkettázása. Ekkor $A = B + C$, ahol $C = \{c_1, c_2, c_3, \ldots, c_k\}$; legyen továbbá $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. Így

$$A = C + B = \big(C + \{b_1\}\big) \cup \big(C + \{b_2\}\big) \cup \big(C + \{b_3\}\big) \cup \ldots \cup \big(C + \{b_n\}\big).$$

Megmutatjuk, hogy ez is parkettázása A-nak, és különbözik az előbbitől.

A $\big(C + \{b_i\}\big)$ halmazok egymás eltoltjai, közös elemszámuk k, ami az első parkettázásban szereplő részhalmazok számaként legalább kettő. E halmazok száma, n pedig az első parkettázásban szereplő halmazok közös elemszáma, így szintén legalább kettő. A diszjunktság igazolásához indirekten tegyük fel, hogy például $\big(C + \{b_1\}\big)$-nek és $\big(C + \{b_2\}\big)$-nek közös eleme $c_i + b_1 = c_j + b_2$. Ekkor azonban ez a szám $(B + c_i)$-nek és $(B + c_j)$-nek is közös eleme; mivel e két halmaz az első parkettázásban szerepel, ez csak úgy lehetséges, hogy $(B + c_i) = (B + c_j)$, azaz $i = j$, így $c_i = c_j$, akkor viszont $b_1 = b_2$, ami ellentmondás. Nyilvánvaló, hogy miképpen e második parkettázást kaptuk az elsőből, ugyanazzal a megfeleltetéssel a másodikból visszakapjuk az elsőt.

Ahhoz, hogy a parkettázások párosításáról beszélhessünk, végül be kell látnunk, hogy a párban álló parkettázások különböznek egymástól. Tegyük fel ennek az ellenkezőjét; ekkor $n = k$, és a B elemeinek átszámozásával elérhető, hogy

$(B+c_v)=(C+b_v)$ teljesül $v=1,2,\ldots,n$-re. Tekintsük például $(B+c_1)=$ $=(C+b_1)$-et: $c_2+b_1\in(C+b_1)$ miatt ekkor van olyan b_i eleme B-nek, amelyre $b_i+c_1=c_2+b_1$. Ez a szám viszont közös eleme $(B+c_1)$-nek és $(B+c_2)$-nek, ami ellentmondás.

44 dolgozat érkezett. 5 pontos 30, 4 pontos 12, 3 pontos 1 dolgozat. Nem versenyszerű 1 dolgozat.

B. 4880. *Az $a_1,a_2,a_3,\ldots$ pozitív egész számokból álló sorozatra teljesül, hogy $a_n\cdot a_{n+1}=a_{n+2}\cdot a_{n+3}$ minden pozitív egész n-re. Mutassuk meg, hogy a sorozat valamelyik elemétől kezdve periodikus.*

(*4 pont*) Javasolta: *Gáspár Merse Előd* (Budapest)

Megoldás. Az $a_n\cdot a_{n+1}=a_{n+2}\cdot a_{n+3}$ összefüggés szerint

$$a_{n+3}=\frac{a_n\cdot a_{n+1}}{a_{n+2}}$$

minden pozitív egész n-re. Ezért a_n, a_{n+1} és a_{n+2} egyértelműen meghatározza a_{n+3} értékét. A feladat állításának igazolásához így elég belátni, hogy létezik olyan n és k pozitív egész, amelyekre $a_{n+k}=a_n$, $a_{n+1+k}=a_{n+1}$ és $a_{n+2+k}=a_{n+2}$ egyszerre teljesül, hiszen akkor

$$a_{n+3+k}=\frac{a_{n+k}\cdot a_{n+1+k}}{a_{n+2+k}}=\frac{a_n\cdot a_{n+1}}{a_{n+2}}=a_{n+3}$$

stb. Az előbbi igazolásához legyen $M=a_1\cdot a_2$; ekkor $M=a_3\cdot a_4=a_5\cdot a_6=a_7\cdot a_8$, és így tovább, ezért a sorozat minden elemére $1\leqslant a_v\leqslant M$. Ebből következik, hogy az a_n,a_{n+1},a_{n+2} rendezett számhármasok csak véges sokfélék lehetnek (legfeljebb M^3-féle számhármas állhat elő ezen a módon). Így az $\{a_1,a_2,a_3\}$, $\{a_4,a_5,a_6\}$, $\{a_7,a_8,a_9\}$, $\ldots$ (rendezett) számhármasok között biztosan lesz két egyező.

66 dolgozat érkezett. 4 pontos 47, 3 pontos 15, 2 pontos 3, 0 pontos 1 dolgozat.

B. 4888. *Sebestyén a harmadiktól kezdve minden születésnapjára olyan háromszög alapú hasáb alakú tortát kap, amelynek a felső három csúcsában van egy-egy gyertya, és a tetején még annyi, hogy az életkorával megegyező számú gyertya legyen összesen a tortán úgy, hogy semelyik három nem esik egy egyenesbe. Sebestyén olyan, háromszög alakú szeletekre szeretné vágni a tortát, melyeknek a csúcsait a gyertyák helye adja (a háromszögek belseje nem tartalmazhat gyertyát). Hány szeletre oszthatja a tortát a k-adik születésnapján?*

(*4 pont*)

Megoldás. Pontosan $2k-5$ szeletre lehet felosztani. Bizonyítsunk teljes indukcióval. Kiindulásnak vehetjük a $k=3$ esetet, ekkor magától értetődő, hogy pontosan egy szeletre lehet osztani a tortát. A $k=4$ esetben is azonnal látható, hogy 3 szeletre lehet felosztani.

Tegyük fel, hogy beláttuk, hogy k-ig minden évben pontosan $2k-5$ szeletre lehet felosztani tortát. Igazoljuk, hogy ekkor a $(k+1)$. születésnapon pontosan $2(k+1)-5$ szeletre osztható a torta.

Vegyünk egy tetszőleges $k+1$ gyertyás háromszög alakú tortát. Tekintsük ennek egy tetszőleges helyes szeletelését, majd válasszuk ki bármelyik belső gyertyát (vagyis bármelyiket, ami nem a torta csúcsában van). Legyen az ebből kiinduló háromszög-oldalak száma (vagyis a vágások száma) n. Az n legalább 3, hiszen semelyik három gyertya sincs egy egyenesen és fel van darabolva háromszögekre a torta lapja. Vagyis van pontosan egy darab n-szög, amelyet a szeletelés határoz meg és csak a kiválasztott gyertyát tartalmazza. A kiválasztott gyertyából kiinduló vágások végén lévő gyertyák közül a szomszédosak össze vannak kötve egymással, különben vagy nem lenne háromszögekre szeletelve a torta, vagy lenne egy vágás, ami a kiválasztott gyertyából indul és kihagytuk.

A szomszédos n darab gyertya egy n-szöget határoz meg, amelynek belsejében csak a kiválasztott gyertya van. Ez a gyertya minden csúccsal össze van kötve, így az n-szög n darab háromszögre van felosztva. Most távolítsuk el a kiválasztott gyertyát. Ekkor egy k gyertyás torta marad, amiről az indukciós feltevés alapján tudjuk, hogy pontosan $2k-5$ szeletre lehet felbontani. Az n-szögön kívüli szeletelésen ne változtassunk. Az n-szögben válasszuk ki az egyik csúcsot, majd kössük össze a többi vele nem szomszédos csúccsal. Így $n-2$ háromszögre bontottuk fel. Ettől különböző számú háromszögre nem is lehet az n-szöget bontani, hiszen minden ilyen felbontásában mindegyik háromszög valamennyi szöge része az n-szög valamelyik szögének, így a t darab háromszög 180 fokos szögösszegének $180t$ fokos összege az n-szög belső szögeinek $180(n-2)$ fokos összegét adja, amiből $t=n-2$ egyértelműen meghatározott.

Tehát, amikor $k+1$ gyertya volt, akkor 2-vel több szeletre lehetett bontani a tortát, összesen $2k-5+2=2(k+1)-5$ szeletre.

Ezzel bizonyítottuk, hogy Sebestyén a k-adik születésnapján csak $2k-5$ szeletre oszthatja a tortát.

Dobák Dániel (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.) dolgozata alapján

Összesen 202 dolgozat érkezett. 4 pontot kapott 121, 3 pontot 63 versenyző. 2 pontot szerzett 7, 1 pontot 5 tanuló. 0 pontos 6 tanuló dolgozata.

B. 4890. *Oldjuk meg a pozitív egész számok halmazán a következő egyenletet:*

$$x-y-\frac{x}{y}-\frac{x^3}{y^3}+\frac{x^4}{y^4}=2017.$$

(*5 pont*) Javasolta: *Kovács Béla* (Szatmárnémeti)

Megoldás. Írjuk fel az $\frac{x}{y}$ pozitív racionális számot egymáshoz relatív prím a és b pozitív egész számok hányadosaként: $\frac{x}{y}=\frac{a}{b}$. Az egyenlet átrendezésével azt kapjuk, hogy

$$x-y-2017=\frac{x}{y}+\frac{x^3}{y^3}-\frac{x^4}{y^4}$$

egész szám, vagyis

$$\frac{x}{y}+\frac{x^3}{y^3}-\frac{x^4}{y^4}=\frac{a}{b}+\frac{a^3}{b^3}-\frac{a^4}{b^4}=\frac{ab^3+a^3b-a^4}{b^4}$$

szintén egész szám. A számláló tehát osztható b^4-nel, így b-vel is. A számláló első két tagja b-nek többszöröse, tehát a^4-nek is oszthatónak kell lennie b-vel. Az a és b relatív prímek, emiatt innen már csak $b=1$ lehetséges. Ezzel beláttuk, hogy az $\frac{a}{b}$ tört egész szám. Legyen most $\frac{a}{b}=\frac{x}{y}=z$ pozitív egész. Ekkor $x=yz$, ahol x, y, z mind pozitív egészek. Ezzel a jelöléssel az eredeti egyenlet könnyebben kezelhető formában írható:

$$yz-y-z-z^3+z^4=2017.$$

Innen a megoldás befejezésére két lehetőséget is megmutatunk.

I.) Adjunk mindkét oldalhoz egyet, majd alakítsuk szorzattá az egyenlet bal oldalát:

$$\begin{aligned} yz-y-z+1-z^3+z^4&=2018,\\ (y-1)(z-1)+z^3(z-1)&=2018,\\ (z-1)(y-1+z^3)&=2018. \end{aligned}$$

Az 1009 prímszám, a 2018 tehát csak kétféleképpen bomlik pozitív egészek szorzatára: $2018=1\cdot 2018=2\cdot 1009$. A bal oldalon mindkét tényező pozitív kell legyen, hiszen $z^3+y-1\geqslant 1+1-1=1$. Továbbá az is biztos, hogy

$$z^3+y-1\geqslant z+y-1>z-1,$$

így csak $z^3+y-1=1009$ és $z-1=2$, illetve $z^3+y-1=2018$ és $z-1=1$ lehetséges.

Az elsőből $z=3$, $y=1009+1-27=983$, $x=2949$, a másodikból pedig $z=2$, $y=2018+1-8=2011$, $x=4022$ adódik. Ellenőrzéssel látható, hogy mindkét gyökpár kielégíti az egyenletet.

II.) Először megmutatjuk, hogy $z\geqslant 7$ esetén nincs megoldása az egyenletnek. Ha $z\geqslant 7$, akkor

$$\begin{aligned} yz-y-z-z^3+z^4\geqslant 7y-y-z-z^3+z^4>z^4-z^3-z=z(z^3-z^2-1)\geqslant\\ \geqslant 7(z^3-z^2-1)=7z^2(z-1)-7\geqslant 7\cdot 49\cdot 6-7=2051. \end{aligned}$$

Az is azonnal adódik, hogy $z=1$ esetén $yz-y-z-z^3+z^4=-1$, így elegendő a továbbiakban $z=2,3,4,5,6$ vizsgálata. Az egyenletből kifejezzük y-t és sorra megvizsgáljuk, hogy melyik z esetén kapunk egész értéket y-ra:

$$y=\frac{2017-z^4+z^3+z}{z-1}.$$

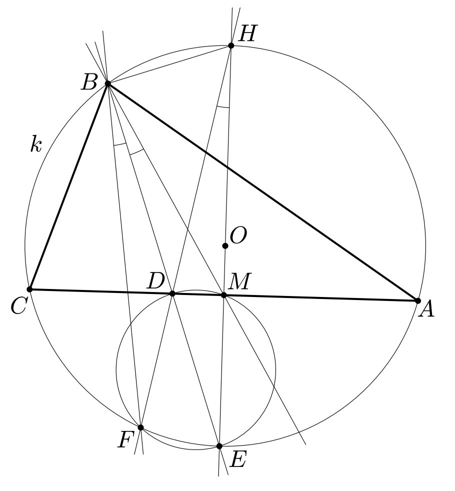
A $z=6$ esetén a tört $\frac{943}{5}$, a $z=5$-re a tört $\frac{1522}{4}$, végül $z=4$-re a tört $\frac{1829}{3}$, egyik sem egész. Marad a $z=3$, ahol $y=983$, továbbá $z=2$, ahol pedig $y=2011$. Az elsőre $x=2949$, a másodikra $x=4022$.

Weisz Máté (Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimn., 10. évf.)
dolgozata alapján

Összesen 127 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 26, 4 pontot 33 tanuló. 3 pontos, illetve 2 pontos egyaránt 23-23 tanuló dolgozata. 1 pontot kapott továbbá 9, 0 pontot 13 versenyző.

B. 4893. *Az ABC háromszögben $AB \neq BC$. A B pontból induló szögfelező a háromszög AC oldalát a D pontban, körülírt körét pedig (a B ponton kívül) az E pontban metszi. A DE szakasz, mint átmérő fölé emelt kör a körülírt kört az E, majd másodszor az E-től különböző F pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy a BF egyenest a BD tengelyre tükrözve az ABC háromszög súlyvonalát kapjuk.*

(*6 pont*)



Megoldás. Használjuk az *ábra* jelöléseit.

Legyen az A, B, C pontokon átmenő k kör középpontja O. Ismert, hogy $AB \neq BC$ esetén az $ABC\sphericalangle$ szögfelezőjének és az AC oldalfelező merőlegesének pontosan egy közös pontja van, és ez a közös pont rajta van az ABC háromszög köré írt körén. Ez a közös pont az E pont, azaz E rajta van az AC oldalfelező merőlegesén.

Jelöljük a OE oldalfelező merőlegesnek és az AC oldalnak a metszéspontját (vagyis AC felezőpontját) M-mel. Mivel $EMD\sphericalangle = 90°$, azért Thalész tétele alapján M rajta van a DFE háromszög körülírt körén. Az EO egyenes messe másodszor a k kört H-ban. Mivel $DFE\sphericalangle = 90°$ és $HFE\sphericalangle = 90°$ (Thalész tétele alapján), a DF egyenes átmegy H-n.

Thalész tétele alapján $HBE\sphericalangle = 90°$, mivel HE átmérő. Vagyis, mivel $HBD\sphericalangle + DMH\sphericalangle = 90° + 90° = 180°$, a $HBDM$ négyszög húrnégyszög. Így a kerületi és középponti szögek tétele alapján $MHD\sphericalangle = MBD\sphericalangle$.

Mivel $HBFE$ is húrnégyszög, ismét a kerületi és középponti szögek tétele alapján $EHF\sphericalangle = EBF\sphericalangle$.

Tehát $DBF\sphericalangle = MBD\sphericalangle$, így BF tükörképe BD-re BM, azaz BF tükörképe valóban a súlyvonal.

Több dolgozat alapján

Többen megjegyezték, hogy a feladat állítása ekvivalens azzal, miszerint a BF egyenes az ABC háromszög egy *szimmediánja.* A szimmediánról bővebben olvashatunk Surányi László: *A háromszög kevésbé ismert nevezetes pontjairól II. rész* (KöMaL – 1984/november) cikkében*.

Összesen 54 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott 41, 5 pontot 4 versenyző. 4 pontos 1, 3 pontos 1, 1 pontos 3 tanuló dolgozata. 0 pontot kapott 2 versenyző, további 2 tanuló dolgozata nem versenyszerű.

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (571–576.)

K. 571. Egy iskola vezetése elrendelte, hogy a tanulók nadrágszárának hossza nem lehet kisebb, mint testmagasságuk egyötöde. Samu nadrágszára hosszának ügyében vizsgálat indult, és az etikai bizottság megállapította, hogy ez éppen a megengedett minimum hossznál annak $\frac{2}{7}$ részével kisebb. Sőt, azt is megállapították, hogy ha 3 cm-rel hosszabb lenne az a nadrágszár, akkor még mindig 20%-kal kisebb lenne, mint a minimális megengedett hossz. Milyen magas Samu?

K. 572. Tom Sawyer és Huckleberry Finn együtt festették a kerítést. Tom egyedül 3 óra alatt, Huck egyedül 4 óra alatt festené le a kerítést. Délben kezdték a munkát, de egy idő után Huck elunta, és elindult pecázni. Tom 10 percig győzködte (ez idő alatt egyikük sem festett), de nem tudta rávenni, hogy tovább dolgozzon, így hozzávágott egy döglött patkányt, és egyedül fejezte be a munkát. 2 óra 34 perckor készen lett, és elment ebédelni. Amikor Huck és Tom együtt dolgoznak, akkor munkatempójuk 20%-kal csökken, mert folyton ugratják egymást. Mikor hagyta abba Huckleberry Finn a festést?

K. 573. Kati, Sanyi és Pisti elmentek az édességboltba. Kati vett 9 egyforma bonbont karácsonyi ajándéknak, de csak 11 000 Ft volt nála, ezért kölcsönkérte Sanyi összes aprópénzét, így pont ki tudta fizetni a bonbonok árát. Közben Sanyinak is megtetszett ez a bonbonfajta, ezért ő is vett 13 dobozzal ajándékozásra, de mivel neki csak kereken 15 000 Ft-ja maradt, ezért kölcsönkérte Pisti összes aprópénzét, és így éppen ki tudta fizetni a bonbonok árát. Tudjuk, hogy egy doboz bonbon ára 0-ra végződik, és a Sanyi, illetve a Kati által kölcsönkért pénzösszeg 1000 Ft alatt volt. Mennyivel tartozik Kati Sanyinak, illetve Sanyi Pistinek?

K. 574. Egy pozitív N számjegyeinek összege ugyanannyi, mint a szám kétszeresében a számjegyek összege.

a) Keressünk egy-egy ilyen kétjegyű, háromjegyű és négyjegyű számot.

b) Mutassuk meg, hogy N osztható 9-cel.

*`http://db.komal.hu/KomalHU/showpdf.phtml?tabla=Cikk&id=198412`.