C gyakorlat megoldása

C. 1432. *Mutassuk meg, hogy bármely n természetes szám esetén található olyan 2^n-nel osztható n-jegyű szám, amelynek számjegyei kizárólag 1-esből és 2-esből állnak.*

I. megoldás. Úgy látjuk be az állítás helyességét, hogy megadunk egy „algoritmust" egy ilyen n-jegyű szám elkészítéséhez.

Nézzük meg az első néhány megoldást:

$$\begin{array}{lcr} n=1 & \longrightarrow & 2=2\cdot 1; \\ n=2 & \longrightarrow & 12=2^2\cdot 3; \\ n=3 & \longrightarrow & 112=2^3\cdot 14; \\ n=4 & \longrightarrow & 2\,112=2^4\cdot 132; \\ n=5 & \longrightarrow & 22\,112=2^5\cdot 691; \\ n=6 & \longrightarrow & 122\,112=2^6\cdot 1908. \end{array}$$

Megfigyelhető a következő szabályszerűség: ha a 2^n-nel való osztás eredménye páratlan szám, akkor 1-es, ha pedig páros szám, akkor 2-es számjegy kerül az előző szám elé.

Bebizonyítjuk, hogy ha továbbra is ezt az eljárást követjük, akkor a keletkező $n+1$-jegyű szám mindig osztható lesz 2^{n+1}-nel.

$n\geqslant 6$ esetén az előzőleg már megkapott n-jegyű szám 2^n-nel való osztásakor vagy páratlan, vagy páros számot kapunk.

I. eset: páratlan számot kapunk. Ekkor írjunk 1-et a szám elé. Az új szám $A=(10^n+n\text{-jegyű szám})$ alakú, vagyis

$$A=2^n\cdot 5^n+2^n(2l+1)=2^n(5^n+2l+1).$$

Mivel 5^n+2l+1 páros szám, ezért $2^{n+1}\mid A$ teljesül.

II. eset: páros számot kapunk. Ekkor írjunk 2-est a szám elé. Az új szám ekkor $B=(2\cdot 10^n+n\text{-jegyű szám})$ alakú:

$$B=2\cdot 2^n\cdot 5^n+2^n\cdot 2k=2^n(2\cdot 5^n+2k).$$

Mivel $2\cdot 5^n+2k$ páros szám, ezért $2^{n+1}\mid B$ teljesül.

Adtunk egy eljárást, amellyel minden n pozitív egész szám esetén készíthető olyan 2^n-nel osztható n-jegyű szám, amelynek számjegyei kizárólag 1-esből és 2-esből állnak.

II. megoldás. 2^n darab olyan n-jegyű szám van, amely csak 1-esből és 2-esből áll (mert minden helyiértékre két szám közül választhatunk).

Az összes ilyen n-jegyű számot elosztva rendre 2^n-nel legfeljebb 2^n darab különböző maradékot kaphatunk az osztás eredményeként (éspedig: $0; 1; 2; \ldots; 2^n - 1$). Belátjuk, hogy minden ilyen n-jegyű szám különböző maradékot ad 2^n-nel osztva.

Indirekt módon tegyük fel, hogy van két különböző, csak 1-esből és 2-esből álló n-jegyű szám, amely ugyanazt a maradékot adja 2^n-nel osztva. Így a két szám különbsége (a nagyobbikból a kisebbet kivonva) osztható lesz 2^n-nel.

Ez a különbség legfeljebb n-jegyű szám lehet, melynek az „első" nem 0 számjegye (az 1-es helyiértéktől indulva a nagyobbak felé) vagy 1-es (a $2 - 1$ miatt), vagy 9-es (az $1 - 2$ miatt). Így ez a különbségként kapott szám $A \cdot 10^k$ alakú lesz, ahol A egy páratlan természetes szám, míg k a 0-k száma az (1-es helyiértéktől indulva) első 1-es vagy 9-es jegyig.

Mivel a különbség legfeljebb n-jegyű, a fentiek alapján legfeljebb $(n-1)$ darab 0-ra végződhet, azaz a különbség legfeljebb 2^{n-1}-gyel osztható (hiszen $10^{n-1} = 2^{n-1} \cdot 5^{n-1}$). Ellentmondáshoz jutottunk, tehát nincs két olyan különböző, csak 1-esből és 2-esből álló n-jegyű szám, amely ugyanazt a maradékot adja a 2^n-nel való osztásnál. Vagyis minden maradék különböző.

Figyelembe véve, hogy pontosan 2^n darab, a feltételeknek megfelelő n-jegyű szám van, így pontosan 2^n darab különböző maradékunk van, vagyis van (pontosan egy darab) olyan n-jegyű szám, amely csupa 1-esből és 2-esből áll és 2^n-nel való osztási maradéka 0 – és ezt akartuk bizonyítani.

mindkét megoldás *Molnár István* (Békéscsaba, Széchenyi István Szki., 10. évf.) munkája

61 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 24 versenyző: Agócs Katinka, Ajtai Boglárka, Balog Lóránd, Bíró Dániel, Bukor Benedek, Deák Péter, Dékány Barnabás, Havlik Miklós, Horváth Dávid, Jankovits András, Julinek István, Kiszelovics Dorina, Mészáros Márton, Molnár István, Németh Csilla Márta, Porkoláb Mercédesz, Rittgasszer Ákos, Spányik Teodor, Surján Anett, Szántó Julianna, Szécsi Adél Lilla, Szepessy Luca, Szőnyi Laura, Tóth Imre. 4 pontos 15, 3 pontos 6, 2 pontos 6, 1 pontos 7, 0 pontos 3 dolgozat.

Matematika feladatok megoldása

B. 4737. *Az ABC derékszögű háromszög AB átfogójához tartozó magasságának talppontja D. Az $ACD\sphericalangle$ és a $BCD\sphericalangle$ szögfelezője az AB átfogót rendre az E és F pontokban metszi. Határozzuk meg az ABC háromszög beírt, és a CEF háromszög körülírt köre sugarainak arányát.*

(*5 pont*) Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)