KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK
INFORMATIKA ROVATTAL BŐVÍTVE
ALAPÍTOTTA: **ARANY DÁNIEL** 1894-ben

67. évfolyam 9. szám Budapest, 2017. december

Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta 64 oldalon. ÁRA: 950 Ft

TARTALOMJEGYZÉK

INDEX: 25 450 ISSN 1215-9247

A szerkesztőség címe: 1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1.A, II. emelet 2.76.;
Telefon: 372-2500/6541; 372-2850
A lap megrendelhető az Interneten:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.h.shtml`.
Előfizetési díj egy évre: 8100 Ft

E-mail: `szerk@komal.hu`
Internet: `http://www.komal.hu`
This journal can be ordered from the Editorial office:
Pázmány Péter sétány 1.A, II. emelet 2.76., 1117–Budapest, Hungary
telephone: +36 (1) 372-2850
or on the Postal address
H–1518 Budapest 112, P.O.B. 32, Hungary,
or on the Internet:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.e.shtml`.

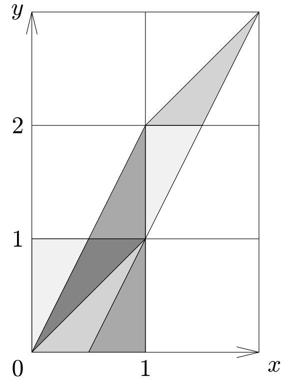
Az Arnold-féle diszkrét macska-leképezés

1. Bevezetés

Legyenek x_0 és y_0 a 0 és 1 közötti számok, valamint

$$(1)\qquad \begin{aligned} x_1 &= x_0 + y_0 \quad \mod 1,\\ y_1 &= x_0 + 2y_0 \quad \mod 1, \end{aligned}$$

ahol a *mod 1* kifejezés törtrész vételét jelenti. Az *1. ábra* szemlélteti, hogy mi történik az egységnégyzettel, ha minden pontjára végrehajtjuk ezt a leképezést: egy irányba megnyúlik, egy másik irányba összeszűkül, majd az így kapott parallelogrammát a *mod 1* művelet visszadarabolja az egységnégyzetbe.



1. ábra. Az egységnégyzet képe az Arnold-féle macska-leképezés hatása alatt

Vlagyimir Arnold orosz matematikus után Arnold-féle macska-leképezésnek szokás ezt nevezni, mivel Arnold egy macska képével szemléltette a leképezés hatását. A leképezés érdekessége abból ered, hogy egyszerűsége ellenére erősen *kaotikus.* Ezalatt azt értjük, hogy ha ismételten végrehajtjuk a leképezést, az egységnégyzet pontjai gyorsan és alaposan megkeverednek. Ennek az az oka, hogy bármely pont egy irányban távolodik az eredeti „szomszédaitól" (amerre nyúlik a négyzet), egy másik irányban pedig közeledik hozzájuk (amerre szűkül a négyzet).

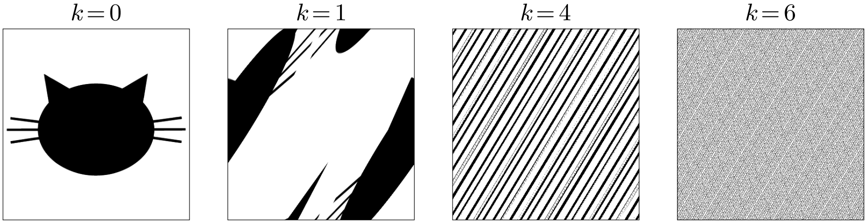
De hogyan is szimulálhatta Arnold ezt a leképezést? A következő eljárás a kézenfekvő: tekintsünk egy $N \times N$ pixel méretű képet, és alkalmazzuk az (1) leképezést minden pixelre. A pixelek koordinátáit legkényelmesebb egész számokban megadni, azaz a következő leképezést alkalmazzuk:

$$(2)\qquad \begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + y_k \quad \mod N,\\ y_{k+1} &= x_k + 2y_k \quad \mod N, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \end{aligned}$$

ahol x_k és y_k a 0 és $N-1$ közötti számok. Mivel a *mod N* kifejezés az N-nel való osztás maradékát veszi, x_{k+1} és y_{k+1} szintén 0 és $N-1$ közé esik.

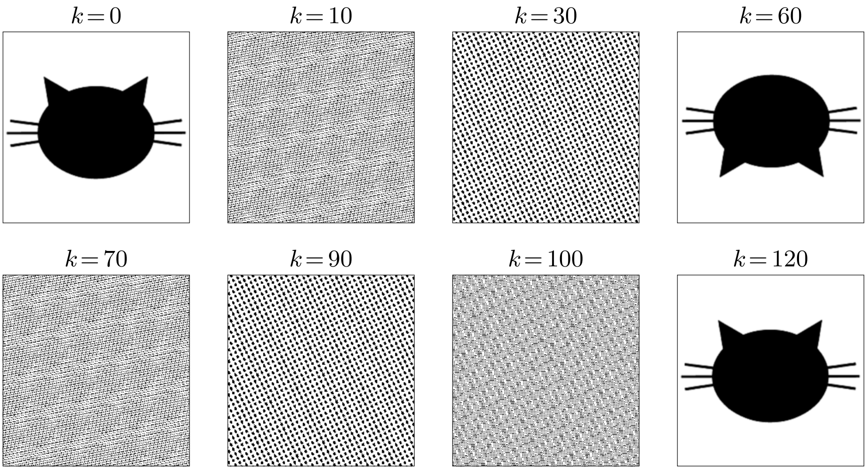
Kezdetben úgy tűnik, hogy a (2) leképezés teljesen összekeveri a képünk pontjait, ahogyan a folytonos változata is. Viszont némi számítógépes kísérletezés után meglepő módon azt tapasztaljuk, hogy kezdeti képünk előbb-utóbb újra megjelenik. De ha egy kicsit jobban belegondolunk, akkor láthatjuk, hogy maga a visszatérés ténye még nem igazán meglepő.

1. feladat. Tegyük fel, hogy a kép minden pixele csak fekete vagy fehér lehet. Mutassuk meg, hogy 2^{N^2} iteráció alatt legalább egy visszatérést tapasztalunk.



2. ábra. Macskából káoszba (k = iterációk száma, $N = 400$)

Ami viszont meglepő, hogy közel sincs szükség ilyen sok iterációra. A *3. ábrán* egy olyan esetet láthatunk, ahol kevesebb, mint $N/2$ iterációra van szükség a visszatéréshez. A következőkben áttekintünk pár egyszerűbb állítást a visszatérési időről.



3. ábra. Visszatér a macska (k = iterációk száma, $N = 241$)

2. Visszatérési idő

Visszatérési időnek fogjuk nevezni azt az iterációszámot, amelyre *először* visszatér az eredeti képünk. Pontosabban, a visszatérési idő az a legkisebb m_N szám, amelyre

$$x_{m_N} = x_0,$$

$$y_{m_N} = y_0$$

teljesül az egységnégyzet valamennyi (x_0, y_0) pontjára.

Fogalmazzuk át ezt a definíciót.

2. feladat. Lássuk be, hogy

$$\begin{aligned} x_k &= u_{2k-1}x_0 + u_{2k}y_0 \quad \mod N, \\ y_k &= u_{2k}x_0 + u_{2k+1}y_0 \quad \mod N, \end{aligned} \tag{3}$$

ahol u_i az i-edik Fibonacci szám (azaz $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, továbbá $u_{i+1} = u_i + u_{i-1}$, $i = 0, 1, \dots$).

Tehát a legkisebb olyan k számot keressük, amelyre

$$\begin{aligned} u_{2k-1} &\equiv 1 \mod N, \\ u_{2k} &\equiv 0 \mod N \end{aligned}$$

teljesül (azaz u_{2k-1} N-nel való osztás után 1 maradékot ad, u_{2k} pedig nullát). Ez a két feltétel elég, hiszen ezekből $u_{2k-1} \equiv 1 \mod N$ következik. Úgy is mondhatjuk, hogy a visszatérési idő egyenlő a Fibonacci számok modulo N periódusának felével. Ezt a periódust szokás Pisano-periódusnak is nevezni. Sajnos zárt formula nem ismert rá, de az idevágó ismereteink jó összefoglalását adja D. D. Wall cikke [9].

A pontos képlet hiányának ellenére léteznek eredmények, amelyek felső korlátot adnak a visszatérési időre. Ezek az állítások egyszerű számelméleti eszközökkel, ám helyenként rendkívül aprólékos munkával bizonyíthatók. Az alábbi állítást Freeman J. Dyson és Harold Falk bizonyította:

1. tétel (Dyson–Falk [5]). *Legyen $N > 2$. Ekkor a visszatérési időre fennáll az*

$$m_N \leqslant \frac{N^2}{2}$$

felső korlát.

Mielőtt rátérnénk a bizonyításra, megjegyezzük, hogy Freeman Dyson neves elméleti fizikus és matematikus, aki leginkább a kvantumelektrodinamika elméletének kidolgozásában vállalt szerepe miatt híres. Jelentőségét a matematikában a róla elnevezett Dyson-transzformált bizonyítja, amely az additív számelmélet egyik alapvető eszköze.

Lássuk most Dyson és Falk bizonyítását, amely a N. Vorobiev könyvében [8] leírt módszert követi.

Bizonyítás. Legyen Φ_k az u_k Fibonacci-szám N-nel való osztási maradéka. Tekintsük a

$$\langle \Phi_0, \Phi_1 \rangle, \langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle, \dots, \langle \Phi_k, \Phi_{k+1} \rangle, \dots \tag{1}$$

rendezett párokat. Vegyük észre, hogy $\langle \Phi_0, \Phi_1 \rangle = \langle 0, 1 \rangle$. Ebben a sorozatban legfeljebb N^2 különböző elem lehet, tehát bármely $N^2 + 1$ elem között szükségszerűen lesz legalább két megegyező. Most bebizonyítunk egy lemmát, hogy aztán tovább haladhassunk a tétel bizonyításával.

1. lemma. *Az első ismétlődő páros a $\langle 0, 1 \rangle$.*

Bizonyítás. Indirekten fogunk érvelni. Tegyük fel, hogy az első ismétlődő pár $\langle \Phi_k, \Phi_{k+1} \rangle$ valamely $k > 0$ számra. Tekintsünk ekkor egy olyan $\langle \Phi_r, \Phi_{r+1} \rangle$, $r > k$

párost, amely megegyezik vele, azaz $\Phi_k = \Phi_r$ és $\Phi_{k+1} = \Phi_{r+1}$. Ekkor a Fibonacci-számok definíciója alapján

$$\Phi_{r-1} \equiv \Phi_{r+1} - \Phi_r \mod N,$$

$$\Phi_{k-1} \equiv \Phi_{k+1} - \Phi_k \mod N,$$

azaz $\Phi_{r-1} = \Phi_{k-1}$. Tehát

$$\langle \Phi_{k-1}, \Phi_k \rangle = \langle \Phi_{r-1}, \Phi_r \rangle,$$

azaz $\langle \Phi_{k-1}, \Phi_k \rangle$ is ismétlődik, és korábban van a (4) sorozatban, mint $\langle \Phi_k, \Phi_{k+1} \rangle$ – ellentmondásra jutottunk. Tehát $k = 0$, és így $\langle \Phi_k, \Phi_{k+1} \rangle = \langle \Phi_0, \Phi_1 \rangle = \langle 0, 1 \rangle$. $\square$

3. feladat. Lássuk be az előző lemma segítségével a következőt: tetszőleges N számra igaz, hogy az (u_0 utáni) első N^2 Fibonacci-szám között lesz legalább egy N-nel osztható.

2. lemma. *Legyen $N > 2$. Ha $u_k \equiv 0 \mod N$ és $u_{k+1} \equiv 1 \mod N$, akkor k páros.*

Bizonyítás. Vezessük be a

$$D_k = u_k u_{k+2} - u_{k+1}^2$$

mennyiséget. $D_0 = -1$, valamint $D_{k+1} = -D_k$, hiszen

$$\begin{aligned} u_{k+1}u_{k+3} - u_{k+2}^2 &= (u_{k+2} - u_k)(u_{k+1} + u_{k+2}) - u_{k+2}^2 = \\ &= u_{k+2}u_{k+1} - u_k u_{k+1} - u_k u_{k+2} = \\ &= -u_k u_{k+2} + (u_{k+2} - u_k)u_{k+1} = \\ &= -u_k u_{k+2} + u_{k+1}^2. \end{aligned}$$

Tehát $D_k = -1$, ha k páros, és $D_k = 1$, ha páratlan. Amennyiben $u_k \equiv 0 \mod N$ és $u_{k+1} \equiv 1 \mod N$, akkor $D_k \equiv -1 \mod N$ – így k páros. $\square$

Innen már könnyű a tétel bizonyítása: tekintsük a $\Phi_0, \Phi_1, \ldots$ sorozatot. A Φ_0, $\Phi_1, \ldots, \Phi_{N^2+1}$ kezdőszeletben ismétlődni fog 0,1 – legyen az első ismétlődés Φ_t, Φ_{t+1}. A 2. lemma alapján t páros, a visszatérési idő definíciója szerint pedig $2m_N = t$. Azaz $m_N \leqslant N^2/2$. $\square$

Egy általánosabb, de kevésbé explicit képletet ad a visszatérési időre Gregory Gaspari:

2. tétel (Gaspari [6]). *Legyen N prímtényezős felbontása $N = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$, ahol p_j prím, és $\alpha_j \in \mathbb{N}$ minden $j = 1, \ldots, k$ esetében. Ekkor*

$$m_N = \mathrm{LKKT}\{m_{p_1^{\alpha_1}}, \ldots, m_{p_k^{\alpha_k}}\},$$

ahol LKKT *a legkisebb közös többszöröst jelöli.*

Megemlítjük, hogy a tétel Fibonacci-számok periódusára vonatkozó megfogalmazása már szerepelt D. D. Wall jóval korábbi cikkében [9]. A Gaspari által adott bizonyítás a következő.

Bizonyítás. Kezdjük a bizonyítást egy *észrevétellel:* azt állítjuk, hogy ha K osztja N-et, akkor m_K osztja m_N-et. Mivel

$$\begin{aligned} u_{2m_N-1} &\equiv 1 \mod N, \\ u_{2m_N} &\equiv 0 \mod N, \end{aligned}$$

és K osztja N-et, azért $u_{2m_N-1} - 1$ a K-val osztva is 1 maradékot ad, valamint u_{2m_N} a K-val is osztható. Azaz

$$\begin{aligned} u_{2m_N-1} &\equiv 1 \mod K, \\ u_{2m_N} &\equiv 0 \mod K. \end{aligned} \tag{5}$$

Mivel m_K a legkisebb szám, amire az (5) kongruencia-rendszer teljesül, m_K kisebb (vagy egyenlő) mint m_N. Tegyük fel, hogy m_N az m_K-val osztva nemnulla maradékot ad, azaz $m_N = qm_K + r$, ahol $0 < r < m_K$, és q egész. Ekkor qm_K iteráció alatt visszatér a képünk q-szor, és mivel m_N iteráció alatt visszatér, r iteráció alatt is vissza kell térnie. De $r < m_K$, és m_K volt a legkisebb idő, ami alatt visszatér a kép, tehát ellentmondásra jutottunk. Azaz $r = 0$, és ezzel beláttuk az észrevételt.

Térjünk rá a tétel bizonyítására. Tetszőleges $j \in \{1, \ldots, k\}$ esetében $p_j^{\alpha_j}$ osztja N-et, tehát az előző észrevételünk miatt $m_{p_j^{\alpha_j}}$ osztja m_N-et. Ebből következik, hogy m_N közös többszöröse az $m_{p_j^{\alpha_j}}$, $j \in \{1, \ldots, k\}$ számoknak. Legyen M egy közös többszöröse a $m_{p_j^{\alpha_j}}$, $j \in \{1, \ldots, k\}$ számoknak. Ekkor

$$\begin{aligned} u_{2M-1} &\equiv 1 \mod p_j^{\alpha_j}, \\ u_{2M} &\equiv 0 \mod p_j^{\alpha_j}. \end{aligned}$$

Mivel a $p_j^{\alpha_j}$ számok különböző prímek hatványaiként páronként relatív prímek,

$$\begin{aligned} u_{2M-1} &\equiv 1 \mod p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k} = N, \\ u_{2M} &\equiv 0 \mod p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k} = N. \end{aligned}$$

Viszont ez azt jelenti, hogy m_N osztja M-et. Mivel m_N a legkisebb egész szám, amire a fenti kongruencia teljesül, m_N a *legkisebb* közös többszöröse az $m_{p_j^{\alpha_j}}$ számoknak. □

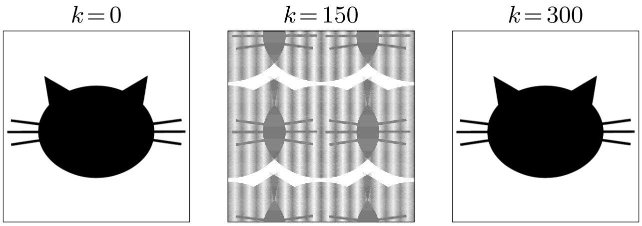
Tehát elég prímhatványokra tudni a visszatérési időt, ebből már tetszőleges számra kiszámítható. De ez még így sem egyszerű feladat. Gaspari cikkének a függelékében $m = 1, \ldots, 195$ periódusokra kigyűjtötte az összes p prímet, amelyre $m_p = m$ – ez nyújthat némi segítséget.

4. feladat. Lássuk be, hogy

a) $m_{241} = 120$ (3. ábra),

b) $m_{400} = 300$ (*4. ábra*).

4*. feladat. Tegyük fel, hogy m_N páros. Milyen N-ek esetében fordul elő hogy $m_N/2$ iteráció után fejtetőn jelenik meg a macska, ahogyan a 3. ábrán is látható? A 4. ábra mutatja, hogy nem mindig ez a helyzet. Itt úgynevezett szellemképek jelennek meg, a magyarázatért lásd a [3] hivatkozást.



4. ábra. $N = 400$, $m_N = 300$

3. Alkalmazások

Bár első ránézésre Arnold macska-leképezése csak egy matematikai játéknak tűnik, a kaotikusságát kihasználva praktikus alkalmazásai is lehetnek. A következő gyűjtés a [7] hivatkozásra támaszkodik.

A legnyilvánvalóbb egy kép vagy szöveg titkosítása: a kép pixeleire, vagy a szöveg $N \times N$-es blokkba rendezett karaktereire alkalmazzuk a macska-leképezés egy megfelelő hatványát. Így alaposan megkeverednek a képpontok (vagy a betűk), avatatlan szemlélő nem képes az eredeti üzenetet visszafejteni. Tovább bonyolítható a helyzet, ha a titkosító egy általánosabb macska-leképezést használ, például az

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + a y_k && \mod N, \\ y_{k+1} &= a x_k + (a^2+1) y_k && \mod N, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{6}$$

vagy az

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + a y_k && \mod N, \\ y_{k+1} &= b x_k + (ab+1) y_k && \mod N, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{7}$$

iterációt. Így az eredeti üzenet csakis az a, b egész számok ismeretében fejthető vissza. Ezeknek a macska-leképezéseknek a viselkedése teljesen hasonló Arnold macskájához. A visszatérési időkről J. Bao és Q. Yang ír a [2] cikkben.

Egy kicsit izgalmasabb alkalmazás a szteganográfiához köthető. A szteganográfia olyan titkos üzenetek létrehozásának tudománya, amelyek létezéséről a feladón kívül csak a címzett tud – szemben a kriptográfiával, ahol az üzenet léte nem rejtély, csak a tartalma. A két módszer együttes alkalmazása természetesen a leghatékonyabb. Tegyük fel, hogy van egy képünk, amiről később majd meg akarjuk állapítani, hogy valaki manipulálta-e. A következő a módszerünk: alkalmazzuk a képünkre a macska-leképezés k darab iterációját, majd helyezzünk rá egy kis vízjelet. Ezután $m_N - k$ iterációval állítsuk vissza az eredeti képet, amelyen a vízjel egy hétköznapi szemlélőnek láthatatlan, hiszen a pixelei alaposan szétszóródtak. Ha később meg akarjuk állapítani, hogy valaki módosította-e a képet, elég a macska-leképezés

k iterációját alkalmazni rá: ha a kép nem lett manipulálva, akkor bár a kép káoszba fullad, a vízjel eredeti állapotában megjelenik a sarokban. A részletek a [4] cikkben találhatók.

Hivatkozások

[1] V.I. Arnold and A. Avez, Ergodic problems of classical mechanics, W.A. Benjamin, *New York* (1968).

[2] Jianghong Bao and Qigui Yang, Period of the discrete arnold cat map and general cat map, *Nonlinear Dynamics,* **70(2)** (2012), 1365–1375.

[3] Ehrhard Behrends, The ghosts of the cat, *Ergodic Theory and Dynamical Systems,* **18(2)** (1998), 321–330.

[4] Young-Long Chen, Her-Terng Yau, and Guo-Jheng Yang, A maximum entropy-based chaotic time-variant fragile watermarking scheme for image tampering detection, *Entropy,* **15(8)** (2013), 3170–3185.

[5] Freeman J. Dyson and Harold Falk, Period of a discrete cat mapping, *The American Mathematical Monthly,* **99(7)** (1992), 603–614.

[6] Gregory Gaspari, The Arnold cat map on prime lattices, *Physica D: Nonlinear Phenomena,* **73(4)** (1994), 352–372.

[7] Fredrik Svanström, Properties of a generalized Arnold's discrete cat map (2014).

[8] Nicolai N. Vorobiev, *Fibonacci numbers,* Birkhäuser (2012).

[9] D.D. Wall, Fibonacci series modulo m, *The American Mathematical Monthly,* **67(6)** (1960), 525–532.

Mincsovicsné Sélley Fanni

Dr. Mezei István

(1946–2017)

Mindenkit váratlanul és mély megdöbbenéssel ért a hír, hogy kollégánk és barátunk, Mezei István 2017. november 4-én, 71 éves korában eltávozott közülünk. A súlyos betegségével vívott egyenlőtlen küzdelmet feladva úgy távozott, amilyen egész életében volt: csendben elaludt, senkit nem terhelve a személyes tragédiájával.

A hírt nem akartuk elhinni, hiszen István maga volt az állandóság, az örök fiatalság, a szellemi frissesség, tettrekészség példaképe. Egyik volt tanítványa ezt írta a hír hallatára: „Eszembe se jutott, hogy ő meghalhat. Talán azért, mert mióta csak megismertem, mindig ugyanaz a lelki béke áradt belőle, ami egy szelíd és kiegyensúlyozott időtlenséget kölcsönzött neki. A halál meg valahogy túl van ezeken a kategóriákon. Talán számára tényleg túl is volt". Igen, Pista ezek felett állt, és ezért minden bizonnyal most is itt van közöttünk.

István 1969-ben matematika–fizika szakos középiskolai tanárként végzett az ELTE Természettudományi Karán. Ezt követően került az Analízis II. Tanszékre, ahol kezdetben gyakornokként, majd egyetemi tanársegédi, később pedig nyugdíjazásáig egyetemi adjunktusi beosztásban dolgozott. Nyugdíjasként is mindvégig tanított, a katedrától csak a kegyetlen sors távolíthatta el.

Pista a tudományt magas szinten művelő, igazi tanárember volt. Minden területen, ahol csak alkotott, a legmagasabb szintet érte el.

Matematikusnak egészen széles látókörű, szinte minden területhez értő szakember volt. Alig volt olyan téma, ahol ne lett volna járatos, és ebben nagy segítségére volt mély ismerete a fizika területéről.

Pályakezdőként a tanszék kutatásaiba bekapcsolódva a variációszámítás és az optimális folyamatok elmélete témaköreiben végzett tudományos munkát. Egyetemi doktori értekezését 1980-ban Végtelen idejű diszkrét optimális folyamatok vizsgálata címmel írta. Eredményeiből 1983-ban a Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, valamint 1984-ben az Annales Universitatis Scientiarium Budapestinensis Sectio Computatorica folyóiratban közölt cikket. A variációszámítás témakörének a tanár szakosok körében való népszerűsítésére született 1982-ben az ELTE TTK Szakmódszertani Közleményeiben a differenciáljátékokról szóló írása. Az analízis oktatásához kapcsolódik az 1986-ban a Műszaki Könyvkiadó gondozásában, társszerzőkkel írt Analízis példatár címmel megjelent feladatgyűjteménye, amely a mai napig az egyik legtöbbünk által használt példatár. Fontos megemlíteni a 2014-ben, a TypoTeX gondozásában megjelent, ugyancsak társszerzőkkel közösen írt „Bevezetés az analízisbe”, illetve „Introductory course in analysis” című könyveit, amelyek számos helyen most is alaptankönyvként szerepelnek.

Pista vérbeli tanár, pedagógus volt. Munkásságának ez volt az a területe, ahol lubickolt, feledhetetlent és utolérhetetlent alkotott. Főállásban mindvégig az Eötvös Loránd Tudományegyetem TTK Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszéken (illetve annak jogelődjein) oktatott. Már pályakezdése elején bekapcsolódott a tanár szakos analízis oktatásába, és abban mindvégig részt is vett. Emellett az esti tagozaton programozó matematikusoknak, valamint matematikatanár szakosoknak tartott analízis előadást, gyakorlatot. Később a geológus szakon a matematika és a differenciálegyenletek előadásokat és a földtudomány szakon az első éves matematika előadást is ő tartotta. Kiemelkedő oktatói munkáját fémjelzi, hogy a hallgatók szavazatai alapján két alkalommal is a Kar Kiváló Oktatója címben részesült.

Órái legendásak voltak, szinte minden hallgató az ő csoportjába szeretett volna bekerülni. Amikor életkora miatt elterjedt a nyugdíjazásának híre, hallgatók csoportjai egymásnak adták a tanszékvezetői szoba kilincsét, kérve, hogy ne küldje el a legjobb és legszeretettebb tanárukat nyugdíjba. És aki szép, megható dolgokat szeretne olvasni, az nézze meg a róla szóló hallgatói véleményeket! A szokásos jelzők: „kedves, jóindulatú, követhető, fantasztikus, emberséges” stb. Jellemző az alábbi vélemény: „Az a tanár, aki miatt érdemes matematikát tanulni. A valaha volt legjobb oktató, akivel találkoztam életem során”.

Az egyetem mellett az Óbudai Árpád Gimnáziumban is tanított, kisebb megszakítással 1987 óta folyamatosan. Az általa tanított gyerekekkel nemcsak megszerettette a matematikát, hanem számtalan diákkal külön foglalkozva, tanulmányi versenyekre is felkészítette őket, ahol a tanítványai mindig jól szerepeltek. Emellett több osztályban tartott matematika szakkört is. Nagyon szerették őt a gyerekek, meghatározó tanári példakép volt számukra. Az évek során több olyan diák is akadt, aki Pista hatására lett tanár vagy választotta a matematika szakot.

A tantestületi kollegáknak külön szakmai előadásokat is tartott. Voltak olyan évek, amikor órarend szerint rendszeresen tartott órákat az analízis rejtelmeiről. Sok éven keresztül az Arany Dániel középiskolai matematikaverseny versenybizottságának is aktív tagja volt feladatok kitűzésében és a dolgozatok javításában egyaránt.

Teljes szakmai életútjának elismeréseként 2017-ben elnyerte a nagy presztízsű „Rátz Tanár Úr” életműdíjat. A kiírás szerint ezt a díjat csak a kimagasló oktató-nevelő tevékenységet végző tanárok kaphatják meg. És István ilyen volt …

Elvesztése mindannyiunk számára felfoghatatlan, súlyos veszteség. Hiányozni fog állandó jelenléte, az, hogy vele meg lehetett beszélni az érdekes feladatokat, eszmét cserélni a világ dolgairól. Nem hallhatjuk érdekes történeteit a túráiról, utazásairól. Mégis, bennünk és tanítványaiban tovább él és megmarad sokáig.

Fantasztikus kolléga, tanár és ember volt! Mi mással is búcsúzhatnánk, mint amivel néhány évvel ezelőtt István búcsúzott egy kolleganőnktől nekrológjában: „Emlékedet megőrizzük! Legyen könnyű az örök álmod!”

Besenyei Ádám, Faragó István (ELTE)

Mezei István először fiai megoldásait hozta be személyesen a szerkesztőségbe. Úgy érezte, nagyon sokat köszönhetnek a lapnak, hálából évekig ő gravíroztatta be a mérési verseny győzteseinek nevét a kupába. Később tanítványai dolgozatait hozta rendszeresen és szállította hátizsákjában a KöMaL-t (50-100 példányt) az Árpád Gimnáziumba. Az októberi megoldásokkal már nem tudott bejönni, így postán adta fel az iskola a csomagot, ami nem jutott el a szerkesztőségbe … A posta visszavitte „a címzett nem kereste” indoklással.

Mindig öröm volt vele találkozni, beszélgetni.

Ratkó Éva

Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

I. rész

1. *a*) $A \cup B$ halmaznak 192 eleme van. $A \cap B$ elemszáma A elemszámának 20%-a, B elemszámának 15%-a. Hány eleme van az A és a B halmaznak? (*6 pont*)

b) Egy város felnőtt lakosságának 30%-a nyugdíjas. A nyugdíjasok 55%-a nő. A férfiaknak 73%-a aktív korú (nem nyugdíjas). Bizonyítsuk be, hogy a városban a felnőtt férfiak és nők száma egyenlő. (*5 pont*)

2. *a*) Oldjuk meg az egyenletet a valós számok halmazán: $3^{2+x}+3^{6-x}=2190$. (*7 pont*)

b) Legyen az a_n sorozat definíciója: $a_n=8^{n(n+1)}$. Bizonyítsuk be, hogy a sorozat első n tagjának szorzata $2^{n(n+1)(n+2)}$. (*7 pont*)

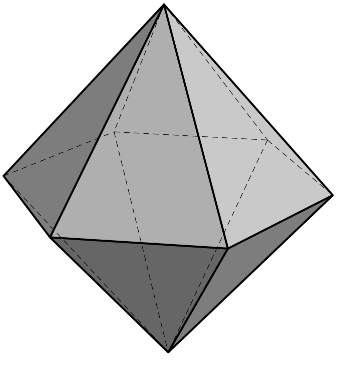
3. *a*) Egy 10 egység sugarú körbe az $ABCD$ négyszöget írtuk. A négyszög két átlója 70°-os szögben metszi egymást. Az AC átló hossza 20 egység, és a CD oldallal 40°-os szöget zár be. Számítsuk ki a négyszög szögeit. (*6 pont*)

b) Egy 10 egység sugarú gömbbe csonkakúpot írunk, melynek alap-, illetve fedőlapja a gömb középpontjától 6 cm, illetve 8 cm távolságra van. (A gömb középpontja a két sík közé esik.) Számítsuk ki a csonkakúp felszínét. (*8 pont*)

4. Elemezzük monotonitás szempontjából a valós számok halmazán értelmezett $f(x)=x^4-8x^3+13{,}5x^2+10$ függvényt, és adjuk meg lokális szélsőértékeit. (*12 pont*)

II. rész

5. Egy dobókockához hasonlóan használható fajáték alakja két egybevágó, alapjuknál egymáshoz illesztett szabályos hatoldalú gúla, amelyeknek alapéle 2 cm, oldaléle 3 cm.

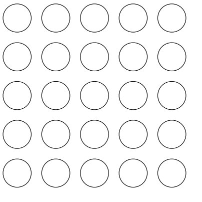


a) Számítsuk ki a test tömegét (grammban kifejezve), ha anyagának sűrűsége 430 kg/m^3. (*7 pont*)

b) A test lapjai közül négy piros, a többi fekete. A piros dobás jelent szerencsét a társasjátékban. Ha tíz játékos dob egyszerre egy-egy ilyen testtel, mekkora a valószínűsége, hogy a játékosoknak pontosan a fele dob pirosat? (*3 pont*)

c) A játék során a tíz játékos összesen öt alkalommal dobott egyszerre. Mindegyik alkalommal feljegyezték a piros dobások számát. Mind az öt esetben a játékosok kevesebb, mint fele dobott pirosat, de olyan nem fordult elő, hogy egyiküknek sem volt szerencséje. Mi volt az öt feljegyzett szám, ha átlaguk 1,6 és szórásuk 0,8? (A számok sorrendje nem kérdés.) (*6 pont*)

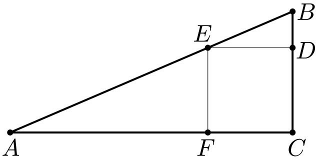
6. Az *ábrán* látható huszonöt kör mindegyikét fehérre vagy feketére színezzük. (Az ábra rögzített, a mozgatással egymásba vihető színezéseket nem tekintjük azonosnak.)



a) Hány olyan színezés lehetséges, amelyben több a fekete kör, mint a fehér? (*3 pont*)

b) Hány olyan színezés lehetséges, amely szimmetrikus az ábra vízszintes vagy függőleges tengelyére? (*6 pont*)

c) Hány olyan színezés lehetséges, amelyben pontosan 7 kör fekete, és szimmetrikus az ábra függőleges tengelyére? (*7 pont*)



7. Az ABC derékszögű háromszög befogói $AC = 7$ egység, $BC = 3$ egység. A háromszögbe az *ábrán* látható módon négyzetet írtunk.

a) Milyen hosszú a négyzet oldala? (*4 pont*)

Az AFE derékszögű háromszögbe ugyanilyen módon újabb négyzetet írunk, majd az ekkor keletkezett újabb, A csúccsal rendelkező derékszögű háromszögbe újabb négyzetet stb.

b) Milyen hosszú a hatodik négyzet oldala? (*4 pont*)

c) Tovább folytatva az eljárást, összesen hány négyzet oldala lesz nagyobb, mint 0,0001? (*4 pont*)

d) Mekkora a négyzetek „fölött” (DBE mintájára) keletkező végtelen sok derékszögű háromszög területének összege? (*4 pont*)

8. *a*) Egy várfal nyugat-keleti irányú egyenes szakaszán négy kisméretű bástya áll, sorrendben A, B, C és D. Az A és a D bástya az egyenes fal két végén helyezkedik el. Egy, az A bástyától pontosan északi irányban található megfigyelőpontból az AB szakasz 31°-os, a BC szakasz 17°-os, a CD szakasz pedig 14°-os szögben látszik. A bástyák közötti távolságok közül csak a BC távolságot ismerjük, ez 200 méter. Mekkora az AB és a CD távolság? Készítsünk ábrát. Az eredményeket 10 m pontossággal adjuk meg. (*7 pont*)

b) Egy egyenlőszárú háromszög szárhoz tartozó súlyvonala az alappal 20°-os szöget zár be. Mekkorák a háromszög szögei? (*9 pont*)

9. Két, véletlenszám-generátor segítségével előállított 0 és 10 közötti számot jelöljünk x-szel és y-nal. Adjuk meg, mekkora az alábbi események valószínűsége:

$$A:\ x+y \leqslant 8; \quad B:\ x^2+y^2+49 \leqslant 10(x+y); \quad C:\ 20y \geqslant x^2. \qquad (16\ pont)$$

Deák Anna
Budapest

Megoldásvázlatok a 2017/8. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *a*) *Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet:*

$$\lg x - \left(1 - \lg^2 x\right) = -1.$$

b) *Igazoljuk, hogy a következő egyenletnek nincs valós megoldása:*

$$\left|\sin^2 x - \cos x\right| = -x^2. \qquad (11\ pont)$$

Megoldás. *a*) Az egyenlet értelmezési tartománya: $x > 0$.

A zárójel felbontása és az egyenlet rendezése után kapjuk: $\lg^2 x + \lg x = 0$. Vagyis két eset van:

I. Ha $\lg x = 0$, akkor $x = 1$.

II. Ha $\lg x = -1$, akkor $x = \frac{1}{10}$.

A kapott értékek benne vannak az értelmezési tartományban, ezért mindkettő megoldása az egyenletnek.

b) Az egyenlet bal oldala minden valós x esetén nemnegatív, az egyenlet jobb oldala pedig nempozitív értékeket vesz fel. Megoldás abban az esetben lehetne, ha mindkét oldal értéke 0 lenne.

A jobb oldal helyettesítési értéke csak $x = 0$ esetén lesz 0. Ebben az esetben a bal oldal helyettesítési értéke: $\left|\sin^2 0 - \cos 0\right| = |0 - 1| = 1$.

Vagyis a két oldal értéke nem egyenlő, valóban nincs valós megoldása az egyenletnek.

2. *Adott a derékszögű koordináta-rendszerben három pont:* $A(4;7)$, $B(-6;-4)$, $C(2;-3)$.

a) *Számítsuk ki az* $ABCD$ *paralelogramma* AC *és* BD *átlóegyenesének hajlásszögét.*

b) *Igazoljuk, hogy az* $ABCD$ *paralelogramma területének mérőszáma egész szám.* (*12 pont*)

Megoldás. *a*) *I. megoldás.* A paralelogramma K középpontja az AC szakasz felezőpontja lesz. A megadott koordináták alapján: $K(3;2)$. A két átlóegyenes azonos a BKC háromszög KB és KC oldalegyenesével, ezért meghatározzuk a BKC háromszög K csúcsnál lévő belső szögét.

Mindhárom csúcs koordinátáját ismerjük, ezért kiszámolhatjuk az oldalak hosszát, majd koszinusztétellel megkapjuk a keresett φ szöget:

$$KB = \sqrt{(-6-3)^2 + (-4-2)^2} = \sqrt{117} = 3\sqrt{13}\,,$$

$$KC = \sqrt{(2-3)^2 + (-3-2)^2} = \sqrt{26}\,,$$

$$BC = \sqrt{(-6-2)^2 + (-4+3)^2} = \sqrt{65}\,.$$

Koszinusztétel a BKC háromszögben:

$$65 = 117 + 26 - 2 \cdot 3\sqrt{13} \cdot \sqrt{26} \cdot \cos\varphi, \quad 65 = 143 - 78\sqrt{2} \cdot \cos\varphi, \quad \cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Vagyis a BKC háromszögben a K csúcsnál lévő szög 45°. Ez azt jelenti, hogy az $ABCD$ paralelogramma AC és BD átlóegyenesének hajlásszöge 45°.

II. megoldás. A K pont koordinátái: $K(3;2)$.

Ebből $\overrightarrow{KB}(-9;-6)$ és $\overrightarrow{KC}(-1;-5)$. A két vektor skaláris szorzatát kétféleképpen felírva:

$$\overrightarrow{KB}\cdot\overrightarrow{KC}=(-9)\cdot(-1)+(-6)\cdot(-5)=39,$$

$$\overrightarrow{KB}\cdot\overrightarrow{KC}=|\overrightarrow{KB}|\cdot|\overrightarrow{KC}|\cdot\cos\varphi=\sqrt{81+36}\cdot\sqrt{1+25}\cdot\cos\varphi.$$

A két egyenlet jobb oldala egyenlő:

$$39=\sqrt{117}\cdot\sqrt{26}\cdot\cos\varphi,$$

$$\frac{\sqrt2}{2}=\cos\varphi.$$

Mivel $0\leqslant\varphi<180°$, ezért ebből $\varphi=45°$ következik.

b) A BD átlójú, a tengelyekkel párhuzamos oldalú $BPDQ$ téglalap lefedi az $ABCD$ paralelogrammát. A $BPDQ$ téglalap területéből kivonjuk a fölösleges síkidomok területét, hogy megkapjuk az $ABCD$ paralelogramma területét.

A BD átlónak is K a felezőpontja, ezért B és K koordinátáinak ismeretében: $D(12;8)$. A B és D pontok koordinátáiból meghatározható a $BPDQ$ téglalap oldalainak hossza: $BP=18$, $DP=12$. A $BPDQ$ téglalap területe: 216.

A fölösleges síkidomok: a BC átfogójú derékszögű háromszög kétszer, a DC átfogójú derékszögű háromszög kétszer, és a CP átlójú téglalap kétszer. Ezeknek a síkidomoknak az oldalai párhuzamosak a tengelyekkel, az ismert koordináták segítségével a szükséges oldalhosszak is megvannak. Vagyis az $ABCD$ paralelogramma területe:

$$216-2\cdot\frac{8\cdot1}{2}-2\cdot\frac{10\cdot11}{2}-2\cdot10\cdot1=78.$$

Az $ABCD$ paralelogramma területének mérőszáma valóban egész szám.

Megjegyzés. Mivel az *a*) részben az átlók hajlásszögét pontosan határoztuk meg, ezért az igazoláshoz azt is felhasználhatjuk. Az $ABCD$ paralelogramma területe a BKC háromszög területének négyszeresével egyenlő (hiszen a paralelogrammákat az átlóik négy egyenlő területű háromszögre vágják). A BKC háromszögben $KB=3\sqrt{13}$, $KC=\sqrt{26}$ és $\varphi=45°$, ezért a területe:

$$\frac{3\sqrt{13}\cdot\sqrt{26}\cdot\frac{\sqrt2}{2}}{2}=\frac{39}{2}.$$

Ennek négyszerese 78, vagyis a keresett terület mérőszáma valóban egész szám.

3. *Egy pékségben az öt legnépszerűbb péksütemény az eladási adatok alapján sorrendben: I. sós négyes, II. rozsos zsömle, III. sajtos rúd, IV. óriás kifli, V. kenyérlángos. Az ezekből eladott mennyiség átlaga és mediánja is tegnap* 122 db *volt, az öt darabszám egyetlen módusza pedig* 114. *Az egyik termékből átlagos mennyiséget adtak el, az öt adat terjedelme pedig* 22.

a) *Adjuk meg az egyes péksütemények relatív gyakoriságát három tizedesjegy pontossággal.*

b) Mekkora a darabszámok szórása?

c) Ma nyitás után az első hat vásárló mindegyike vásárolt a fenti péksütemények közül egyet. Hányféleképpen tehették ezt meg, ha a vásárlásuk után mindegyik termékből fogyott legalább egy darab? (*14 pont*)

Megoldás. *a*) Mivel a felsorolás az eladási adatok sorrendjében történt, és a darabszámok mediánja 122, ezért sajtos rúdból 122 darabot adtak el tegnap. Az öt darabszám egyetlen módusza 114. Ez azt jelenti, hogy pontosan két olyan termék van, amelyből 114 darabot adtak el. Ezek csakis a negyedik és ötödik helyen állók lehetnek. Ezek alapján tudjuk, hogy óriás kifliből és kenyérlángosból is 114 darab fogyott tegnap. Az öt adat terjedelme 22, vagyis az első helyen szereplő sós négyes darabszáma 22-vel több, mint a kenyérlángosé, azaz 136 db. Az öt adat átlagát is ismerjük, így felírhatjuk a következő egyenletet:

$$\frac{136+x+122+114+114}{5}=122,$$

amiből $x=124$ adódik.

Vagyis rozsos zsömléből 124 darabot adtak el.

Az öt darabszám, azaz a termékek gyakorisága sorrendben: 136, 124, 122, 114, 114. Ezek összege: $5\cdot 122=610$.

A gyakoriságokat 610-zel osztva megkapjuk a relatív gyakoriságokat. Ezek a következő táblázatban láthatók három tizedesjegy pontossággal:

Termék neve	Sós négyes	Rozsos zsömle	Sajtos rúd	Óriás kifli	Kenyér-lángos
Relatív gyakoriság	0,223	0,203	0,2	0,187	0,187

b) Adott volt az adatok átlaga: 122, ismerjük a gyakoriságokat: 136, 124, 122, 114, 114. Ezek alapján a szórás:

$$\sqrt{\frac{(136-122)^2+(124-122)^2+(122-122)^2+(114-122)^2+(114-122)^2}{5}}=$$

$$=\sqrt{\frac{328}{5}}\approx 8{,}1.$$

c) Valamelyik termékből kettőnek kellett elfogynia. Rögzítsük ilyen szempontból az egyik péksüteményt, ebben az esetben hat termék sorba rendezéséről van szó, amelyek között kettő egyforma: $P_6^2=\frac{6!}{2}=360$.

Természetesen az öt közül bármelyik lehet az, amelyikből kettőt adtak el, ezért a végeredményt az előző darabszám ötszöröse adja.

Az összes lehetőség száma: 1800.

4. *Két téglalap alakú grafikáról tudjuk, hogy mindkettőnek* 65 cm *az átlója. Az egyik oldalainak aránya* $3:4$, *a másiknak pedig* $5:12$.

a) Melyiknek nagyobb és mennyivel a területe?

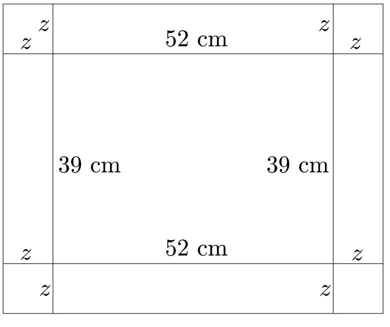
b) Az elsőt úgy szeretnék keretezni, hogy a képet körülvevő szegély területe pontosan a kép területével legyen egyenlő, és a szegély mind a négy oldalon ugyanolyan széles legyen. Mekkora az így kapott, keretezendő kép kerülete?

c) A második kapjon olyan szegélyt keretezés előtt, hogy az oldalak aránya változzon $7:16$*-ra. Ennek a szegélynek a területe* $1300\ \mathrm{cm}^2$ *legyen, úgy, hogy a bal és jobb oldalon egyenlő, illetve lent és fent is egyenlő szélességű. Milyen széles lesz a szegély a grafika egyes oldalai mentén?* (*14 pont*)

Megoldás. *a*) Az első téglalap oldalainak hossza legyen $3x$ cm és $4x$ cm. Ekkor a Pitagorasz-tétel alapján: $(3x)^2+(4x)^2=65^2$, amiből $x=13$. A téglalap oldalainak hossza: 39 cm és 52 cm, a területe: $2028\ \mathrm{cm}^2$.

A második téglalap oldalainak hossza legyen $5y$ cm és $12y$ cm. Ekkor a Pitagorasz-tétel alapján: $(5y)^2+(12y)^2=65^2$, amiből $y=5$. A téglalap oldalainak hossza: 25 cm és 60 cm, a területe: $1500\ \mathrm{cm}^2$.

Vagyis az első grafika területe $528\ \mathrm{cm}^2$-rel nagyobb.



b) Már tudjuk, hogy ez a grafika 39 cm-szer 52 cm-es méretű. A szegély szélessége legyen mindenütt z cm. Ekkor a szegély 2–2 egybevágó téglalapra és 4 négyzetre bontható.

Ezek alapján felírható a következő egyenlet:

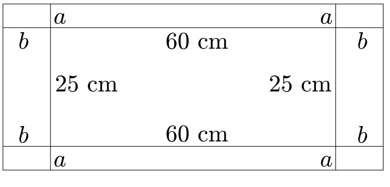
$$2\cdot 52\cdot z+2\cdot 39\cdot z+4\cdot z^2=2028,$$

$$2z^2+91z-1014=0.$$

Megoldóképlettel az egyenlet pozitív gyökének kétszeresére van szükségünk, hiszen a keretezendő grafika szélessége és magassága is ennyivel növekedik: $2z\approx 18{,}5$. A megváltozott oldalhosszak: 57,5 cm és 70,5 cm.

Vagyis a keretezendő kép kerülete: $2(57{,}5+70{,}5)=256$ cm.

c) A szegélyekkel növelt kép oldalainak hossza: $25+2a$ és $60+2b$.



A következő arány ismert: $\frac{25+2a}{60+2b}=\frac{7}{16}$, $32a+400=14b+420$, $a=\frac{7b+10}{16}$.

A szegély 8 téglalapra bontható, melyek közül 2-2-4 egybevágó. Ezek alapján felírható a következő egyenlet:

$$2\cdot 60a+2\cdot 25b+4\cdot ab=1300,$$

$$2ab+60a+25b-650=0.$$

Ebbe az egyenletbe behelyettesíthető az a-ra kapott kifejezés:

$$2 \cdot \frac{7b+10}{16} \cdot b + 60 \cdot \frac{7b+10}{16} + 25b - 650 = 0,$$

$$b^2 + 60b - 700 = 0.$$

Megoldóképlettel az egyenlet pozitív gyöke: $b = 10$. Ekkor $a = \frac{7\cdot 10+10}{16} = 5$. Vagyis a grafika jobb és bal szélén 10–10 cm, fönt és lent 5–5 cm széles lesz a szegély.

II. rész

5. *Adott a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = x^2 - 42x + 425$ hozzárendelésű függvény.*

a) Igazoljuk, hogy az $f(x)$ függvény képére illeszkedő 15, 20, 24 és 25 abszcisszájú pontok húrnégyszöget határoznak meg. Adjuk meg a körülírható kör középpontját és sugarát.

b) Mekkora területű síkidomot határol az $f(x)$ függvény képe és az x tengely?

c) Adjuk meg az $f(x)$ függvény grafikonját a $(20; -15)$ pontban érintő egyenes egyenletét. (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Behelyettesítéssel megadhatók a pontok második koordinátái is:

Mivel $f(15) = 15^2 - 42 \cdot 15 + 425 = 20$, ezért $A(15; 20)$.
Mivel $f(20) = 20^2 - 42 \cdot 20 + 425 = -15$, ezért $B(20; -15)$.
Mivel $f(24) = 24^2 - 42 \cdot 24 + 425 = -7$, ezért $C(24; -7)$.
Mivel $f(25) = 25^2 - 42 \cdot 25 + 425 = 0$, ezért $D(25; 0)$.

Ha $ABCD$ húrnégyszög lenne, akkor bármelyik két csúcsot összekötő szakasz ugyanannak a körnek a húrja lenne. A húr felezőmerőlegesére illeszkedik a kör középpontja, ezért két húr felezőmerőlegesének metszéspontja adhatja a keresett kör középpontját.

Az AD húr f felezőmerőlegese átmegy az AD szakasz P felezőpontján: $P(20; 10)$, és egyik normálvektora: $\overrightarrow{AD}(25-15; 0-20)$, de vehetjük a hosszának a tizedét: $(1; -2)$. Ezeket felhasználva az f egyenes egyenlete: $x - 2y = 0$.

Az BC húr g felezőmerőlegese átmegy a BC szakasz Q felezőpontján: $Q(22; -11)$, és egyik normálvektora: $\overrightarrow{BC}\big(24-20; -7-(-15)\big)$, de vehetjük a hosszának a negyedét: $(1; 2)$. Ezeket felhasználva a g egyenes egyenlete: $x + 2y = 0$.

Az f és a g egyenes az origóban metszi egymást.

Mivel $OA = OD = 25$ és $OB = OC = 25$, ezért a négy pont az origó középpontú 25 egység sugarú körre illeszkedik, vagyis valóban húrnégyszöget alkot.

b) Az f függvény hozzárendelési szabályát alakítsuk át:

$$f(x) = x^2 - 42x + 425 = (x-21)^2 - 16.$$

Ez azt jelenti, hogy a $g(x) = x^2$ hozzárendelésű függvény $(21; -16)$ vektorral történő eltolásával kapjuk $f(x)$-et. A terület meghatározásánál kényelmesebb a számolás, ha $g(x)$-hez kapcsolódóan határozzuk meg a megfelelő síkidom területét, azaz a $[-4;4]$ intervallumon a görbe alatti területet kell kivonnunk a 8-szor 16-os téglalap területéből.

A görbe alatti területet határozott integrállal határozhatjuk meg:

$$\int_{-4}^{4} x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-4}^{4} = \frac{4^3}{3} - \frac{(-4)^3}{3} = \frac{128}{3}.$$

A keresett terület: $8 \cdot 16 - \frac{128}{3} = \frac{256}{3}$.

c) Az érintő meredekségét $f(x)$ deriváltja adja $x = 20$-nál.

$$f'(x) = \left(x^2 - 42x + 425\right)' = 2x - 42,$$
$$f'(20) = 2 \cdot 20 - 42 = -2.$$

A $(20;-15)$ pontra illeszkedő, -2 meredekségű egyenes egyenlete: $y + 15 = -2(x - 20)$, amit $2x + y = 25$ alakban is írhatunk.

6. *Egy kockát az oldallapjaival párhuzamos síkok mentén* n^3 *darab kisebb, egybevágó kockára vágunk.*

a) *Hány darab sík mentén történik a vágás? (A vágások alatt a részeket nem mozdítjuk el egymástól.)*

Egy kockát az oldallapjaival párhuzamos síkok mentén kisebb, egybevágó kockákra vágunk.

b) *Hány darab kis kockára kell vágnunk a nagy kockát, ha ezáltal a felszín ötszöröződik?*

Egy fehérre festett, 9 cm *élhosszúságú kockát az oldallapjaival párhuzamos síkok mentén* 27 *darab egybevágó kis kockára vágtunk szét. A vágásfelületeket úgy festettük pirosra és zöldre, hogy a kis kockákból kirakható legyen egy piros, illetve egy zöld, az eredeti fehér kockával azonos méretű tömör kocka. Mekkora a valószínűsége annak, hogy az így kialakított készletből véletlenszerűen egy olyan kis kockát választhatunk, amellyel*

c) 0,5 *valószínűséggel pirosat dobunk;*

d) *csak kétféle színt dobhatunk?*

e) *A kis kockákból egy olyan lyukas kockát építünk, hogy minden lap közepén át lehet látni az építményen. Mekkora az így kapott test térfogata, felszíne?*

(*16 pont*)

Megoldás. *a*) Egy élt a párhuzamos síkoknak n részre kell vágniuk. Ehhez $n - 1$ darab sík kell. Mindhárom irányban ennyi síkra van szükség. Vagyis a síkok száma: $3n - 3$.

b) Legyen a nagy kocka felszíne $6T$. Egy megfelelő vágás a felületet $2T$-vel növeli. Ha azt szeretnénk, hogy a felszín ötszöröződjön, akkor a felületet $24T$-vel kell növelnünk. Ezt 12 vágással érhetjük el, azaz minden irányban 4 sík mentén kell vágnunk, így $5 \cdot 5 \cdot 5$ darab kis kockát kapunk.

Vagyis 125 kis kockának lesz a felszíne ötször annyi, mint az eredeti nagy kockáé volt.

c) Pontosan 8 darab kis kockán kell pontosan 3 lapot pirosra festenünk, hiszen csak ebben az esetben lehetséges a piros nagy kocka elkészítése. (A festetlen felület nagysága két nagy kocka felszínével egyenlő, ezért piros nagy kocka építése esetén minden piros felületnek, zöld nagy kocka építése esetén pedig minden zöld felületnek látszania kell.)

Vagyis a keresett valószínűség: $\frac{8}{27}$.

d) Csak a nagy kocka középső kis kockája lehet olyan, amelyiken két szín van, hiszen egy adott színű nagy kocka összeállításánál minden adott színű lapnak a felszínen kell lennie. Vagyis a készletben

1 db 3 lapja piros, 3 lapja zöld,
1 db 3 lapja zöld, 3 lapja fehér,
1 db 3 lapja fehér, 3 lapja piros kis kockának kell lennie.

Vagyis a keresett valószínűség: $\frac{3}{27}=\frac{1}{9}$.

e) Az építményt úgy kapjuk az eredeti nagy kockából, ha elvesszük a lapközepeken lévő kis kockát, és a középsőt. Vagyis 20 darab 3 cm élű kis kockából készíthető el. Ezért a térfogata: $V=20\cdot 3^3=540\ \left(\mathrm{cm}^3\right)$.

Az összeállításnál a 8 sarok kis kockának 3 lapja van a test felületén, a 12 élfelezőnél lévő kis kockáknak pedig 4 lapja. A kis kockák lapjai 9 cm^2 területűek. Ezek alapján a test felszíne: $A=9\cdot(8\cdot 3+12\cdot 4)=648\ \left(\mathrm{cm}^2\right)$.

7. *a*) *Kilenc egymást követő egész szám közül az öt kisebbnek a négyzetösszege egyenlő a négy nagyobbnak a négyzetösszegével. Adjuk meg a kilenc számot.*

b) *Igazoljuk, hogy kilenc egymást követő egész szám közül a hat kisebbnek a négyzetösszege nem lehet egyenlő a három nagyobbnak a négyzetösszegével.*

c) *Létezik-e öt olyan gömb, melyeknek sugara centiméterben mérve öt egymást követő egész szám, és a három kisebb gömb térfogatösszege egyenlő a két nagyobb gömb térfogatösszegével?*

d) *Egy téglatest két élének hossza egymást követő két egész számmal adható meg, a testátlójának hossza pedig az előző két egész szám szorzatánál* 1*-gyel nagyobb. Igazoljuk, hogy a téglatest harmadik élének hossza is egész számmal adható meg.*

(*16 pont*)

Megoldás. *a*) Legyen a kilenc egész szám közül a középső n. Ekkor a következő egyenlet írható fel a szöveg alapján:

$$(n-4)^2+(n-3)^2+(n-2)^2+(n-1)^2+n^2=$$
$$=(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2+(n+4)^2,$$

amiből

$$n^2-40n=0.$$

Az így kapott hiányos másodfokú egyenlet két gyöke: $n_1=0$, $n_2=40$.

Két megoldást kaptunk:

I. eset: -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4.

II. eset: 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44.

b) Ebben az esetben így módosul az egyenlet:

$$(n-4)^2+(n-3)^2+(n-2)^2+(n-1)^2+n^2+(n+1)^2=$$
$$=(n+2)^2+(n+3)^2+(n+4)^2,$$
$$3n^2-36n+2=0.$$

Megoldóképlettel kapjuk, hogy n nem lesz egész szám. Ezzel az állítást igazoltuk.

c) Legyen az öt sugár hossza centiméterben mérve $r-2$, $r-1$, r, $r+1$, $r+2$, ahol r egy 2-nél nagyobb egész szám. A feladat szövege szerint felírhatjuk a térfogatok közötti összefüggést:

$$\frac{4\pi(r-2)^3}{3}+\frac{4\pi(r-1)^3}{3}+\frac{4\pi r^3}{3}=\frac{4\pi(r+1)^3}{3}+\frac{4\pi(r+2)^3}{3},$$
$$(r-2)^3+(r-1)^3+r^3=(r+1)^3+(r+2)^3,$$
$$r^3-18r^2=18.$$

Mivel r egész szám, és 2-nél nagyobb, ezért csak a 18-nak a 2-nél nagyobb osztói jöhetnek szóba. Ezek a számok a 3, 6, 9, 18.

Behelyettesítéssel látható, hogy egyik sem jó.

Vagyis nem létezik a feladat kérésének megfelelő öt gömb.

d) Legyen a téglatest éleinek hossza: a, $a+1$, c. Tudjuk, hogy a testátlójának hossza $a(a+1)+1=a^2+a+1$, ahol a pozitív egész szám. Igazolandó, hogy a harmadik él hossza, c is az.

Írjuk fel a téglatest élei és testátlója közötti (a Pitagorasz-tétel kétszeri alkalmazásával kapható) kapcsolatot:

$$a^2+(a+1)^2+c^2=\left(a^2+a+1\right)^2,$$
$$c^2=\left(a^2+a+1\right)^2-a^2-(a+1)^2=$$
$$=a^4+a^2+1+2a^3+2a^2+2a-a^2-a^2-2a-1,$$
$$c^2=a^4+2a^3+a^2=a^2(a+1)^2.$$

Ebből következik, hogy $c=a(a+1)$.

Mivel a pozitív egész szám volt, ezért c is az.

8. *Tóbiás király (akit a mesében a nép csak Palacsintás királynak nevez) nagyon elszegényedett, ezért kénytelen volt január elsején a Derelye főszakács érdekeltségi köréhez tartozó banktól* 8 *millió fabatka kölcsönt felvenni. A Derelye Bank* 12 *évi futamidőre, évi* 9%*-os kamatra adta a kölcsönt, és ezt minden év végén egyenlő összegekkel kell visszafizetnie a királynak. Mennyi lesz az évente visszafizetendő törlesztőrészlet? Mennyi pénzt fizet vissza összesen* 12 *év alatt a király?*

(*16 pont*)

Megoldás. A rövidebb írásmód miatt jelöljük a-val a 8 millió fabatkát, és legyen x az évenkénti törlesztőrészlet.

Az első év végén a tartozás az a összeg és annak a 9%-a, csökkentve a törlesztőrészlettel: $a \cdot 1{,}09 - x$.

A második év végén a tartozás az $a \cdot 1{,}09 - x$ összeg és annak a 9%-a, csökkentve a törlesztőrészlettel:

$$(a \cdot 1{,}09 - x) \cdot 1{,}09 - x = a \cdot 1{,}09^2 - 1{,}09x - x.$$

A harmadik év végén a tartozás:

$$\left(a \cdot 1{,}09^2 - 1{,}09x - x\right) \cdot 1{,}09 - x = a \cdot 1{,}09^3 - 1{,}09^2x - 1{,}09x - x.$$

Ezt továbbgondolva felírhatjuk a tartozást ilyen alakban a 12. év végére, de tudjuk, hogy ekkor ez a tartozás 0 kellene, hogy legyen:

$$a \cdot 1{,}09^{12} - 1{,}09^{11}x - 1{,}09^{10}x - \ldots - 1{,}09x - x = 0,$$

$$a \cdot 1{,}09^{12} - x\left(1{,}09^{11} + 1{,}09^{10} + \ldots + 1{,}09 + 1\right) = 0.$$

A zárójelben egy mértani sorozat első 12 tagjának összege szerepel. A sorozat első tagja 1, hányadosa 1,09, ezért az egyenletet írhatjuk a következő alakban (felhasználva a mértani sorozat első n tagjának összegére vonatkozó képletet):

$$a \cdot 1{,}09^{12} - x \cdot \frac{1{,}09^{12} - 1}{1{,}09 - 1} = 0,$$

$$x = \frac{8\,000\,000 \cdot 1{,}09^{12} \cdot 0,09}{1{,}09^{12} - 1} \approx 1\,117\,205.$$

Vagyis minden év végén 1 117 205 fabatka a törlesztőrészlet.

Ezek szerint 12 év alatt 13 406 460 fabatkát fizet vissza a király.

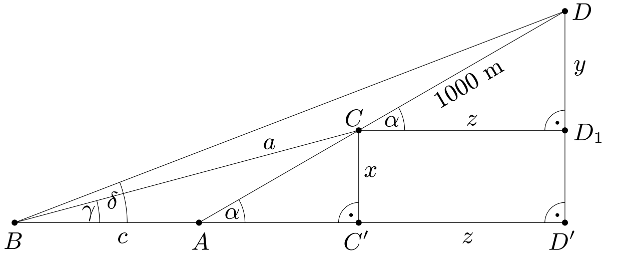
9. *Bea nagyon szereti a természetet. Az egyik teljesítménytúra alkalmával egy vízszintes, sík tisztás egyik pontjából egy irányba nézve két hegycsúcsot pillantott meg. A közelebbi C hegycsúcs $\gamma = 15°$, a távolabbi D hegycsúcs pedig $\delta = 21°$ emelkedési szögben látszik. Tudjuk, hogy a két hegycsúcs távolsága légvonalban* 1000 *méter. Anita valamennyivel már közelebb van a C csúcshoz, és ő a két hegycsúcsot egy közös $\alpha = 30°$ emelkedési szögben látja.*

a) *Milyen magasan vannak a csúcsok Bea és Anita nézőpontjához képest, ha a testmagasságukat azonosnak vehetjük?*

b) *Mekkora a távolság Bea és Anita között?*

c) *Egy* $1:40\,000$ *méretarányú turistatérképen bejelöljük Bea helyét. Hány centiméterre van ettől a ponttól a távolabbi hegycsúcs a térképen?* (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Készítsünk a csúcsokra illeszkedő függőleges síkmetszetről egy vázlatrajzot, és használjuk az *ábrán* látható jelöléseket.



Mivel a CDD_1 derékszögű háromszögben $\alpha=30^\circ$, ezért $y=500$ (m). A megadott szögek alapján: $DBC\sphericalangle=21^\circ-15^\circ=6^\circ$, $BDC\sphericalangle=69^\circ-60^\circ=9^\circ$. Ezek alapján a BCD háromszögben $BCD\sphericalangle=165^\circ$.

Felírható a szinusztétel a BCD háromszögben:

$$\frac{a}{1000}=\frac{\sin 9^\circ}{\sin 6^\circ},\quad \text{vagyis}\quad a\approx 1496{,}6 \text{ (m)}.$$

A BCC' derékszögű háromszögben:

$$x=a\cdot\sin 15^\circ=1496{,}6\cdot\sin 15^\circ\approx 387{,}3 \text{ (m)}.$$

Vagyis az alacsonyabb hegy magassága egészekre kerekítve: $x\approx 387$ m, a magasabb hegy magassága pedig: $x+y=387+500=887$ (m).

b) Mivel az ACC' derékszögű háromszögben az A csúcsnál 30° van, ezért:

$$AC'=x\sqrt{3}=387,3\cdot\sqrt{3}\approx 670{,}8 \text{ (m)}.$$

A BCC' derékszögű háromszögben: $BC'=387{,}3\cdot\operatorname{ctg}15^\circ\approx 1445{,}4$ (m).

Vagyis Bea és Anita távolsága: $AB=BC'-AC'=1445{,}4-670{,}8\approx 775$ (m).

c) A BD' távolságot kell megadnunk a térképen: $BD'=BC'+C'D'$.

A BCC' derékszögű háromszögből már megkaptuk, hogy $BC'\approx 1445{,}4$ (m). A CDD_1 derékszögű háromszögben: $z=1000\cdot\cos 30^\circ\approx 866{,}0$ (m).

Mivel $C'D'=z$, ezért $BD'=1445{,}4\text{ m}+866{,}0\text{ m}=2311{,}4\text{ m}=231\,140\text{ cm}$.

Tudjuk, hogy a megadott térképen az 1 cm-es távolság a valóságban 40 000 cm. Ezért Bea és a távolabbi hegycsúcs távolsága a térképen: $\frac{231\,140}{40\,000}\approx 5{,}8$ (cm).

Számadó László
Budapest

C gyakorlat megoldása

C. 1432. *Mutassuk meg, hogy bármely n természetes szám esetén található olyan 2^n-nel osztható n-jegyű szám, amelynek számjegyei kizárólag 1-esből és 2-esből állnak.*

I. megoldás. Úgy látjuk be az állítás helyességét, hogy megadunk egy „algoritmust” egy ilyen n-jegyű szám elkészítéséhez.

Nézzük meg az első néhány megoldást:

$$\begin{aligned}
n=1 &\quad\longrightarrow & 2 &= 2\cdot 1;\\
n=2 &\quad\longrightarrow & 12 &= 2^2\cdot 3;\\
n=3 &\quad\longrightarrow & 112 &= 2^3\cdot 14;\\
n=4 &\quad\longrightarrow & 2\,112 &= 2^4\cdot 132;\\
n=5 &\quad\longrightarrow & 22\,112 &= 2^5\cdot 691;\\
n=6 &\quad\longrightarrow & 122\,112 &= 2^6\cdot 1908.
\end{aligned}$$

Megfigyelhető a következő szabályszerűség: ha a 2^n-nel való osztás eredménye páratlan szám, akkor 1-es, ha pedig páros szám, akkor 2-es számjegy kerül az előző szám elé.

Bebizonyítjuk, hogy ha továbbra is ezt az eljárást követjük, akkor a keletkező $n+1$-jegyű szám mindig osztható lesz 2^{n+1}-nel.

$n\geqslant 6$ esetén az előzőleg már megkapott n-jegyű szám 2^n-nel való osztásakor vagy páratlan, vagy páros számot kapunk.

I. eset: páratlan számot kapunk. Ekkor írjunk 1-et a szám elé. Az új szám $A=(10^n+n\text{-jegyű szám})$ alakú, vagyis

$$A=2^n\cdot 5^n+2^n(2l+1)=2^n(5^n+2l+1).$$

Mivel 5^n+2l+1 páros szám, ezért $2^{n+1}\mid A$ teljesül.

II. eset: páros számot kapunk. Ekkor írjunk 2-est a szám elé. Az új szám ekkor $B=(2\cdot 10^n+n\text{-jegyű szám})$ alakú:

$$B=2\cdot 2^n\cdot 5^n+2^n\cdot 2k=2^n(2\cdot 5^n+2k).$$

Mivel $2\cdot 5^n+2k$ páros szám, ezért $2^{n+1}\mid B$ teljesül.

Adtunk egy eljárást, amellyel minden n pozitív egész szám esetén készíthető olyan 2^n-nel osztható n-jegyű szám, amelynek számjegyei kizárólag 1-esből és 2-esből állnak.

II. megoldás. 2^n darab olyan n-jegyű szám van, amely csak 1-esből és 2-esből áll (mert minden helyiértékre két szám közül választhatunk).

Az összes ilyen n-jegyű számot elosztva rendre 2^n-nel legfeljebb 2^n darab különböző maradékot kaphatunk az osztás eredményeként (éspedig: $0; 1; 2; \dots; 2^n-1$). Belátjuk, hogy minden ilyen n-jegyű szám különböző maradékot ad 2^n-nel osztva.

Indirekt módon tegyük fel, hogy van két különböző, csak 1-esből és 2-esből álló n-jegyű szám, amely ugyanazt a maradékot adja 2^n-nel osztva. Így a két szám különbsége (a nagyobbikból a kisebbet kivonva) osztható lesz 2^n-nel.

Ez a különbség legfeljebb n-jegyű szám lehet, melynek az „első” nem 0 számjegye (az 1-es helyiértéktől indulva a nagyobbak felé) vagy 1-es (a $2-1$ miatt), vagy 9-es (az $1-2$ miatt). Így ez a különbségként kapott szám $A\cdot 10^k$ alakú lesz, ahol A egy páratlan természetes szám, míg k a 0-k száma az (1-es helyiértéktől indulva) első 1-es vagy 9-es jegyig.

Mivel a különbség legfeljebb n-jegyű, a fentiek alapján legfeljebb $(n-1)$ darab 0-ra végződhet, azaz a különbség legfeljebb 2^{n-1}-gyel osztható (hiszen $10^{n-1}=$ $=2^{n-1}\cdot 5^{n-1}$). Ellentmondáshoz jutottunk, tehát nincs két olyan különböző, csak 1-esből és 2-esből álló n-jegyű szám, amely ugyanazt a maradékot adja a 2^n-nel való osztásnál. Vagyis minden maradék különböző.

Figyelembe véve, hogy pontosan 2^n darab, a feltételeknek megfelelő n-jegyű szám van, így pontosan 2^n darab különböző maradékunk van, vagyis van (pontosan egy darab) olyan n-jegyű szám, amely csupa 1-esből és 2-esből áll és 2^n-nel való osztási maradéka 0 – és ezt akartuk bizonyítani.

mindkét megoldás *Molnár István* (Békéscsaba,
Széchenyi István Szki., 10. évf.) munkája

61 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 24 versenyző: Agócs Katinka, Ajtai Boglárka, Balog Lóránd, Bíró Dániel, Bukor Benedek, Deák Péter, Dékány Barnabás, Havlik Miklós, Horváth Dávid, Jankovits András, Julinek István, Kiszelovics Dorina, Mészáros Márton, Molnár István, Németh Csilla Márta, Porkoláb Mercédesz, Rittgasszer Ákos, Spányik Teodor, Surján Anett, Szántó Julianna, Szécsi Adél Lilla, Szepessy Luca, Szőnyi Laura, Tóth Imre. 4 pontos 15, 3 pontos 6, 2 pontos 6, 1 pontos 7, 0 pontos 3 dolgozat.

Matematika feladatok megoldása

B. 4737. *Az ABC derékszögű háromszög AB átfogójához tartozó magasságának talppontja D. Az $ACD\sphericalangle$ és a $BCD\sphericalangle$ szögfelezője az AB átfogót rendre az E és F pontokban metszi. Határozzuk meg az ABC háromszög beírt, és a CEF háromszög körülírt köre sugarainak arányát.*

(*5 pont*) Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

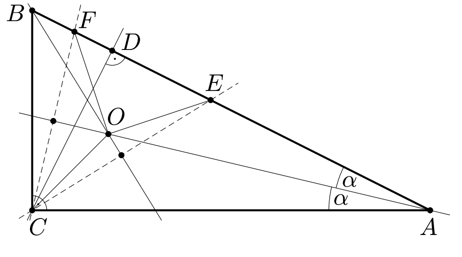
Megoldás. Először megmutatjuk, hogy a két kör középpontja egybeesik. Jelölje 2α az ABC háromszög A-nál lévő szögét, O pedig a háromszög szögfelezőinek metszéspontját. Mivel a merőleges szárú hegyesszögek egyenlőek, ezért $CAD\sphericalangle = BCD\sphericalangle = 2\alpha$ (*1. ábra*), tehát

$$FCA\sphericalangle = FCD\sphericalangle + DCA\sphericalangle = \alpha + (90^\circ - 2\alpha) = 90^\circ - \alpha.$$

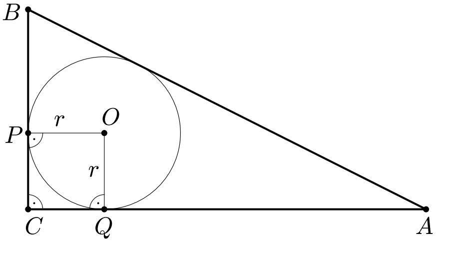
Az AFC háromszögben a szögek összege 180°, tehát

$$AFC\sphericalangle = 180^\circ - (FCA\sphericalangle + CAF\sphericalangle) = 90^\circ - \alpha.$$

Ezért az AFC háromszög egyenlőszárú, amiből következik, hogy szárszögének szögfelezője merőleges az alapjára. Tehát CF szakaszfelező merőlegese az AO egyenes. Ugyanígy kapjuk, hogy CE szakaszfelező merőlegese pedig a BO egyenes. Mivel két oldalfelező merőleges metszéspontja meghatározza a CEF háromszög körülírt körének középpontját, ezért az egybeesik O-val.



1. ábra



2. ábra

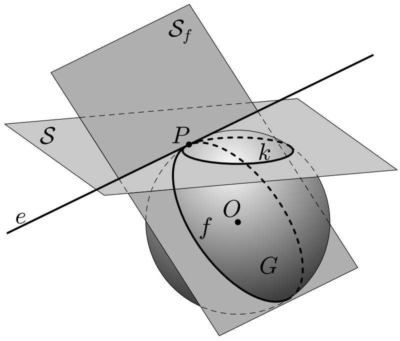
Jelölje P, illetve Q az ABC háromszög beírt körének a befogókon lévő érintési pontjait (*2. ábra*). Mivel bármely külső pontból egy körhöz húzott két érintőszakasz hossza egyenlő, ezért $CP = CQ$. Nyilván teljesül $OP = OQ$ is, tehát a $CPOQ$ négyszög deltoid. Kör érintője merőleges az érintési pontba húzott sugárra, továbbá $PCQ\sphericalangle = 90^\circ$, ezért a deltoidnak van három derékszöge, tehát téglalap is. Ha viszont egy deltoid téglalap, akkor az négyzet.

A két kör sugarainak keresett aránya tehát megegyezik a $CPOQ$ négyzet OP oldalának és OC átlójának arányával, azaz $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

114 dolgozat érkezett. 5 pontos 79, 4 pontos 15, 3 pontos 6, 2 pontos 6, 1 pontos 2, 0 pontos 1 dolgozat. Nem versenyszerű 5 dolgozat.

B. 4829. *Fedjük le az egységsugarú gömb felületét főkörökkel úgy, hogy minden pontot legfeljebb négy főkör tartalmazzon.*

(*5 pont*)



Megoldás. Jelölje a gömbfelületet G, középpontját O. Messük el G-t egy O-ra nem illeszkedő $\mathcal{S}$ síkkal, így kapjuk az $\mathcal{S} \cap G = k$ körvonalat. Az $\mathcal{S}$ a G-t két részre osztja, a kisebbiket az $\mathcal{S}$-hez (vagy k-hoz) tartozó gömbsapkának nevezzük (hozzáértve a gömbsapkához magát k-t is). A gömbsapkára gondolhatunk úgy is, mint a k által meghatározott körlapra a G gömbfelületen.

Legyen $P \in k$ tetszőleges, és érintse az $e \subset \mathcal{S}$ egyenes a k kört P-ben. Az O és e által feszített $\mathcal{S}_f$ sík a G-t egy f főkörben metszi. Azt mondjuk, hogy G-n az f a k körvonal P-ben húzott érintője. Világos, hogy G-n a k-hoz annak minden pontjában pontosan egy érintőt húzhatunk.

Legyen a k kör O-ra vonatkozó tükörképe k', és vegyünk egy tetszőleges $X \in G$ pontot, amely nem eleme sem a k-hoz, sem a k'-höz tartozó gömbsapkának. Megmutatjuk, hogy k-nak pontosan két érintője tartalmazza X-et. Messe ugyanis OX az $\mathcal{S}$ síkot az X' pontban. Az X-re tett feltevés miatt X' a k körön kívül van, azaz X'-ből k-hoz pontosan két érintő egyenes húzható: e_1 és e_2. (Ha $OX \parallel \mathcal{S}$ (ekkor az X' pont nem létezik), akkor e_1 és e_2 legyenek k azon érintőegyenesei $\mathcal{S}$-ben, amelyek párhuzamosak OX-szel, ezekből is pontosan kettő van.) Világos, hogy az O és e_1, valamint az O és e_2 által feszített síkok k olyan érintő főköreit metszik ki G-ből, amelyek tartalmazzák X-et. A gondolatmenetből az is kitűnik, hogy más, X-re illeszkedő főkör nem érintheti k-t.

Most válasszunk két, k_1 és k_2 kört a G gömbön úgy, hogy a hozzájuk, valamint k_1' és k_2' tükörképeikhez tartozó gömbsapkák páronként diszjunktak legyenek. Tekintsük k_1 és k_2 összes érintő főkörét. Azt állítjuk, hogy ezek együttesen eleget tesznek a kívánalmaknak. Legyen A a gömbfelszín tetszőleges pontja. Mivel a k_1, k_2, k_1' és k_2' körökhöz tartozó gömbsapkák páronként diszjunktak, így A-ból k_1 és k_2 valamelyikéhez biztosan húzható érintő főkör, tehát az összes érintők lefedik A-t. Másrészt mind k_1-hez, mind k_2-höz legfeljebb 2 érintő főkör húzható A-ból, így A-t legfeljebb 4 kiválasztott főkör tartalmazza. Ezzel a konstrukció helyességét beláttuk.

Megjegyzések. 1. A megoldás első részében leírtak a gömbi geometria közismert állításai.

2. A következő állítás lényegében a síkbeli megfelelője a feladatnak: a sík lefedhető egyenesekkel úgy, hogy minden pontot legfeljebb 4 egyenes tartalmaz, és nincs az egyenesek között 5 darab párhuzamos. Két diszjunkt kör összes érintői itt is triviálisan megfelelnek. Ebből a feladatunk állítását megkaphatjuk: ha a síkot a gömb egyik érintősíkjának választjuk, és a síkon megadott egyeneseket a gömb középpontjából a gömbfelszínre vetítjük, egy jó konstrukciót kapunk. A technikai részletek kidolgozását az olvasóra bízzuk. (Például miért fontos, hogy ne legyen az egyenesek között 5 párhuzamos?)

40 dolgozat érkezett. 5 pontos 27, 4 pontos 6, 2 pontos 1, 1 pontos 1, 0 pontos 5 dolgozat.

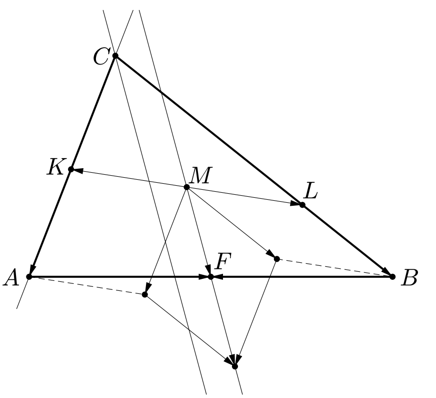
B. 4843. *Az ABC háromszög AC, illetve BC oldalaihoz írt köröknek az oldalakon az érintési pontjai rendre K és L. Bizonyítsuk be, hogy a KL és AB szakaszok felezőpontjain átmenő egyenes párhuzamos az $ACB\sphericalangle$ szögfelezőjével, és felezi a háromszög kerületét.*

(*5 pont*) (*Kvant* alapján)

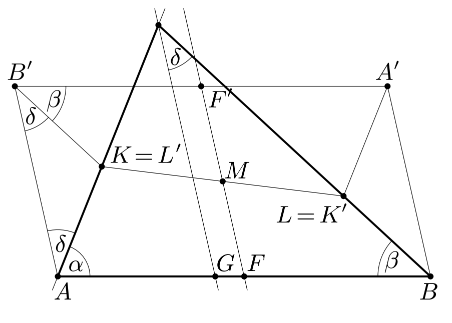
Megoldás. A feladat megoldása három jól elkülöníthető, önmagában is figyelemre érdemes lépésre bontható. Ezeket külön segédállításokként fogalmazzuk meg, ahol lehetséges, többféle indoklást is mutatunk.

1. segédállítás. *Ha az ABC háromszög AC és BC oldalain felvett K és L pontokra $AK = BL$, akkor az AB és KL szakaszok felezőpontjain átmenő egyenes párhuzamos az $ACB\sphericalangle$ szögfelezőjével.*

1. bizonyítás (vektorokkal, *Győrffy Ágoston* (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.) megoldása). Az AB szakasz felezőpontja legyen F, a KL szakaszé pedig M. A vektorok összeadásának definíciója szerint $\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AF}$ és $\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{ML} + \overrightarrow{LB} + \overrightarrow{BF}$. Ebből, felhasználva, hogy $\overrightarrow{MK} = -\overrightarrow{ML}$ és $\overrightarrow{AF} = -\overrightarrow{BF}$, kapjuk, hogy $2\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{LB}$. A feltétel szerint $|\overrightarrow{KA}| = |\overrightarrow{LB}|$, így a vektorösszeadást paralelogramma-módszerrel végezve egy rombuszt kapunk, aminek $2\overrightarrow{MF}$ átlója valóban felezi a $\overrightarrow{KA}$ és $\overrightarrow{LB}$ vektorok szögét, ahogy állítottuk (*1. ábra*). □



1. ábra

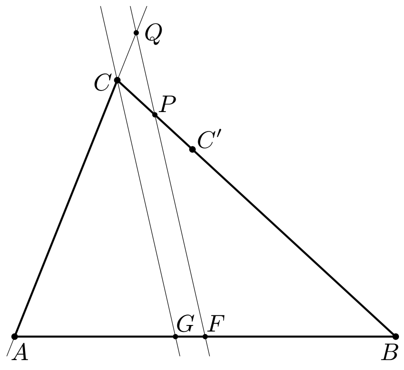


2. ábra

2. bizonyítás (elemi szögszámítással, *Daróczi Sándor* (Nyíregyháza, Krúdy Gyula Gimn., 11. évf.) megoldása). Használjuk a *2. ábra* jelöléseit. Tükrözzük az $ABLK$ négyszöget és az F pontot középpontosan az M-re, így kapjuk az A', B', L' és K', valamint F' pontokat. A tükrözés miatt $ABA'B'$ paralelogramma, aminek FF' középvonala, így $AFF'B'$ is paralelogramma; valamint $KB'A'\sphericalangle = \beta$. Továbbá $AK = BL = B'L'$ miatt a $B'AK\triangle$ egyenlőszárú, így $B'AK\sphericalangle = KB'A\sphericalangle = \delta$. Mivel $\alpha + \beta < 180°$, K az $ABA'B'$ paralelogramma belső pontja, és a 2. ábra helyes. Az ábráról leolvasható, hogy $\alpha + \beta + 2\delta$ egyenesszög, mivel egy paralelogramma egy szárán fekvő két szög összege. Ebből következik, hogy az $ABC\triangle$-ben $C\sphericalangle = 2\delta$, amiből CG szögfelezése miatt $GCB\sphericalangle = \delta$. A tükrözés miatt $B'K \parallel BL = BC$, amiből $GCB\sphericalangle = AB'K\sphericalangle$ miatt $CG \parallel B'A \parallel F'F$, amivel az állítást beláttuk. $\square$

Megjegyzés. Az első, vektorokat használó megoldásból kitűnik, hogy nem szükséges feltennünk, hogy K és L a háromszög oldalainak egy-egy pontja, elegendő, hogy az oldalegyeneseken vannak, és $AK = BL$. Azonban attól függően, hogy K és L melyik A-hoz illetve B-hez tartozó félegyenesre kerül, változhat, hogy a $C\sphericalangle$ melyik szögfelezőjével lesz párhuzamos az FM egyenes.

2. segédállítás. *Az ABC háromszög AB oldalának felezőpontja legyen F, és F-en keresztül húzzuk meg a $BCA\sphericalangle$ szög (belső) szögfelezőjével párhuzamos e egyenest. Ekkor az e egyenes felezi az $ABC\triangle$ kerületét.*



3. ábra

1. bizonyítás (az 1. segédállításból közvetlenül). Az $a = b$ eset triviális, így az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $a > b$, és használjuk a *3. ábra* jelöléseit. Legyen C' a BC oldal azon pontja, amelyre $BC' = AC$, továbbá legyen P a CC' szakasz felezőpontja. Alkalmazzuk az 1. segédállítást a $K = C$ és $L = C'$ pontokra. Kapjuk, hogy a PF egyenes párhuzamos a CG szögfelezővel, azaz $PF = e$. Az $AF = FB$, $AC = BC'$ és $C'P = PC$ nyilvánvaló egyenlőségekből adódik az állítás. $\square$

2. bizonyítás (szögfelező-tételből, *Győrffy Ágoston* (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.) megoldása). Ismét feltesszük, hogy $a > b$. A szögfelező-tétel szerint egy háromszög szögfelezője a szemközti oldalt a szomszédos oldalak arányában osztja, azaz $AG/GB = b/a$. Innen arányos osztással $GB = ca/(a+b)$ azonnal adódik. Az $ABC\sphericalangle$-ben felírhatjuk a párhuzamos szelők tételét a CG szögfelezőre és az e egyenesre – a P pontot most $e \cap BC$-ként definiáljuk:

$$\frac{BF}{BG} = \frac{BP}{BC}.$$

Innen

$$BP = \frac{c/2}{ca/(a+b)} \cdot a = \frac{a+b}{2},$$

és végül $BF + BP = c/2 + (a+b)/2 = k/2$ valóban a kerület fele, ahogy állítottuk. $\square$

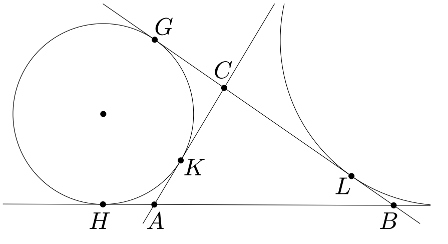
3. bizonyítás (Menelaosz-tételből). Továbbra is feltesszük, hogy $a > b$. Messe e a BC-t P-ben, az AC-t pedig Q-ban a 3. ábra szerint. Mivel e párhuzamos a CG szögfelezővel, $PQC\sphericalangle = GCA\sphericalangle = GCB\sphericalangle = CPQ\sphericalangle$, azaz $PQC\triangle$ egyenlőszárú. Írjuk fel a Menelaosz-tételt az $ABC\triangle$-re és az e egyenesre:

$$AF \cdot BP \cdot CQ = BF \cdot AQ \cdot CP.$$

Az $AF = BF$ és $PC = CQ$ egyszerűsítések után $AQ = BP$ adódik, amiből $PC = CQ = x$ jelöléssel $a - x = b + x$, és $x = (a - b)/2$ következik. Így $FA + AC + CP = c/2 + b + (a - b)/2 = k/2$, ahogy állítottuk. □

3. segédállítás. *Az ABC háromszög AC, illetve BC oldalaihoz írt köröknek az oldalakon levő érintési pontjai rendre K és L. Ekkor $AK = BL$.*

Bizonyítás. Az állítás jól ismert, a teljesség kedvéért közöljük a bizonyítását. A szokásos jelöléseket használjuk, $s = (a + b + c)/2$ az $ABC\triangle$ félkerülete. Az AC oldalhoz írt kör érintési pontjai az AB és BC oldalegyeneseken legyenek rendre H és G. Mivel külső pontból körhöz húzott érintőszakaszok egyenlőek, azért $CG = CK$, $AH = AK$ és $BG = BH$. Ezeket felhasználva



4. ábra

$$BH + BG = BA + AH + BC + CG = BA + AK + BC + CK = a + b + c = 2s,$$

így $BH = s$, és $AK = AH = BH - BA = s - c$ adódik. Hasonló számolással $BL = s - c$, amiből az állítás következik. □

A B. 4843. feladat megoldása. A három segédállításból a feladat állítása azonnal következik. A 3. segédállítás szerint $AK = BL$. Ezután az 1. segédállítás miatt a KL és AB szakaszok felezőpontjain átmenő egyenes párhuzamos az $ACB\sphericalangle$ szögfelezőjével, végül a 2. segédállítás szerint felezi a háromszög kerületét. □

62 dolgozat érkezett. 5 pontos 52, 4 pontos 1, 3 pontos 4, 2 pontos 2, 1 pontos 2, 0 pontos 1 dolgozat.

B. 4885. *Legyen k és m két különböző, 14-jegyű pozitív egész szám, mindkettőben 2 darab 1-es, 2-es, 3-as, 4-es, 5-ös, 6-os és 7-es számjegyet tartalmaz (mint pl. a 22133456456717). Bizonyítsuk be, hogy $\frac{k}{m}$ nem lehet egész.*

(4 pont) *(M&IQ)*

Megoldás. A legnagyobb ilyen szám

$$77665544332211,$$

a legkisebb pedig

$$11223344556677.$$

Két ilyen szám 1-nél nagyobb hányadosa ezért mindig kisebb, mint 8. Valamennyi ilyen szám jegyeinek összege $1+1+2+2+3+3+4+4+5+5+6+6+7+7 = 56 = 6\cdot 9+2$. A feladat állításával szemben tételezzük fel, hogy k és m hányadosa egész, azaz $k = md$, ahol d is pozitív egész, és a mondottak miatt $2 \leqslant d \leqslant 7$. Mivel k-nak és m-nek a 9-es maradéka egyaránt 2, a különbségük osztható 9-cel:

$$9 \mid k - m = md - m = m(d - 1).$$

Itt m-nek a 9-es maradéka 2 lévén az m még 3-mal sem osztható, így $d-1$ osztható lenne 9-cel, ami $1 \leqslant d-1 \leqslant 6$ miatt lehetetlen. A kapott ellentmondás miatt tehát $\frac{k}{m}$ valóban nem lehet egész szám.

188 dolgozat érkezett. 4 pontos 107, 3 pontos 60, 2 pontos 10, 1 pontos 7, 0 pontos 4 dolgozat.

MATEMATIKA ÉS FIZIKA TOTÓ*
a 2017. évi Őszi KöMaL Ankéton

1. Hány megoldása van a nemnegatív egész számok halmazán a $3 \cdot 2^m + 1 = n^2$ egyenletnek? 3 (1); 4 (2); 6 (X).

2. Egy vízcsapból, amelynek 1 cm a belső átmérője, 6 cm/s sebességgel folyik ki a víz függőlegesen lefelé. A víz a csap aljától kb. 20 cm távolságban a felületi feszültség miatt cseppekké kezd alakulni. Mekkora a keletkező cseppek átmérője? Kisebb, mint 1 mm (1); nagyobb, mint 2 mm (2); az előző két érték közötti (X).

3. Az ABC háromszögben $AB=15$, $BC=14$ és $CA=13$. A háromszög oldalaira kifelé a $BAPQ$, $CBRS$ és $ACTU$ négyzeteket állítottuk. Mekkora a $PQRSTU$ hatszög területe? 800 (1); 926 (2); 968 (X).

4. Homogén anyagú gömb belsejében ugyancsak gömb alakú, elhanyagolható sűrűségű gázzal töltött üreg van. A gömb középpontján átmenő tengelyek közül melyikre vonatkozóan legkisebb a tehetetlenségi nyomaték? Amelyik merőleges a gömb és az üreg középpontját összekötő egyenesre (1). A gömb és az üreg középpontját összekötő egyenesre (2). Nem függ a tehetetlenségi nyomaték a tengely irányától (X).

5. Két olyan prímszám van, melynek reciprokának tizedestört alakjában a periódus 7. Az egyik prím a 4649. Mennyi a másik prím számjegyeinek az összege? 12 (1); 13 (2); 14 (X).

6. Becsüljük meg, hogy mekkora teljesítményű villanymotor tudja biztonságosan működtetni azt a mozgólépcsőt, amelynek a vízszintessel bezárt szöge 30°, szintkülönbsége 20 m és egy lépcsőfokának magassága 25 cm. Elegendő 25 kW (1); kb. 40-70 kW (2); 150 kW felett (X).

7. Az r sugarú körbe olyan hatszöget írunk, melynek két oldala 7 egység, négy oldala pedig 20 egység hosszú. Mennyi r értéke? 14 (1); 15 (2); 16 (X).

8. Vajon a személygépkocsik gumiabroncsában nagyobb-e a levegő nyomása, mint a kerékpárok tömlőjében? A személygépkocsik keréknyomása a nagyobb (1); a kerékpároknál nagyobb a nyomás (2); körülbelül egyforma (X).

9. Egy ötjegyű és egy négyjegyű szám összege 33 190. Ha pedig a számjegyeiknek fordított sorrendben írásával előálló számokat adjuk össze, 48 400-at kapunk. Mennyi a két szám kilenc számjegyének az összege? 43 (1); 49 (2); 67 (X).

---

*A megoldások az 566. oldalon találhatók.

10. Becsüljük meg, mennyivel növekedne a Föld hőmérséklete, ha ráesne a Hold! Néhány foknyit (1); néhány száz foknyit (2); több, mint ezer fokot (X).

11. Felezzük meg egy derékszögű háromszög hegyesszögeit és bocsássunk merőlegest az átfogóra a szögfelező egyeneseknek a szemben fekvő befogóval való metszéspontjából. Mekkora szögben látszik a két talppont közti szakasz a derékszög csúcspontjából? 52,5° (1); 45° (2); ennyi adatból nem meghatározható (X).

12. Van-e a neutronnak mágneses nyomatéka? Van, és a spinjével azonos irányú (1). Van, és a spinjével ellentétes irányú (2). Nincs, hiszen semleges (X).

13. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert, ahol a, b és c egy-egy számrendszer alapszáma és pl. 101_a az a alapú számrendszer 1, 0, 1 jegyekkel leírt számát jelenti.

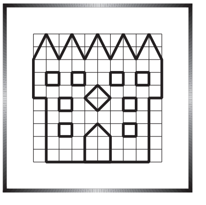
$$101_a + 201_b = 39_c + 9,$$

$$203_a + 404_b = 77_c + 8.$$

Adjuk meg $a + b + c$ értékét. 25 (1); 26 (2); 34 (X).

13 + 1. Hány elektront kellene rávinnünk egy 0,1 mm sugarú vízcseppre, hogy benne a nyomás éppen a légköri nyomás legyen? Néhány százat (1); Avogadro-számnyit (2); kb. tízmilliót (X).

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (565–570.)



K. 565. Gombóc Artúr 2017. december 31-én újévi fogadalmat tesz. 2018. január elsejétől kezdve egy speciális fogyókúrába kezd, amelyben minden nap először ki kell számolnia, hány tábla csokit ehet meg. Egy 2018-as nap sorszáma azt jelenti, hogy az a nap hányadik nap ebben az évben. Ha a nap sorszáma páros szám, akkor Artúr éppen annyi csokit ehet meg, mint a feleakkora sorszámú napon. (Például a 26. napon ugyanannyi csokit ehet meg, mint a 13. napon.) Ha a nap sorszáma 1-nél nagyobb páratlan szám, akkor pedig 1-gyel kevesebb csokit ehet meg, mint majd a következő napon. A fogyókúra december 30-ig tart. Tudjuk, hogy január 9-én Artúr 3 tábla csokit eszik. Hány tábla csokit eszik Gombóc Artúr 2018. december 24-én?

K. 566. Az $ABCD$ négyszög oldalai $AB = 8$ cm, $BC = 7$ cm, $CD = 6$ cm és $DA = 5$ cm hosszúak. Az BCD és ABD háromszögek beírható köre a BD átlót rendre az E és F pontokban érinti. Milyen hosszú az EF szakasz?

K. 567. Melyek azok az 1000-nél kisebb pozitív egész n számok, melyek négyzetének végződése éppen n?

K. 568. *a*) Adjunk meg négy olyan 50-nél kisebb különböző prímszámot, melyek közül bármely három összege prímszám.

b) Megadható-e öt különböző pozitív prímszám úgy, hogy közülük bármely három összege prímszám legyen?

K. 569. Határozzuk meg azt a négyjegyű pozitív egész $\overline{abcd}$ számot, melyre $\overline{abcd} = a^a + b^b + c^c + d^d$.

K. 570. Öt fiú egy focimeccs kapcsán tippeket mond a meccsel kapcsolatos különböző eseményekre. A két ellenfél a Kisparti Rókák és a Nagyfalvi Farkasok csapata. Az alábbiakban láthatjuk, hogy mire tippeltek.

Ambustán: A Rókák több gólt lőnek, mint a Farkasok. A Farkasok legalább 2 gólt lőnek.

Belizár: A meccs nem döntetlennel ér véget. A Rókák 1 gólt fognak lőni.

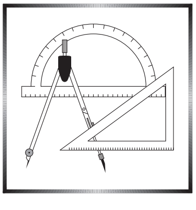
Ciporján: A meccsen a győztes két góllal fog nyerni. A félidőben a Farkasok állnak majd nyerésre.

Dezmér: A Farkasok nem lőnek gólt. A Rókák nyerik a mérkőzést.

Ekese: A második félidőben a Rókák kétszer annyi gólt rúgnak, mint a Farkasok. A mérkőzés döntetlennel zárul.

Tudjuk, hogy mindenkinek egy igaz állítása lett, és egy hamis, és nem volt öngól. Mi lett a mérkőzés végeredménye?

Beküldési határidő: 2018. január 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518



A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (1448–1454.)

Feladatok 10. évfolyamig

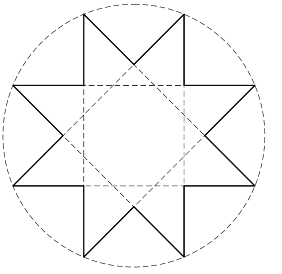
C. 1448. Oldjuk meg a következő egyenletet a pozitív egész számok halmazán:

$$\left[\frac{2017}{x}\right] + \left[\frac{2018}{x+1}\right] = 230,$$

ahol $[a]$ az a szám egészrésze.

Javasolta: *Tatár Zsuzsanna Mária* (Felsőgöd)

C. 1449. Egy egységsugarú körbe szabályos nyolcágú csillagot írtunk az *ábrán* látható módon. Mekkora a csillag kerülete?



Feladatok mindenkinek

C. 1450. Határozzuk meg, hogy mely $n>3$ esetén igaz az n alapú számrendszerben a következő állítás: pontosan akkor osztható egy szám 3-mal, ha számjegyeinek összege osztható 3-mal.

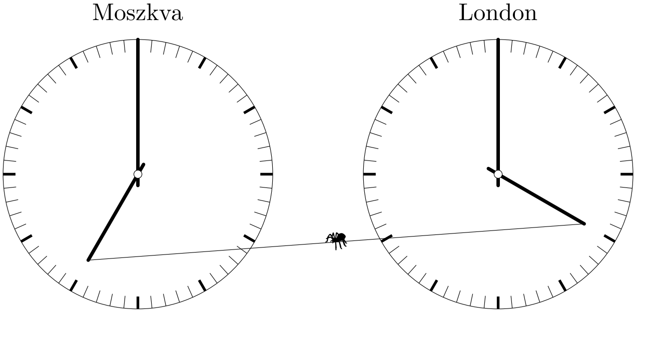
C. 1451. Hol metszi az x tengelyt az $y=x|x|-2x+3$ egyenletű görbe? Hol, milyen és mekkora lokális szélsőértékei vannak?

C. 1452. Egy 13 cm sugarú körbe írható trapézról tudjuk, hogy átlói a kör középpontjától 5 cm-re helyezkednek el. Legfeljebb mekkora lehet a trapéz területe?

Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1453. Egy 3×3-as rácsnégyzet belsejébe eső tizenkettő, egységnyi hosszúságú rácsszakasz közül véletlenszerűen megjelölünk négyet. Mekkora annak a valószínűsége, hogy a megjelölt szakaszok legalább két részre bontják a négyzetet?

C. 1454. Egy szálloda recepcióján egymás mellé került London és Moszkva külsejében egyforma órája. Egy pók hálóját a két óra kismutatója közé feszítette ki, majd helyet foglalt rajta úgy, hogy a rugalmasan megnyúló szál által képzett szakasznak mindvégig a felezőpontjában tartózkodott. Milyen pályát ír le a pók 24 óra alatt? (London és Moszkva között az időeltolódás 3 óra.)



❄

Beküldési határidő: 2018. január 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

Néhányan a 2016–2017-es tanév legszorgalmasabb megoldói közül

8–9. évfolyam

1. sor: *Argay Zsolt* 8. o. (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.), *Horváth Anikó* 8. o. (Szegedi Radnóti Miklós Kís. Gimn.), *Hervay Bence* 8. o. (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.) *Tanner Norman* 8. o. (Bonyhádi Petőfi Sándor Evangélikus Gimn. és Koll.) *Fekete András Albert* 8. o. (Pécs, PTE Deák Ferenc Gyak. Gimn. és Ált. Isk.).

2. sor: *Beke Csongor* 9. o. (Budapest, Békásmegyeri Veres Péter Gimn.), *Békési Péter* 9. o. (Zalaegerszegi Zrínyi Miklós Gimn.), *Csikós Patrik* 9. o. (Budapest XIV. Kerületi Szent István Gimn.), *Deák Bence* 9. o. (Debreceni Fazekas Mihály Gimn.), *Fajszi Bulcsú* 9. o. (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.).

3. sor: *Garamvölgyi István Attila* 9. o. (Kecskeméti Katona József Gimn.), *Geretovszky Anna* 9. o. (Szegedi Radnóti Miklós Kís. Gimn.), *Horváth Lili* 9. o. (Győr, Kazinczy Ferenc Gimn.), *Kovács Fruzsina Dóra* 9. o. (Csongrádi Batsányi János Gimn., Szakgimn. és Koll.), *Kis Károly* 9. o. (Hajdúszoboszló, Hőgyes Endre Gimn. és Szki.).

4. sor: *Kozák Áron* 9. o. (Budapest, Békásmegyeri Veres Péter Gimn.), *Markó Gábor* 9. o. (Győr, Révai Miklós Gimn. és Koll.), *Molnár Bálint* 9. o. (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.), *Nagy Nándor* 9. o. (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.), *Noszály Áron* 9. o. (Debreceni Fazekas Mihály Gimn.).

5. sor: *Rusvai Miklós* 9. o. (Jászberény, Lehel Vezér Gimn.), *Kozák András* 9. o. (Budapest, ELTE Apáczai Csere János Gyak. Gimn. és Koll.), *Tiderenczl Dániel* 9. o. (Dunakeszi Radnóti Miklós Gimn.), *Tubak Dániel* 9. o. (Szegedi Radnóti Miklós Kís. Gimn.), *Szakáll Lili* 9. o. (Révkomárom, Selye János Gimn.).

9–11. évfolyam

1. sor: *Pácsonyi Péter* 9. o. (Zalaegerszegi Zrínyi Miklós Gimn.), *Weisz Máté* 9. o. (Szegedi Radnóti Miklós Kís. Gimn.), *Bukor Benedek* 10. o. (Révkomárom, Selye János Gimn.), *Debreczeni Tibor* 10. o. (Budapest, Békásmegyeri Veres Péter Gimn.), *Dobák Dániel* 10. o. (Budapest V. Kerületi Eötvös József Gimn.).

2. sor: *Elek Péter* 10. o. (Debreceni Református Koll. Dóczy Gimn.), *Fülöp Anna Tácia* 10. o. (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.), *Klučka Vivien* 10. o. (Révkomárom, Selye János Gimn.), *Kondákor Márk* 10. o. (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.), *Magyar Róbert Attila* 10. o. (Eger, Dobó István Gimn.).

3. sor: *Morvai Orsolya* 10. o. (Révkomárom, Selye János Gimn.), *Markó Anna Erzsébet* 10. o. (Révkomárom, Selye János Gimn.), *Matolcsi Dávid* 10. o. (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.), *Molnár István* 10. o. (Békéscsabai Széchenyi István Két Tanítási Nyelvű Közgazdasági Szki. és Koll.), *Molnár Mátyás* 10. o. (Révkomárom, Selye János Gimn.).

4. sor: *Olosz Adél* 10. o. (Pécs, PTE Gyak. Ált. Isk., Gimn., Szakgimn. és Óvoda), *Saár Patrik* 10. o. (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.), *Tófalusi Ádám* 10. o. (Debreceni Fazekas Mihály Gimn.), *Schrettner Jakab* 10. o. (Szegedi Radnóti Miklós Kís. Gimn.), *Szabó Kristóf* 10. o. (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.).

5. sor: *Agócs Katinka* 11. o. (Szolnok, Varga Katalin Gimn.), *Bartók Imre* 11. o. (Debreceni Református Koll. Dóczy Gimn.), *Csuha Boglárka* 11. o. (Keszthelyi Vajda János Gimn.), *Daróczi Sándor* 11. o. (Nyíregyházi Krúdy Gyula Gimn.) *Döbröntei Dávid Bence* 11. o. (Pápa, Türr István Gimn. és Koll.).

11–12. évfolyam

1. sor: *Édes Lili* 11. o. (Révkomárom, Selye János Gimn.), *Egri Máté* 11. o. (Szombathely, Nyugat-magyarországi Egyetem Bolyai János Gyak. Ált. Isk. és Gimn.), *Gáspár Attila* 11. o. (Miskolc, Földes Ferenc Gimn.), *Illyés András* 11. o. (Budapest, Piarista Gimn.), *Fekete Balázs Attila* 11. o. (Pécsi Leőwey Klára Gimn.).

2. sor: *Keresztfalvi Bálint* 11. o. (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.), *Kovács Tamás* 11. o. (Szegedi Radnóti Miklós Kís. Gimn.), *Krasznai Anna* 11. o. (Keszthelyi Vajda János Gimn.), *Lakatos Ádám* 11. o. (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.), *Magyar Boglárka* 11. o. (Vác, Boronkay György Műszaki Szki., Gimn. és Koll.).

3. sor: *Marozsák Tóbiás* 11. o. (Budapest, Óbudai Árpád Gimn.), *Németh Balázs* 11. o. (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.), *Páhoki Tamás* 11. o. (Pécsi Leőwey Klára Gimn.), *Németh Csilla Márta* 11. o. (Budapest, Puskás Tivadar Távközlési Technikum Infokommunikációs Szki.), *Pszota Máté* 11. o. (Révkomárom, Selye János Gimn.).

4. sor: *Rittgasszer Ákos* 11. o. (Budapest, Békásmegyeri Veres Péter Gimn.), *Simon Dániel Gábor* 11. o. (Kecskeméti Bányai Júlia Gimn.), *Szakály Marcell* 11. o. (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.), *Szécsényi Nándor* 11. o. (Szegedi Radnóti Miklós Kís. Gimn.), *Szemerédi Levente* 11. o. (Szegedi Radnóti Miklós Kís. Gimn.).

5. sor: *Szilágyi Éva* 11. o. (Újvidék, Jovan Jovanović Zmaj Gimn.), *Vankó Miléna* 11. o. (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.), *Varga-Umbrich Eszter* 11. o. (Pápai Református Koll. Gimn.), *Wolff Vilmos* 11. o. (Budapest, Békásmegyeri Veres Péter Gimn.), *Andó Angelika* 12. o. (Szegedi Radnóti Miklós Kís. Gimn.).

12. évfolyam

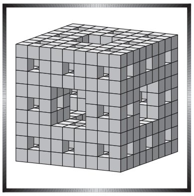
1. sor: *Baran Zsuzsanna* (Debreceni Fazekas Mihály Gimn.), *Borbényi Márton* (Kaposvári Táncsics Mihály Gimn.), *Csahók Tímea* (Budapest, Németh László Gimn.), *Ardai István Tamás* (Budapest, Baár-Madas Református Gimn., Ált. Isk. és Koll.), *Cseh Kristóf* (Szegedi Radnóti Miklós Kís. Gimn.).

2. sor: *Csenger Géza* (Révkomárom, Selye János Gimn.), *Fehér Szilveszter* (Budapest, Óbudai Gimn.), *Klász Viktória* (Pécs, Koch Valéria Gimn., Ált. Isk., Óvoda, Koll. és Pedagógiai Intézet), *Iván Balázs* (Fonyód, Mátyás Király Gimn.), *Jakus Balázs István* (Budapest, Baár-Madas Református Gimn., Ált. Isk. és Koll.).

3. sor: *Kormányos Hanna Rebeka* (Szegedi Radnóti Miklós Kís. Gimn.), *Kovács Benedek* (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.), *Kovács Péter Tamás* (Zalaegerszegi Zrínyi Miklós Gimn.), *Kővári Péter Viktor* (Debreceni Fazekas Mihály Gimn.), *Kocsis Júlia* (Dunakeszi Radnóti Miklós Gimn.).

4. sor: *Nagy Olivér* (Szolnok, Verseghy Ferenc Gimn.), *Lajkó Kálmán* (Szegedi Radnóti Miklós Kís. Gimn.), *Sallai Krisztina* (Mezőkovácsháza, Békés Megyei Hunyadi János Gimn., Speciális Szakisk. és Koll.), *Schrettner Bálint* (Szegedi Radnóti Miklós Kís. Gimn.), *Schefler Barna* (Szatmárnémeti, Hám János Róm. Kat. Teológiai Líceum).

5. sor: *Szentivánszki Soma* (Pécsi Leőwey Klára Gimn.), *Tóth Viktor* (Kaposvári Táncsics Mihály Gimn.), *Várkonyi Dorka* (Szegedi Radnóti Miklós Kís. Gimn.), *Váli Benedek* (Szegedi Radnóti Miklós Kís. Gimn.), *Williams Kada* (Szegedi Radnóti Miklós Kís. Gimn.).



A B pontversenyben kitűzött feladatok (4912–4920.)

B. 4912. Bizonyítsuk be, hogy az $5x^2 - 4y^2 = 2017$ egyenletnek nincs egész megoldása.

(*3 pont*)

B. 4913. Az $ABCD$ húrnégyszög A csúcsánál fekvő szögét az AC átló felezi. Jelöljük ki az AD oldal D-n túli meghosszabbításán az E pontot. Mutassuk meg, hogy $CE = CA$ akkor és csak akkor teljesül, ha $DE = AB$.

(*3 pont*) (*Bolgár feladat*)

B. 4914. Legyen $p(x)$ olyan egész együtthatós polinom, amely négy különböző egész helyen is a 2000 értéket veszi fel.

a) Igazoljuk, hogy nincs olyan x_0 egész szám, amelyre $p(x_0) = 2017$.

b) Adjunk meg olyan (a fenti feltételnek megfelelő) $p(x)$ polinomot és x_1 egész számot, amelyre $p(x_1) = 2018$ teljesül.

(*4 pont*)

B. 4915. Adottak az A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 és P általános helyzetű pontok a síkon. Jelölje k_i azt a számot, ahányféleképpen az A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 pontok közül kiválasztható i darab úgy, hogy a kiválasztott pontok konvex burka tartalmazza P-t. Mutassuk meg, hogy $k_3 = k_4$.

(*5 pont*)

B. 4916. A térbeli derékszögű koordinátarendszerben rögzítsük a $P(a, b, c)$ pontot, ahol $a, b, c > 0$. Az origót jelölje O. Egy P-re illeszkedő S sík messe a koordinátatengelyeket a pozitív felükre eső X, Y és Z pontokban. Mutassuk meg, hogy az $OXYZ$ tetraéder térfogata pontosan akkor minimális, ha P az $XYZ\triangle$ súlypontja.

(*4 pont*)

B. 4917. Határozzuk meg az összes olyan $f : \big(\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}\big) \to \mathbb{R}$ függvényt, amely teljesíti a következő összefüggést:

$$f\left(\frac{x-1}{x}\right) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = 4 - \frac{2}{x}.$$

(*5 pont*) Javasolta: *Kovács Béla* (Szatmárnémeti)

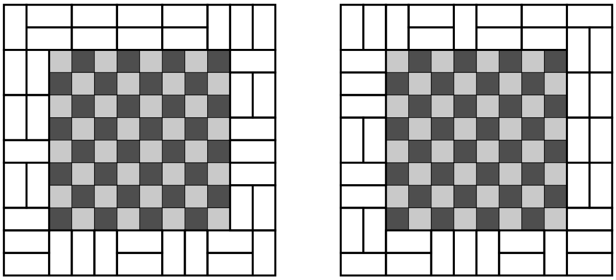
B. 4918. Mutassuk meg, hogy M darab ($M \geqslant 2$) térbeli egységvektorból ki lehet választani $M - 1$ olyat, amelyek összegének hossza legalább egységnyi.

(*5 pont*)

B. 4919. Az ABC háromszög beírt körének középpontja I, a beírt kör a BC, CA, illetve AB oldalakat rendre az A_1, B_1, illetve C_1 pontokban érinti. Az AB és A_1B_1 egyenesek a K pontban metszik egymást. Mutassuk meg, hogy a K középpontú, C_1-en átmenő körnek, az AC_1IB_1 deltoid beírt körének, valamint a BA_1IC_1 deltoid beírt körének van egy közös érintője, ami átmegy a C ponton.

(*6 pont*)

B. 4920. Hányféleképpen lehet 1×2-es dominókkal átfedés és hézag nélkül lefedni a 8×8-as sakktábla körül felvett 2 egység szélességű szegélyt? (Az *ábrán* látható két lefedést különbözőnek tekintjük.)

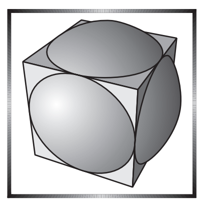


(*6 pont*) Javasolta: *Róka Sándor* (Nyíregyháza)

❄

Beküldési határidő: 2018. január 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄



Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (710–712.)

A. 710. Mely n-re lehet felbontani egy szabályos n-szöget véges sok háromszögre úgy, hogy semelyik két háromszögnek ne legyen közös oldala?

(*2017. évi Schweitzer-feladat nyomán*)

A. 711. Melyek azok az (m, n) párok, amelyekhez létezik olyan $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ injektív függvény, hogy minden szabályos m-szög f-nél vett képe szabályos n-szög legyen? (Itt $m, n \geqslant 3$, és szabályos N-szög alatt a zárt töröttvonalat értjük, nem a zárt sokszöglemezt.)

Javasolta: *Sutanay Bhattacharya* (Bishnupur, India)

A. 712. Egy pozitív valós számokból álló szigorúan monoton növekvő $a_1, a_2, \ldots$ sorozatot *törpének* nevezünk, ha tetszőleges $c > 0$-hoz megadható N, melyre $a_n < cn$ áll fenn $n = N, N+1, \ldots$ esetén. Továbbá azt mondjuk, hogy a_n *sipka,* ha $1 \leqslant i \leqslant n-1$ esetén $a_{n-i} + a_{n+i} < 2a_n$.

Igaz-e, hogy minden törpe sorozatnak végtelen sok sipkája van?

Beküldési határidő: 2018. január 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

Informatikából kitűzött feladatok

I. 442 (É). Zümike, a kedves konyhalégy, és Ati bácsi, a gazda időnként üldözős játékot játszanak. A játék úgy indul, hogy miután Zümike leszállt a konyhaasztalra, addig billegeti a szárnyait, amíg Ati bácsi elő nem veszi a légycsapót. Amint Zümike meglátja a felé közeledő légycsapót, felszáll, és addig repdes össze-vissza a konyhában, amíg Ati bácsi el nem veszíti a nyomát. Ilyenkor Zümike valahová leszáll, és várja, hogy Ati bácsi újra megtalálja. A játék rendszerint úgy ér véget, hogy Ati bácsi megunja a keresést és elteszi a légycsapót.

Egyik alkalommal Maci, a sarokban lakó keresztespók feljegyezte a játék menetét: egy hosszú pókfonálra másodpercenként 0-t vagy 1-et írt. 0-t akkor, ha az adott másodperc elején Zümike pihent, 1-et, ha repült. A rögzített adatokat a `naplo.txt` fájl tartalmazza. Olvassuk be a fájl adatait, és válaszoljunk az alábbi kérdésekre (a számozást minden esetben kezdjük 1-től):

1. Hány alkalommal szállt fel Zümike?
2. Hány percig tartott összesen a játék?
3. A játék során hány másodpercet repült Zümike összesen? Mennyi ideig tartott átlagosan egy repülés? Az eredményt két tizedesjegyre kerekítve írassuk ki.
4. Néha Zümike akkor is megijedt és felszállt, amikor Ati bácsi nem volt a közelében. Ilyenkor legfeljebb 3 másodpercet töltött a levegőben, egyébként azonban jóval többet. Hány „téves riasztása” volt Zümikének?
5. Hányadik másodpercben kezdődött és milyen hosszú volt Zümike leghosszabb ideig tartó repülése? Ha több ilyen is volt, mindegyiket jelenítsük meg.
6. Zümike „sikernek” érzi, ha két repülési szakasz között többet tudott elrejtőzve pihenni, mint a két repülési szakasz időtartama (külön-külön). Hányadik másodperceben kezdődött a legrövidebb „siker”? (Feltételezhetjük, hogy legfeljebb egy megoldás van.)
7. Ati bácsi „jó sorozatnak” tartja, ha sikerült elérnie, hogy Zümike egymást követő levegőben töltött időszakai egyre hosszabbak legyenek. Melyik másod-

percben kezdődött, és hány tagból állt a leghosszabb „ jó sorozat”? (Feltételezhetjük, hogy egy megoldás van.)

8. Készítsünk `sorrend.txt` néven szövegfájlt, amelybe soronként kiírjuk Zümike repülésének időtartamait növekvően rendezve, és mindegyik mellett

   `óra:perc:másodperc - óra:perc:másodperc`

   alakban feltüntetjük, hogy az a játék során mikor kezdődött, illetve fejeződött be. Ha egy adott időtartamhoz több alkalom is tartozik, akkor mindegyiket tüntessük fel egy-egy szóközzel elválasztva.

Beküldendő egy `i442.zip` tömörített állományban a program forráskódja és dokumentációja, amely megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

Letölthető fájl: `naplo.txt`

I. 443. Bergengóciában a király – érezve, hogy megöregszik – megajándékozná egy vagy több fiát adott összértékű kincseivel. Egyik kincsesládájából legfeljebb három különböző értékű tárgyat választana, így egyenlő ajándékokkal biztos nem lepi meg három deli fiát. A király már régóta gondolkodik ezen, így kitalálta, hogy pontosan hány tallér értékben fog ajándékozni, se többel, se kevesebbel. Ha ezt nem lehet pontosan megvalósítani, akkor inkább lemond az ajándékozásról.

A kincstárnok pontosan feljegyezte, hogy a ládában 10 különböző, ismert értékű aranytárgy van. Segítsünk a kincstárnoknak egy táblázatkezelő segítségével az elosztásban. Készítsünk táblázatot, amelybe ha beírjuk a király által elosztandó tárgyak összértékét tallérban, és a ládában lévő 10 aranytárgy értékét, akkor megadja, hogy elvégezhető-e az elosztás, és ha igen, akkor hogyan. A megoldásban saját függvény vagy makró nem használható. Munkánkat `i443` néven mentsük el a táblázatkezelő alapértelmezett formátumában.

	A	B	C	D	E
1	301		Egyedül	Ketten	Hárman
2				1 300	1 100 200
3					
4	Tárgyak értéke				
5	1				
6	11				
7	50				
8	100				
9	161				
10	189				
11	200				
12	300				
13	378				
14	412				
15					

Alakítsuk ki a minta szerinti táblázatszerkezetet. Segédszámításokat az E oszloptól jobbra végezhetünk, amelyek értelmezését feliratokkal segítsük. A megoldás során képletet, függvényt, hivatkozást használjunk, hogy a király által meghatározott összeg és a láda kincseinek változását a megoldás kövesse.

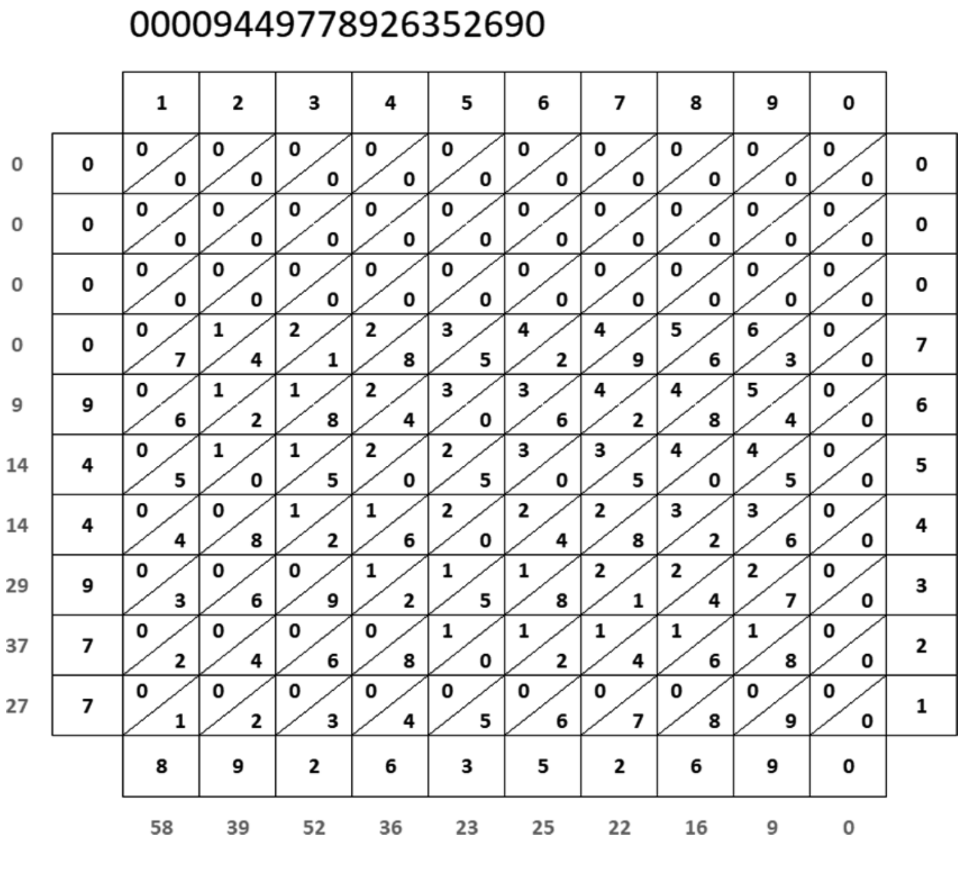
Az A1 cellába, a király parancsának megfelelően, az elosztandó tárgyak összes értékét tallérban írjuk be. Alatta soroljuk fel a kincsesládában lévő aranytárgyak értékét.

A C2:E2 tartomány celláiban jelenítsük meg, hogy egy, kettő vagy három tárgy ajándékozásakor milyen értékű ékszereket kell a ládából kivenni. Ha valamelyik elosztás nem valósítható meg, akkor a cella üresen jelenjen meg, különben a tallérban értendő értékeket szóközzel válasszuk el.

Beküldendő egy tömörített `i443.zip` állományban a táblázatkezelő munkafüzet, illetve egy rövid dokumentáció, amelyben szerepel a megoldáskor alkalmazott táblázatkezelő neve, verziószáma.

I. 444. A számok szorzására használt *gelosia-módszer* vagy *rácsos módszer* először Indiában, Perzsiában, Kínában és az arab kultúrkörben jelent meg. Európában a XIV. század elején vált ismertté, nevét a korai olasz építészet geometrikus, osztott rácsos ablakkereteinek nevéből kapta.

Az alábbi *ábrán* az $1\,234\,567\,890 \cdot 7\,654\,321 = 9\,449\,778\,926\,352\,690$ szorzat meghatározását látjuk gelosia-módszerrel:



A módszer lényege a következő. Elhelyezzük vízszintesen (balról jobbra haladva) a szorzandót, függőlegesen (felülről lefelé haladva) a szorzót, majd kiegészítjük az ábrát függőleges és vízszintes vonalakkal a mintának megfelelően. Így egy mátrixot kapunk. A mátrix celláit az átlók meghúzásával az ábrának megfelelően felosztjuk.

A mátrix minden egyes mezőjébe beírjuk a hozzá tartozó oszlop és sor szorzatát úgy, hogy az egyeseket az alsó, a tízeseket a felső háromszögbe írjuk.

A következő lépésben átlónként összeadjuk az átlókon elhelyezkedő számokat. Ezt a mátrix mentén, a jobb alsó saroktól kezdve a bal felső sarok felé haladva végezzük. Az összeg utolsó jegyét a mátrix mellé írjuk, a többi jegyből képezett számot pedig a következő átlós összeghez adjuk hozzá.

A szorzatot a mátrix mentén a bal felső sarokból indulva a jobb alsó sarok felé haladva olvashatjuk le.

Készítsünk táblázatkezelővel táblázatot vagy írjunk programot, amely két, legfeljebb 10 jegyű számot a fenti eljárással összeszoroz. Mindkét esetben gondoskodjunk a módszer szemléltetésére a fenti ábrának megfelelő megjelenítéséről is!

Beküldendő egy `i444.zip` tömörített állományban a program forráskódja vagy a munkafüzet, továbbá program esetén a dokumentáció, amely tartalmazza, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

I/S. 22. Egy N hosszúságú, egységnégyzetekből álló szalagon korongok helyezkednek el. Minden korong egy-egy négyzetben van, ugyanakkor egy négyzetben legföljebb egy korong található, vagy a négyzet üres. A szalag első P négyzetében piros korongok találhatók, míg utolsó K négyzetében kékek. Célunk az, hogy a piros, valamint a kék korongokat a szalag tőlük távolabbi végéhez sorakoztassuk föl. Akkor teljesítettük a feladatunkat, ha a szalag első K számú négyzetében kék, az utolsó P számú négyzetében piros korong található.

A korongokkal kétféle mozgatást tudunk végezni bármelyik irányba. Az egyik lehetőség, hogy egy koronggal a szomszédos üres négyzetre lépünk. A másik lehetőség, hogy egy koronggal a szomszédos korongon át a következő szomszédos, üres mezőre ugrunk. Több korongot vagy üres négyzetet nem lehet átugrani, de bármelyik korong átugorhatja bármelyik másikat függetlenül a színétől.

Készítsünk programot, amely megadja, hogy legkevesebb hány mozgással teljesíthetjük a célt, amely mindig teljesíthető. A program standard bemenete az N, K és P egészek. A program standard kimenete egy sorban a szükséges legkevesebb mozgások, majd azon belül az ugrások és a lépések száma.

Példák:

Bemenet	**Kimenet**
`3 1 1`	`3 1 2`
`6 2 2`	`10 6 4`

Korlátok: $1 \leqslant P < P + K < N \leqslant 1000$.

Értékelés: a megoldás lényegét leíró dokumentáció 1 pontot ér. További 9 pont kapható arra a programra, amely a korlátoknak megfelelő bemenetekre helyes kimenetet ad 1 másodperc futásidő alatt. Részpontszám kapható arra a programra, amely csak $N \leqslant 10$, $N \leqslant 30$, $N \leqslant 100$ értékek esetén ad helyes eredményt 1 másodpercen belül.

Beküldendő egy `is22.zip` tömörített állományban a megoldást leíró dokumentáció és a program forráskódja.

S. 121. Egy $N \times M$-es négyzetháló mezőire pozitív egész számokat írtunk 1-től 6-ig. A bal felső négyzeten elhelyeztünk egy kockát, amelynek oldalaira szintén egy-egy pozitív egész számot írhatunk 1-től 6-ig. A négyzetháló négyzetei és a kocka oldalai azonos méretűek, a kocka bármely lapja pontosan a négyzetháló négyzetére illeszkedik. A kockát el kell juttatni a négyzetháló jobb alsó sarkába a következő két művelet megfelelő sorrendben történő többszöri alkalmazásával:

1. Az álló kocka a négyzethálóra merőleges forgástengelye körül derékszögben (akár többször is) elforgatható.
2. A kocka az egyik négyzethálón fekvő éle körül derékszögben elforgatható úgy, hogy egy másik lapján álljon, de csak akkor, ha azonos számok kerülnek egymásra.

Tehát a kocka minden helyzetében – induláskor is – olyan lapon áll, amelynek száma egyezik annak a négyzetnek a számával, amelyen áll. A négyzetháló négyzetein található számok ismeretében adjuk meg, hogy milyen számokat írjunk a kocka lapjaira, hogy az eljusson a jobb alsó négyzetre.

A program standard bemenete N és M, majd a következő N sor mindegyikében M darab szám van 1-től 6-ig, amelyek a négyzetháló számai. A program standard kimenete vagy 0, ha nem létezik megfelelő feliratozás a kockára, vagy a kockán szereplő számok. A kezdő helyzetben álló kocka oldalain az alsó, a felső, majd rendre a négy egymáshoz csatlakozó oldalán lévő számokat adjuk meg. Több megoldás esetén elegendő egy alkalmas feliratozást megadni.

Példa bemenet	**Példa kimenet**
`4 5` `1 2 3 1 4` `5 3 6 3 5` `3 4 1 1 4` `3 4 3 6 4`	`1 3 4 6 2 4`

Korlátok: $1 \leqslant N, M \leqslant 100$.

Értékelés: a megoldás lényegét leíró dokumentáció 1 pontot ér. További 9 pont kapható arra a programra, amely a korlátoknak megfelelő bemenetekre helyes kimenetet ad 1 másodperc futásidő alatt. Részpontszám kapható arra a programra, amely csak kisebb N, M érték esetén ad helyes eredményt 1 másodpercen belül.

Beküldendő egy `s121.zip` tömörített állományban a megoldást leíró dokumentáció és a program forráskódja.

❄

A feladatok megoldásai regisztráció után a következő címen tölthetők fel:
`https://www.komal.hu/munkafuzet`
Beküldési határidő: 2018. január 10.

❄

Minden nagy teljesítmény mögött ott áll egy kiváló tanár

Budapest, 2017. november 29.

Idén tizenhetedik alkalommal adták át a Rátz Tanár Úr Életműdíjat, amelyet ez alkalommal nyolc kiváló pedagógusnak ítéltek, akik pályájuk során országszerte számos tehetséges diák fejlődésére és későbbi szakmai karrierjére voltak meghatározó hatással. A díjazottak ahhoz a 120 tanárhoz csatlakoznak, akik az elmúlt 16 évben kapták meg az Ericsson Magyarország, a Graphisoft SE és a Richter Gedeon Nyrt. által alapított elismerést. A Rátz Tanár Úr Életműdíjat az iskolák 5–12. évfolyamain matematikát, fizikát, biológiát vagy kémiát tanító tanároknak ítélik oda, akik tantárgyaik népszerűsítésében és a tehetséggondozás területén maradandót alkottak. A díjakat a Magyar Tudományos Akadémia dísztermében rendezett ünnepségen adták át.

A díj célja, hogy hozzájáruljon a tanári munka erkölcsi és anyagi elismeréséhez, egyben példát mutasson a gazdasági szereplőknek, hogy lehetőségeikhez mérten támogassák az oktatást, mert az igazi befektetés a magyar gazdaság számára a tudásban rejlik.

A Rátz Tanár Úr Életműdíjban részesült szakemberek az ország különböző pontjain található, különböző adottságokkal, lehetőségekkel rendelkező iskolákban tanítanak. Életművükben azonban közös, hogy a reáltantárgyak oktatási színvonalának emeléséért dolgoznak, diákjaik sikeresen szerepelnek országos tudományos versenyeken és az oktatás mellett gyakran tankönyvek, szakmai folyóiratok szerzői. A tehetséggondozás mellett törekednek a természettudományos tudást nem csak a legjobbakkal, hanem valamennyi diákjukkal elsajátíttatni és széles látókörrel rendelkező felnőtteket nevelni.

A díjat 2000-ben alapította a természettudományos oktatás támogatásában elkötelezett három vállalat, az Ericsson Magyarország, a Graphisoft SE és a Richter Gedeon Nyrt. A díj a XX. század egyik legnagyobb tanáregyéniségének, a Fasori Evangélikus Gimnázium matematika-fizika tanárának, Rátz Lászlónak is emléket állít. Rátz tanár úr számos világhírű tudóst – többek között Neumann Jánost, Wigner Jenőt és Harsányi Jánost – indított el a pályáján.

A díjat a három vállalat által alapított Alapítvány a Magyar Természettudományos Oktatásért kuratóriuma ítéli oda azzal a mottóval, „Hogy ne csak a világhírű tudósok, hanem tanáraik nevét is megismerjük …”.

Az idei díjazottak diákjai vezető egyetemeken és vállalatoknál dolgoznak, vannak köztük egyetemi tanárok, tanszékvezetők és akadémikusok is.

A Rátz Tanár Úr Életműdíjban 2017-ben az alábbi tanárok részesültek:

Kémiából **Dancsó Éva** és **Dr. Antal-Szalmás Lajosné;**
Biológiából **Gál Béla** és **Zátonyi Szilárd;**

Matematikából **Dr. Mezei István** és **Egyed László;**
Fizikából **Dr. Piláth Károly** és **Mester András.**

Bemutatjuk a matematika, illetve a fizika területén díjazott tanárokat.

Matematika

Dr. Mezei István†: 1969-től 2017-ig az ELTE TTK Analízis Tanszékén dolgozott tanársegédként, majd adjunktusként. Egyetemi állása mellett 1987-től 2017-ig az Óbudai Árpád Gimnázium óraadó tanára volt. Rendszeresen foglalkozott a speciális figyelmet igénylő, így a kiemelkedően tehetséges tanulókkal is. Sok diákja jutott be a nemzetközi diákolimpia, az OKTV és a különböző országos versenyek döntőibe. Ugyanekkor senkit nem hagyott az „út szélén", mindig törekedett arra, hogy a nehezebben haladókat egyéni módszerekkel zárkóztassa fel a közösséghez. Mezei István azóta – Somfai Zsuzsa szavaival élve – „a felhő szélén ülve tekint le ránk", 2017. november 4-én elhunyt. Életéről szóló rövidfilm itt tekinthető meg: `https://vimeo.com/244335129`.

Egyed László: 1987-ben végzett a szegedi József Attila Tudományegyetem matematika–fizika tanári szakán. 1988 augusztusától a bajai III. Béla Gimnázium matematika és fizika szakos tanára, 1994-től a matematikai munkaközösség vezetője. Munkáját az elhivatottság, a diákok tisztelete és szeretete, valamint kivételes szakmai igényesség jellemzi. Tanítását sodró lendülettel, színes előadásokkal fűszerezve végzi. A tanár úrról szóló rövidfilm itt tekinthető meg: `https://vimeo.com/244072145`.

Fizika

Dr. Piláth Károly: 1979-ben kémia–fizika, 2005-ben informatika szakos középiskolai tanári oklevelet szerzett. Kezdetben fejlesztőmérnökként dolgozott, ekkor fejlesztette ki azt az oszcilloszkópot, amelynek kijelzője egy közönséges televízió volt, így azt egy teljes osztály jól láthatta. Tanárként 1997-től a budapesti Balassi Bálint Nyolcévfolyamos Gimnáziumban fizikát és informatikát tanított. 2005-től az ELTE Trefort Ágoston Gyakorló Gimnáziumban oktat. A tanár urat bemutató rövidfilm itt tekinthető meg: `https://vimeo.com/244074725`.

Mester András: matematika–fizika szakos középiskolai tanár. Középiskolai tanárként Miskolcon a Zrínyi Ilona Gimnáziumban (1978–1982), a Bláthy Ottó Villamosipari Szakközépiskolában (1988–1992) és a Diósgyőri Gimnáziumban (1992–2015) tevékenykedett, illetve 2002–2011 között Miskolcon a Városi Pedagógiai Intézet fizika szaktanácsadója volt. 2015 decembere óta nyugállományban van. Pályája során olyan középiskolákban tanított, ahol a versenyeredményekben megmutatkozó fizikatanításra kevés esély volt, így inkább a gyakorlatcentrikus oktatásra és az innovációra koncentrált. A tanár urat bemutató rövidfilm itt tekinthető meg: `https://vimeo.com/244077545`.

Gyakorló feladatsor emelt szintű fizika érettségire

Tesztfeladatok*

1. Válasszuk ki a mondat helyes befejezését! Gay-Lussac törvénye szerint az ideális gáz térfogata és hőmérséklete egyenesen arányos, ha a gáz

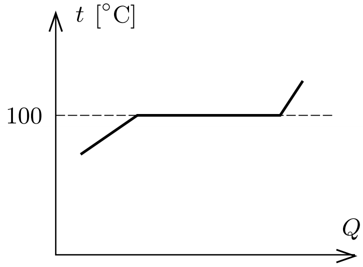
A) hőmérséklete és nyomása állandó;

B) térfogata és tömege állandó;

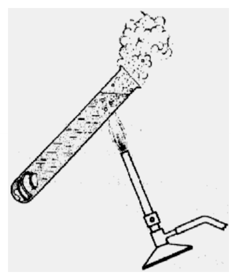
C) nyomása és anyagmennyisége állandó;

D) anyagmennyisége, részecskeszáma és tömege állandó.

2. Tankönyvekben is megtalálható a víz melegítését ábrázoló *grafikon.* A grafikon (*1. ábra*) Q tengellyel párhuzamos szakasza azt mutatja, hogy forrás közben a hőmérséklet nem változik.



1. ábra



2. ábra

Egy kísérlet ennek ellentmondani látszik (*2. ábra*). Csavarjunk egy darabka jégre drótot, és dobjuk be egy hideg vízzel töltött kémcsőbe! A dróttal terhelt jég a kémcső aljára süllyed. Tartsuk a kémcsövet kissé megdöntve, és melegítsük a felső részét Bunsen-lánggal! A felül levő vízmennyiség hamarosan forrni kezd anélkül, hogy az alul levő jégdarab megolvadna. Mi az ellentmondás feloldása?

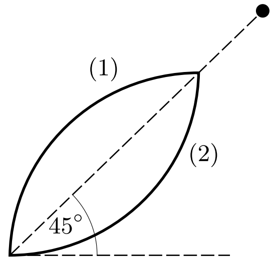
A) Rossz a grafikon.

B) A grafikon nem veszi figyelembe, hogy a víz rossz hővezető.

C) A fenti kísérlet csak a fantázia szüleménye, nem végezhető el.

D) A víz alsó vége is 100 °C-os, de a nagy nyomás miatt a jég ezen a hőmérsékleten nem olvad meg.

*A válaszok közül minden esetben pontosan egy a helyes.



3. Egy pontszerű test súrlódásmentesen csúszik le az *ábrán* látható két azonos körív alakú pályán. Melyik pályán ér le hamarabb, ha kezdősebesség nélkül indul?

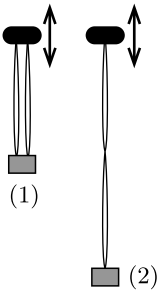
A) Az (1)-es pályán, mert végig nagyobb a helyzeti energiája.

B) A (2)-es pályán, mert ott nagyobb az átlagsebessége, a megtett út pedig azonos a két pályán.

C) A két idő azonos, mert a végsebesség és a megtett út azonos.

4. Egy (E-vel jelölt) elsőkerék-meghajtású és egy (H-val jelölt) hátsókerék-meghajtású autó indulását hasonlítjuk össze. Válasszuk ki az *igaz* állítást!

A) E-nek az eleje, H-nak a hátulja emelkedik meg egy kicsit.
B) Mindkét autónak a hátulja emelkedik meg egy kicsit.
C) Mindkét autónak az eleje emelkedik meg egy kicsit.
D) E-nek a hátulja, H-nak az eleje emelkedik meg egy kicsit.



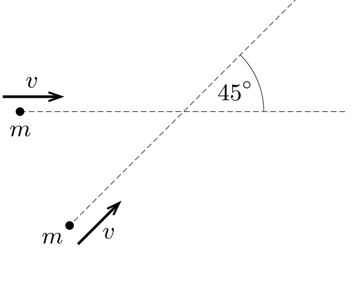
5. Két egyforma kis súlyt azonos direkciós állandójú befőttesgumival felfüggesztünk az *ábrán* látható módokon. A felfüggesztési pontokat úgy rezgetjük, hogy rezonancia jöjjön létre. Mit tapasztalunk a két elrendezés $f_{(1)}$ és $f_{(2)}$ rezonanciafrekvenciájának arányáról?

A) $f_{(1)} = 2f_{(2)}$, *B*) $2f_{(1)} = f_{(2)}$,

C) $f_{(1)} = \sqrt{2}f_{(2)}$, *D*) $\sqrt{2}f_{(1)} = f_{(2)}$.

6. Adott mennyiségű ideális gázzal lejátszódó folyamatokról szólnak az alábbi állítások. Válasszuk ki a *hamisat!*

A) Ha a gáz nem vesz fel és nem ad le hőt, akkor nem változik a belső energiája.
B) Ha nem változik a térfogata, akkor a belső energia megváltozása egyenlő a felvett hővel.
C) Adiabatikus lehűlés során a gázrészecskék átlagos mozgási energiája csökken.
D) A gyakorlati életben lejátszódó nagyon gyors folyamatok adiabatikusnak tekinthetők.

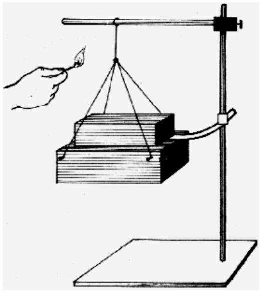


7. Az *ábrán* látható módon v sebességgel érkező m tömegű testek kb. mekkora sebességgel haladnak tovább rugalmatlan ütközésük után?

A) $2v$; *B*) $1{,}2\,v$;

C) $0{,}9\,v$; *D*) $1{,}5\,v$.

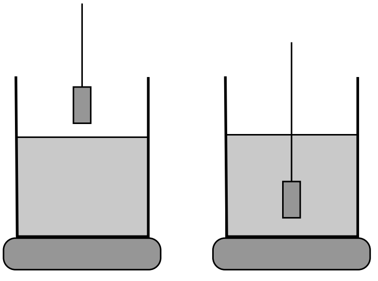
8. Ha egy fellógatott téglára teszünk egy papírlapot és arra még egy téglát, a téglák közé helyezett papírlapot nem lehet kihúzni, mert a papír elszakad. Ha azonban a felfüggesztő fonalat elégetjük, akkor elszakadás nélkül kihúzhatjuk a papírlapot. Miért?



A) Mert a levegőben mozgó testekre hat a légellenállás, az állókra nem.

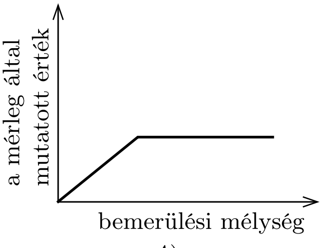
B) Mert a téglák és a papírlap közötti nyugalmi súrlódási együttható nagyobb, mint a csúszási.

C) Mert a szabadon eső testek súlytalanok.

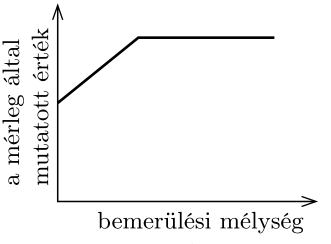


9. Egy digitális mérlegre főzőpoharat teszünk, majd a mérleget bekapcsoljuk. Ezután vizet öntünk a főzőpohárba, majd szép lassan egy cérnára függesztett alumíniumhengert engedünk bele, de nem engedjük le a pohár aljáig.

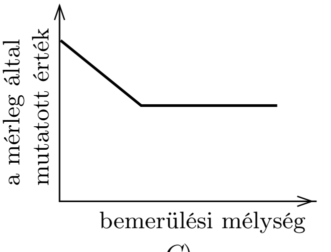
Mérjük a mérleg által mutatott értéket a bemerülési mélység függvényében. Melyik ábra mutatja *helyesen* a mérésünk eredményét?



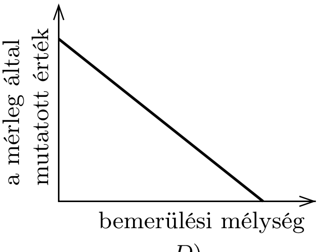
A)



B)



C)



D)

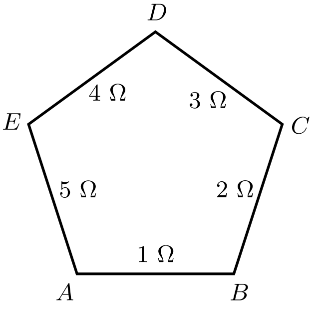
10. Az alábbi definíciómegfogalmazások közül válasszuk ki a legpontosabbat!

A) Az elektromos térerősség a pozitív próbatöltésre ható erő és a próbatöltés hányadosa.

B) Az elektromos feszültség az elektromos mező által a pozitív próbatöltésen végzett munkájának és a próbatöltésnek a szorzata.

C) A mágneses indukció a mágneses mező által a mérőkeretre ható forgatónyomatéknak, valamint a mérőkeret árama és felülete szorzatának a hányadosa.

D) Egy mágneses mezőben nyugvó felület mágneses fluxusa az egységnyi felületet átdöfő indukcióvonalak száma.



11. Öt különböző ellenállású huzalból az *ábrán* látható módon ötszöget forrasztunk. Kiválasztunk az összes lehetséges módon két-két csúcsot, és mérjük a két pont közötti ellenállást. Méréssorozatunknak melyik a legkisebb értéke?

A) $\frac{12}{15}\,\Omega$; *B*) $\frac{13}{15}\,\Omega$;

C) $\frac{14}{15}\,\Omega$; *D*) $\frac{15}{15}\,\Omega$.

12. Az elektromágneses hullámokat hullámhosszuk szerint növekvő sorrendbe szeretnénk rakni. Válasszuk ki a *helyes* sorrendet!

A) Gamma-sugárzás, mikrohullám, sárga fény, UV fény;

B) UV fény, sárga fény, mikrohullám, gamma-sugárzás;

C) mikrohullám, sárga fény, UV fény, gamma-sugárzás;

D) gamma-sugárzás, UV fény, sárga fény, mikrohullám.

13. Egy transzformátor primer tekercsében időben egyenletesen növekvő áram folyik. Milyen feszültséget kapunk a szekunder tekercsben?

A) Egyenletesen növekvőt.

B) Időben állandót.

C) Ha a szekunder tekercs menetszáma kisebb a primer tekercsénél, akkor egyenletesen csökkenőt, ha nagyobb, akkor egyenletesen növekvőt.

D) Szinuszosan változót.

14. Tekintsük a következő mértékegységeket: becquerel, elektronvolt, fényév, hertz, sievert, tesla. Melyik két mértékegység fejezhető ki SI alapegységekkel pontosan azonos módon?

A) Elektronvolt és sievert; *B*) fényév és tesla;

C) becquerel és hertz; *D*) elektronvolt és tesla.

15. A függőlegesen beeső napsugárzás négyzetméterenként és másodpercenként átlagosan 1400 J energiát juttat a Földre. Mennyivel nőne emiatt a Föld tömege másodpercenként, ha ezt az energiát a Föld mind elnyelné, és semennyit sem sugározna vissza?

A) Kb. 200 kg; *B*) kb. 20 kg; *C*) kb. 2 kg; *D*) kb. 20 dkg.

Számolásos feladatok

1. $2 \cdot 10^5$ Pa nyomású, 500 K hőmérsékletű, 4,81 mol héliumgáz nyomását állandó térfogaton a felére csökkentjük, majd állandó nyomás mellett a térfogatát megduplázzuk.

a) Töltsük ki a táblázat hiányzó celláit!

	p [Pa]	V [m^3]	T [K]
1. állapot	$2 \cdot 10^5$		500
2. állapot			
3. állapot			

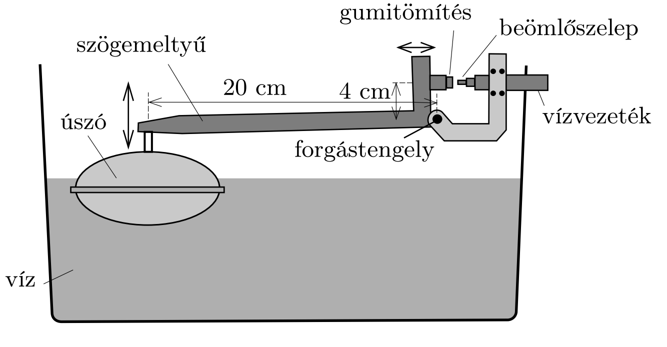
b) Ábrázoljuk a folyamatot p–T diagramon!
c) Mennyi munkát végez a gáz a folyamat során?
d) Mennyi hőt vesz fel a gáz a folyamat során?

2. Egy kondenzátorral, egy 1 kΩ-os ellenállással, egy 10 kΩ-os belső ellenállású feszültségmérővel és egy univerzális feszültségforrással kísérleteztünk. A kondenzátort és az ellenállást sorbakapcsolva a feszültségforrásra kötöttük.

a) Először egyenfeszültségre kapcsoltuk, véletlenszerűen beállítva feszültséget. Ekkor a voltmérő a kondenzátor feszültségét 91 V-nak mérte, miközben a kondenzátor 320 μC töltést kapott. Mekkora volt a beállított feszültség?

b) Másodszor 230 V, 50 Hz váltakozó feszültségre kapcsoltuk a kondenzátor-ellenállás rendszert. Mit mutatott ekkor a voltmérő az ellenállás sarkaira kapcsolva?

3. Egy hagyományos WC-tartály öblítővíz-utántöltő szerkezete látható az *ábrán*. Az úszó a gumitömítéssel nyitja és zárja a beömlőszelepet. Amikor az öblítőtartályban csökken a vízszint, az úszó leereszkedik, és ezzel megnyitja a beömlőszelepet. Ennek hatására a tartály megtelik vízzel, a víz felfelé nyomja az úszót, míg annak szögemeltyűje a gumitömítést rá nem nyomja a szelep csúcsára, és ezzel a víz bevezetését el nem zárja.



A szelep akkor zár, amikor a gumitömítés 14 N erővel szorul a szelephez. Az úszó tömege 2,5 dkg, térfogata 3 dl. Az emeltyű tömegétől eltekinthetünk. Az úszó térfogatának hány százaléka merül a vízbe, amikor a szelep bezár?

4. Egy fizika iránt érdeklődő diák bicikliszerelés közben a fék beállítása során a megpörgetett kereket finoman befékezte, és közben a következőket mérte. A kerék 100 1/min fordulatszámmal pörgött a fék behúzásakor, és 3 másodperc alatt állt meg az egyenletes fékezés következtében. A fékpofa és a kerék között a súrlódási tényező 0,35. A kerék tehetetlenségi nyomatéka 0,25 kgm^2. A kerék sugara 35,5 cm.

a) Mekkora volt a kerék szögsebessége a fékezés megkezdése előtt?

b) Hány fordulatot tett meg a kerék a fékezés alatt?

c) Mekkora erő szorította a kerékhez a féket?

d) Mekkora volt a kerék külső szélének gyorsulása a megállás előtt 0,6 másodperccel?

Varga Balázs
Göd

Matematika és fizika totó megoldása*

A telitalálatos szelvény:

$$1, 2, 2, \quad 1, \mathrm{X}, 2, \quad \mathrm{X}, 2, 1, \quad 2, 2, 2, \quad \mathrm{X}, \mathrm{X}.$$

A legtöbb (13) találatot *Argay Zsolt* (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 9. évf.), *Beke Csongor* (Budapest, Békásmegyeri Veres Péter Gimn., 10. évf.), *Hervay Bence* (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 9. évf.), *Márton Dénes* (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.), *Molnár Bálint* (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.), *Saár Patrik* (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.), *Szabó Dávid* (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.), és *Szabó Kristóf* (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.), érte el.

Az alábbiakban rövid útmutatást adunk a feladatok megoldásához.

1. Az egyenletet $3\cdot 2^m=(n-1)(n+1)$ alakba írva, $n-1$ és $n+1$ közül az egyik egy 2-hatvány, a másik pedig egy 2-hatvány háromszorosa, ez utóbbit jelölje k. Ha $k=3$, akkor csak $n-1=1$ és $n+1=3$ lehetséges, ekkor $(n,m)=(2,0)$. Ha $k=6$, akkor $n-1=4$ és $n+1=6$, vagy $n-1=6$ és $n+1=8$. Két újabb megoldást kaptunk: $(n,m)=(5,3)$; $(7,4)$. Ha $k=3\cdot 2^t$, ahol $t\geqslant 2$, akkor $3\cdot 2^t\pm 2$ osztható 2-vel, de nem osztható 4-gyel. Mivel azonban értéke nagyobb 2-nél, így nem lehet 2-hatvány. Tehát más megoldás nincs.

2. A víz sebessége 20 centiméternyi esés után kb. 2 m/s lesz, a kifolyási sebességnél mintegy 33-szor nagyobb. Emiatt a vízsugár átmérője $\sqrt{33}$-szor kisebb, mint a csap belső átmérője, kb. 2 mm nagyságú lesz.

---

*A kérdések az 542. oldalon találhatók.

A d átmérőjű vízsugár akkor szakadhat szét bizonyos h távolságonként R sugarú cseppekre, ha a csepp felülete nem nagyobb, mint a „vízhenger” felülete, határesetben éppen egyenlő azzal:

$$4R^2\pi < d\pi h,$$

miközben a térfogat nem változik:

$$\frac{4R^3\pi}{3} = \frac{d^2}{4}\pi h.$$

Ebből a két egyenletből a csepp átmérőjére $2R = \frac{3}{2}d = 3$ mm adódik. Ez az érték csak nagyságrendi becslésnek tekinthető; a folyadék cseppekre szakadása meglehetősen összetett, a fentebb leírtaknál sokkal bonyolultabb probléma.

3. A Héron-képletttel: $t_{ABC} = \sqrt{21 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} = 84$. Mivel

$$PAU\sphericalangle = 180^\circ - CAB\sphericalangle,$$

ezért a trigonometrikus területképlet alapján $t_{PAU} = t_{ABC}$. Hasonlóan, $t_{RBQ} = t_{TCS} = t_{ABC}$. A kérdéses terület tehát: $t_{PQRSTU} = 15^2 + 14^2 + 13^2 + 4 \cdot 84 = 926$.

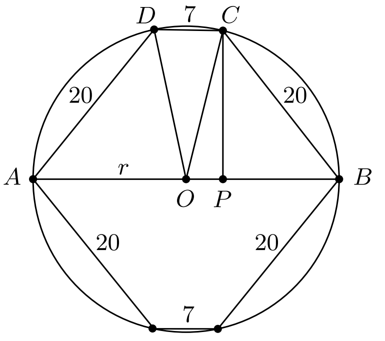
4. Az üreg (anyaghiány) úgy vehető figyelembe, mint egy negatív tömegű, kisebb gömb a tömör, homogén gömb belsejében. Minél messzebb helyezkedik el ez a negatív tömegű gömb a forgástengelytől, annál kisebb lesz az egész rendszer tehetetlenségi nyomatéka.

5. Legyen p egy megfelelő prím. Ekkor $\frac{1}{p} = 0{,}x\overline{z}$, ahol x egy r-jegyű rész, z pedig egy hétjegyű. Ekkor $\frac{10^r}{p} - x = 0{,}\overline{z}$. Ebből

$$\frac{10^r}{p} - x = \frac{z}{10^7 - 1}.$$

Rendezve: $(10^7 - 1)10^r = p\big(z + (10^7 - 1)x\big)$. Mivel p prím, ezért osztója $(10^7 - 1)$-nek vagy 10^r-nek. Könnyen látható, hogy $\frac{999\,999}{4649} = 3 \cdot 237$, tehát p értéke 2, 5, 3, 4649 vagy 239 lehet. A 2, 3, és az 5 nem jó, a 239 igen.

6. A $h = 20$ méter szintkülönbségű mozgólépcsőn összesen $n = 80$ lépcsőfok található. Ha mindegyiken két $m = 70$ kg tömegű ember áll (a gyakorlatban ez nem szokott előfordulni, de elvben elképzelhető), akkor a felszállításuk során $W = 2mghn \approx 2$ MJ munkát kell végezzen a villanymotor. A mozgólépcső sebessége hozzávetőlegesen 1 m/s, tehát $t \approx 40$ s alatt érnek fel az emberek. A szükséges teljesítmény becsült értéke: $P = W/t \approx 50$ kW. (A becslés során nem vettük figyelembe a súrlódási veszteségeket és a motor 1-nél kisebb hatásfokát, viszont a lépcsőn egyszerre elférő emberek számát és össztömegét feltehetően túlbecsültük.)



7. Helyezzük el az oldalakat az *ábra* szerint. Legyen $CP \perp OP$. Ekkor $OP = DC/2 = 7/2$. A Pitagorasz-tételt felírva az OPC és a BPC derékszögű háromszögekre:

$$CP^2 = OC^2 - OP^2 \quad \text{és} \quad CP^2 = BC^2 - PB^2.$$

Felhasználva, hogy $OC = OB = r$, $OP = 7/2$, $BC = 20$ és $OB - OP = PB$, kapjuk, hogy

$$r^2 - (7/2)^2 = 20^2 - (r - 7/2)^2.$$

Ebből $r = 16$ adódik.

8. A gumiabroncs túlnyomásának és a talajjal érintkező gumifelületnek a szorzata megegyezik a talajra ható erővel. Ez az erő a kerékpárnál (a kerékpárost is beleszámítva) kb. tízszer-hússzor kisebb, mint egy megterhelt autó súlya, a talajjal érintkező gumifelület viszont több nagyságrenddel kisebb az autógumi megfelelő felületénél. Emiatt állíthatjuk, hogy a kerékpár tömlőjében nagyobb a nyomás, mint az autók gumiabroncsában. (Az ajánlott túlnyomások: országúti kerékpárnál kb. 6 bar, a személygépkocsik keréknyomása pedig kb. 2 bar.)

9. Jelöljük a két eredeti szám egymás utáni számjegyeit A, B, C, D, E, illetve F, G, H, K betűvel, ekkor a szóban forgó összeadások:

$$(1)\quad \begin{array}{r} A\;B\;C\;D\;E \\ F\;G\;H\;K \\ \hline 3\;\;3\;\;1\;\;9\;\;0 \end{array} \;(= x) \qquad\qquad (2)\quad \begin{array}{r} E\;D\;C\;B\;A \\ K\;H\;G\;F \\ \hline 4\;\;8\;\;4\;\;0\;\;0 \end{array}$$

Mivel $x < 10^4$, azért (1)-nek tízezres oszlopa szerint A értéke 2 vagy 3. Így a (2)-nek 1-es helyi értékű oszlopa alapján $A + F = 10$, tehát F értéke 8 vagy 7, ezért (1)-nek ezres oszlopából mindenképpen van tízes átvitel a tízezresbe, éspedig 1, hiszen a $BCDE$ szám is kisebb, mint 10^4. Így $A + 1 = 3$, $A = 2$, $F = 8$.

Ugyanezzel a gondolatmenettel (2)-ből indulva E értéke 3 vagy 4, K értéke 7 vagy 6, a (2) ezres oszlopából nincs átvitel, $E = 4$, $K = 6$. Mindezeket beírva feladatunk egyszerűsödik:

$$(1')\quad \begin{array}{rl} B\;C\;D & \text{(tízes)} \\ G\;H & \text{(tízes)} \\ \hline 5\;\;1\;\;8 & \text{(tízes)} \end{array} \qquad\qquad (2')\quad \begin{array}{rl} D\;C\;B & \text{(tízes)} \\ H\;G & \text{(tízes)} \\ \hline 2\;\;3\;\;9 & \text{(tízes)} \end{array}$$

Innen B csak 4 vagy 5 lehet, emiatt $G = 9 - B$ is 4 vagy 5, tehát $(1')$-ből $C + G \geqslant 10$, és ezért $B = 4$, $G = 5$. Így $(2')$-ből $D = 1$ és $(1')$ alapján $H = 7$. Ekkor $(1')$ szerint C csak 6 lehet, ez a $(2')$-t is kielégíti, tehát a feladat két kiindulási száma 24 614 és 8576, a kérdéses összeg pedig 43.

10. A Földre zuhanó Hold gravitációs helyzeti energiájának megváltozása először mozgási energiává, majd hővé alakulna: $|\Delta E_{\text{grav.}}| = Q$. Felírhatjuk, hogy

$$\Delta E_{\text{grav.}} = \gamma m_{\text{Föld}} \cdot m_{\text{Hold}} \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{r}\right) \approx -\gamma m_{\text{Föld}} \cdot m_{\text{Hold}}/r,$$

ahol d a Föld és a Hold jelenlegi távolsága, r pedig a két égitest átlagos távolsága az ütközés után (ez utóbbit hozzávetőlegesen a Föld sugarával közelíthetjük), másrészt $Q = c(m_{\text{Föld}}\Delta T_{\text{Föld}} + m_{\text{Hold}} \cdot \Delta T_{\text{Hold}}) \approx c \cdot m_{\text{Föld}} \cdot \Delta T_{\text{Föld}}$, hiszen a Föld tömege lényegesen nagyobb, mint a Hold tömege. A fenti összefüggésekből (ha az átlagos fajhőt nagyságrendileg pl. a vas, a nikkel vagy a gránit fajhőjével egyenlőnek tekintjük)

$$\Delta T_{\text{Föld}} \approx \tfrac{\gamma m_{\text{Hold}}}{c \cdot r} \approx 500 - 700\ \text{K}.$$

11. Messe a $BAC\sphericalangle = \alpha$, illetve $ABC\sphericalangle = \beta$ szög szögfelezője a szemközti oldalt A_1-ben, illetve B_1-ben, és jelöljük ezeknek az AB-re eső vetületét A_2-vel, illetve B_2-vel. Az A_1, B_1 pontnak a felezett szög másik szárára való vetülete C, ezért $A_1C = A_1A_2$, (hiszen a szögfelező pontjai ugyanakkora távolságra vannak a szög két szárától), tehát az A_1CA_2 háromszög egyenlő szárú. Így $A_1CA_2\sphericalangle = \alpha/2$, hiszen $BA_1A_2\sphericalangle = \alpha$. Hasonlóképpen $B_1CB_2\sphericalangle = \beta/2$, és így

$$A_2CB_2\sphericalangle = 90^\circ - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) = 45^\circ,$$

tehát az A_2B_2 szakasz 45°-os szögben látszik a C-ből.

12. A neutronnak *van* mágneses nyomatéka, jóllehet semleges részecske. Ennek oka, hogy a neutron töltéssel és spinnel rendelkező kvarkokból áll, amelyek még mozognak is az összetett rendszerben, tehát köráramokat képviselnek. A neutron mágneses nyomatéka a spinjével ellentétes irányú, mert – a mérések szerint – az ún. giromágneses faktora negatív: $-3{,}82$.

13. Mivel a, b, c egy-egy számrendszer alapszámát jelöli, azért mindegyikük pozitív egész, és a felhasznált számjegyek alapján $a \geqslant 4$, $b \geqslant 5$, $c \geqslant 10$. A számrendszer egységeit kiírva a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$(a^2+1) + (2b^2+1) = (3c+9) + 9,$$
$$(2a^2+3) + (4b^2+4) = (7c+7) + 8.$$

A szokásos rendezés után

$$a^2 + 2b^2 = 3c + 16,$$
$$2a^2 + 4b^2 = 7c + 8.$$

A második egyenletből kivonva az első kétszeresét $c = 24$ és $a^2 + 2b^2 = 88$ adódik.

Az egyenletből leolvashatjuk, hogy a^2 páros, tehát 4-gyel is osztható:

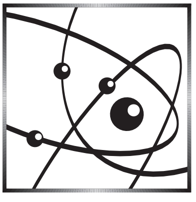
$$b^2 = 44 - \frac{a^2}{2}, \qquad \text{ahol } \frac{a^2}{2} \text{ páros.}$$

$b^2 < 44$, s mivel $b \geqslant 5$ és páros, így b csak 6 lehet, és akkor $a = 4$.

13 + 1. Az R sugarú vízcseppben a felületi feszültségből származó $2\alpha/R$ görbületi nyomás növeli, a felületi töltésekre ható elektromos erő pedig csökkenti a csepp belsejében fellépő nyomást. Az elektromos húzófeszültség (negatív nyomás) nagysága $\varepsilon_0 E^2/2$, ahol $E = (ne)/(4\pi\varepsilon_0 R^2)$ az n elemi töltést tartalmazó vízcsepp felületénél kialakuló elektromos térerősség (az 1/2 faktor abból ered, hogy a gömbön belül nulla a tér, azon kívül pedig E.). A cseppben a nyomás akkor egyezik meg a légköri nyomással, ha a felületi feszültségből származó és az elektromos térből származó nyomások éppen kiegyenlítik egymást:

$$\frac{2\alpha}{R} = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{ne}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\right)^2.$$

Ennek megfelelően n százmilliós nagyságrendű, tehát az Avogadro-számnál lényegesen kisebb, de a néhány száznál sokkal nagyobb szám.



Fizikából kitűzött feladatok

M. 373. Mérjük meg egy nagyobb darab kavics hőkapacitását!

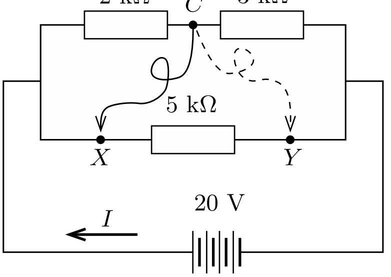
(*6 pont*) Közli: *Gnädig Péter,* Vácduka

G. 617. Egy tehergépkocsi 70 km/h sebességgel halad egy 120 m sugarú, kör alakú, vízszintes pályán. Legalább mekkora a tapadási súrlódási tényező, ha a gépkocsi nem csúszik meg?

(*3 pont*)

G. 618. Legfeljebb mennyi vizet tud felpumpálni 50 m mélyről negyedóra alatt egy 2 kW teljesítményű búvárszivattyú?

(*3 pont*)



G. 619. A kapcsolási rajzon szereplő hajlékony vezetékkel a C pontot vagy az X, vagy az Y ponttal köthetjük össze.

a) Mekkora ebben a két esetben a főág áramának I erőssége?

b) Mekkora ennek az áramnak az erőssége, ha a hajlékony vezetéket lekapcsoljuk a C pontról?

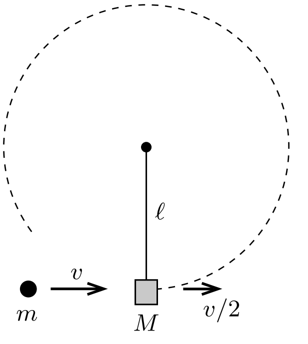
(*3 pont*)

G. 620. Ha vihar idején villám csap egy tóba, elpusztult halak kerülnek a felszínre, pedig elhanyagolható annak valószínűsége, hogy a villám éppen eltalál egy halat. Mi lehet az ok?

(*3 pont*)

P. 4980. Megegyezik a **G. 620.** gyakorlattal.

P. 4981. Egy m tömegű, v sebességű test az *ábrán* látható módon átlövi az M tömegű, felfüggesztett testet, amelyet $v/2$ sebességgel hagy el. Először úgy, hogy az M tömegű test egy ℓ hosszúságú, merev, elhanyagolható tömegű pálcán van felfüggesztve, másodszor pedig ℓ hosszúságú fonálon lóg. Átlövése után az M tömegű test mindkét esetben befutja az ℓ sugarú körpályát. Határozzuk meg az ehhez szükséges v sebességet mindkét esetben! Mekkora a két sebesség aránya?



(*4 pont*) Közli: *Kobzos Ferenc,* Dunaújváros

P. 4982. Egy 5 cm sugarú, tömör henger súrlódásmentesen foroghat saját vízszintes tengelye körül. A henger palástjára hosszú, vékony fonalat csavarunk, amelynek szabad végére a hengerrel azonos tömegű testet függesztünk.

a) A rendszer nyugalmi helyzetből indulva mozgásba jön. Hány fordulatot tesz meg a henger 1,2 másodperc alatt?

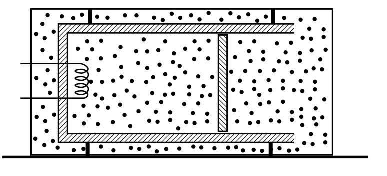
b) Mekkora a felfüggesztett test sebessége N számú hengerfordulat után?

(A légellenállást elhanyagolhatjuk.)

(*4 pont*) Közli: *Tornyos Tivadar Eörs,* Budapest

P. 4983. Rögzített, hővezető falú, zárt tartály belsejéhez az *ábra* szerint egy hőszigetelt falú henger van erősítve. A hengerben lévő 1 dm^2 keresztmetszetű, hőszigetelő dugattyú súrlódásmentesen mozoghat. Kezdetben a hengerben is és a tartályban is 2,6 dm^3 térfogatú, 10^5 Pa nyomású és 27 °C hőmérsékletű levegő van.

A hengerben lévő levegőt egy fűtőszállal melegíteni kezdjük, eközben a tartályban lévő levegő hőmérséklete állandó marad.



a) Mennyivel mozdul el a dugattyú, ha a hengerben lévő levegő hőmérséklete 77 °C-ra nő?

b) Ábrázoljuk vázlatosan a hengerben lévő gáz állapotváltozását a p–V állapotsíkon!

c) Becsüljük meg, mennyi hőt vesz fel a hengerben lévő levegő!

(*5 pont*) Közli: *Zsigri Ferenc,* Budapest

P. 4984. Fejezzük ki a $\kappa = c_p/c_V$ fajhőhányadossal, hogy egy állandó nyomáson zajló tágulási folyamatban a gáz által felvett hő hányad része fedezi a tágulási munkát!

(*3 pont*) Közli: *Légrádi Imre,* Sopron

P. 4985. Egy fényképezőgép objektívjének fókusztávolsága 3 cm. Egy távoli tárgyról fényképet készítünk, majd a képet 3-szorosára felnagyítjuk. Mit látunk nagyobbnak, a fénykép készítésének helyéről nézve a tárgyat, vagy ugyanezt a tárgyat a fényképen? Hányszor nagyobbnak látjuk?

(*4 pont*) *Példatári feladat nyomán*

P. 4986. Szabályos háromszög csúcsaiban Q nagyságú, pontszerű töltések vannak rögzítve. A háromszög közepén egy q nagyságú, m tömegű, pontszerű töltés rezeg a háromszög egyik súlyvonala mentén. A rezgés amplitúdója a háromszög köré írható kör D átmérőjénél sokkal kisebb.

Mekkora a rezgés körfrekvenciája? (Csak az elektromos erőket vegyük figyelembe.)

(*5 pont*) Közli: *Radnai Gyula,* Budapest

P. 4987. Homogén mágneses mezőben az R sugarú, A keresztmetszetű réz körvezető által körülvett mágneses fluxus időben $\Phi(t) = \Phi_0 + kt$ függvény szerint változik. (A mágneses indukció merőleges a körvezető síkjára.)

Mekkora rugalmas feszültség keletkezik a körvezetőben a t_0 időpillanatban?

Adatok: $R = 10$ cm, $A = 0{,}5$ mm^2, $\Phi_0 = 0{,}04$ Vs, $k = 5$ mV, $t_0 = 2$ s.

(*5 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest

P. 4988. Az 1,4 millió km átmérőjű Nap 25,4 nap alatt fordul meg a tengelye körül, amely jó közelítéssel a földpálya síkjára merőlegesnek vehető. Ebből következően a Nap egyik fele távolodik tőlünk, míg a másik közeledik hozzánk, ami a színképvonalak hullámhossztartományának Doppler-kiszélesedését okozza.

Mekkora ez az érték nm-ben kifejezve az 550 nm-es hullámhossz környékén?

(*4 pont*) Közli: *Hudoba György,* Székesfehérvár

P. 4989. Az α-bomló ^{235}U izotópok felezési ideje 704 millió év. A bomlás mellett spontán hasadások is bekövetkezhetnek (ekkor nagyobb tömegű magtöredékek keletkeznek). Másodpercenként átlagosan 0,0056 hasadás történik 1 kg 235-ös uránban.

a) A ^{235}U atommagok hány százaléka alakul át spontán hasadással?

b) Mennyi lenne a ^{235}U felezési ideje, ha csak spontán hasadások történnének?

(*4 pont*) Közli: *Vass Miklós,* Budapest

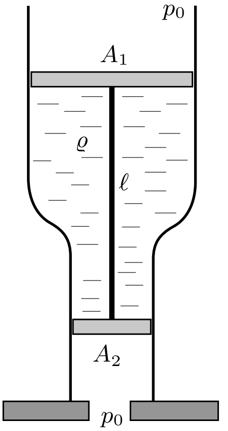
P. 4990. Egy függőleges tengelyű, rögzített cső szélesebb részének keresztmetszete A_1, a keskenyebb részé pedig A_2. A csőben két dugattyú és közöttük ϱ sűrűségű folyadék van. A dugattyúkat ℓ hosszúságú, merev rúd köti össze. A dugattyúk és a rúd tömege elhanyagolható. A külső légnyomás p_0.

Mekkora és milyen irányú erő hat a rúdban, ha a cső

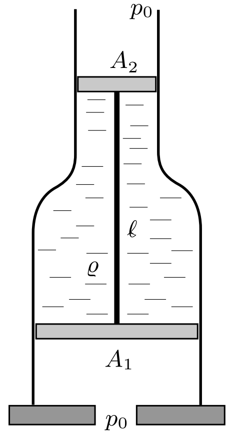
a) a keskenyebb,

b) a szélesebb

részére támaszkodik egy vízszintes lapon?



a)



b)

Milyen furcsaság történik akkor, ha ℓ „viszonylag nagy”?

(*6 pont*) *A Kvant* nyomán

Beküldési határidő: 2018. január 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS
(Volume 67. No. 9. December 2017)

Problems in Mathematics

New exercises for practice – competition K (see page 543): **K. 565.** Arthur Dumpling the fat bird (a popular Hungarian cartoon character) plans to make a new year's resolution on 31 December 2017. Starting with 1 January 2018, he would go on a special slimming diet. On each day, he needs to start by calculating how many bars of chocolate he is allowed to eat that day. He considers the number of the current day in the year 2018. If the day number is even then he may eat as many bars of chocolate as on the day with half the current day number. (For example, on the 26th day of the year he is allowed to eat as many bars as on day 13.) If the day number is odd and greater than 1, then he may eat one fewer as he will be allowed to eat on the following day. The slimming diet ends on 30 December. Given that Arthur will eat 3 bars of chocolate on 9 January, how many bars will he eat on 24 December 2018? **K. 566.** The lengths of the sides of a quadrilateral $ABCD$ are $AB=8$ cm, $BC=7$ cm, $CD=6$ cm and $DA=5$ cm. The inscribed circles of triangles BCD and ABD touch diagonal BD at points E and F, respectively. What is the length of the line segment EF? **K. 567.** Find all positive integers n less than 1000 whose square ends in n. **K. 568.** *a*) Find a set of four different prime numbers less than 50 such that the sum of any three of them is also a prime. *b*) Are there five different positive primes such that the sum of any three of them is also a prime? **K. 569.** Determine the four-digit positive integer $\overline{abcd}$ for which $\overline{abcd}=a^a+b^b+c^c+d^d$. **K. 570.** Five bystanders are trying predict the outcome of a football game. They make the following statements about the two teams, Team Fox and Team Wolf. Aron: Team Fox will score more than Team Wolf. Team Wolf will score at least 2 goals. Bob: The game will not be a draw. Team Fox will score 1 goal. Cecil: The winning team will win by 2 goals. At half-time, Team Wolf will have scored more. Dan: Team Wolf will not score any goal. Team Fox will win the game. Eve: In the second half of the game, Team Fox will score twice as many goals as Team Wolf. The game will be a draw. We know that finally there was no own goal during the game, and everyone had one true and one false statement in the above list. What is the final result of the game?

New exercises for practice – competition C (see page 544): **Exercises up to grade 10: C. 1448.** Solve the following equation on the set of positive integers: $\left[\frac{2017}{x}\right]+\left[\frac{2018}{x+1}\right]=230$, where $[a]$ denotes the greatest integer that is not greater than a. (Proposed by *Zs. M. Tatár,* Felsőgöd) **C. 1449.** A regular eight-pointed star is inscribed in a unit circle as shown in the *figure.* How long is the perimeter of the star? **Exercises for everyone: C. 1450.** In base n notation, where $n>3$, a number is divisible by 3 if and only if the sum of its digits is divisible by 3. Determine all such n. **C. 1451.** Where does the curve of equation $y=x|x|-2x+3$ intersect the x axis? Find the location and type of local extrema of this curve, and determine the corresponding y coordinates. **C. 1452.** A trapezium is inscribed in a circle of radius 13 cm. The distance of the diagonals of the trapezium from the centre of the circle is 5 cm. What is the maximum possible area of the trapezium? **Exercises upwards of grade 11: C. 1453.** A 3×3 square lattice contains twelve grid line segments of unit length in its interior. Four out of the twelve line segments are selected at random. What is the probability that the selected line segments divide the square into at least two parts? **C. 1454.** There are two identical clocks at the reception of a hotel. One clock shows the time in London, and the other shows the time in Moscow. A spider has made a web between the hour hands of the two clocks. While the thread is stretching elastically, the spider always stays at the midpoint. What will be the path described by the spider during the course of 24 hours? (The time lag between London and Moscow is 3 hours.)

New exercises – competition B (see page 552): **B. 4912.** Prove that the equation $5x^2-4y^2=2017$ has no integer solution. (*3 points*) **B. 4913.** The diagonal AC bisects the angle lying at vertex A of a cyclic quadrilateral $ABCD$. Let E denote a point on the extension of side AD beyond D. Show that $CE=CA$ holds if and only if $DE=AB$. (*3 points*) (*Bulgarian problem*) **B. 4914.** Let $p(x)$ be a polynomial of integer coefficients such that there exist 4 distinct integers a, b, c, d with $p(a)=p(b)=p(c)=p(d)=2000$. *a*) Prove that there is no integer x_0 for which $p(x_0)=2017$. *b*) Find a polynomial $p(x)$ that meets the above requirement, and find an integer x_1 for which $p(x_1)=2018$. (*4 points*) **B. 4915.** Given any points A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 and P in the plane, let k_i denote the number of ways it is possible to select i points out of A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 such that the convex hull of the selected points should contain P. Show that $k_3 = k_4$. (*5 points*) **B. 4916.** Let $P(a, b, c)$ be a fixed point in the 3D Cartesian coordinate system. Let $a, b, c > 0$ and let O denote the origin. Let S be a plane passing through P that intersects the positive coordinate axes at the points X, Y and Z. Show that the volume of tetrahedron $OXYZ$ is a minimum if and only if P is the centroid of triangle $XYZ\triangle$. (*4 points*) **B. 4917.** Determine all functions $f : \big(\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}\big) \to \mathbb{R}$ for which $f\Big(\frac{x-1}{x}\Big) + f\Big(\frac{1}{1-x}\Big) = 4 - \frac{2}{x}$. (*5 points*) (Proposed by *B. Kovács,* Szatmárnémeti) **B. 4918.** Given M unit vectors in the space ($M \geqslant 2$), prove that it is possible to select $M - 1$ unit vectors such that the length of their sum is at least unity. (*5 points*) **B. 4919.** Let I be the centre of the inscribed circle of triangle ABC. The inscribed circle touches the sides BC, CA and AB at the points A_1, B_1 and C_1, respectively. The lines AB and A_1B_1 intersect at point K. Show that the circle centred at K and passing through C_1, and the inscribed circles of the kites AC_1IB_1 and BA_1IC_1 have a tangent in common, and that tangent passes through the point C. (*6 points*) **B. 4920.** A frame of width 2 units is drawn around an 8×8 chessboard. In how many different ways is it possible to cover that frame without gaps or overlaps with 1×2 dominoes? (The two arrangements shown in the *figure* are considered different.) (*6 points*) (Proposed by *S. Róka,* Nyíregyháza)

New problems – competition A (see page 553): **A. 710.** For which n can we partition a regular n-gon into finitely many triangles such that no two triangles share a side? (Based on a problem of the *2017 Miklós Schweitzer competition*) **A. 711.** For which pairs (m, n) does there exist an injective function $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ under which the image of every regular m-gon is a regular n-gon. (Note that $m, n \geqslant 3$, and that by a regular N-gon we mean the union of the boundary segments, not the closed polygonal region.) (Proposed by: *Sutanay Bhattacharya,* Bishnupur, India) **A. 712.** We say that a strictly increasing positive real sequence $a_1, a_2, \ldots$ is an *elf sequence* if for any $c > 0$ we can find an N such that $a_n < cn$ for $n = N, N + 1, \ldots$. Furthermore, we say that a_n is a *hat* if $a_{n-i} + a_{n+i} < 2a_n$ for $1 \leqslant i \leqslant n - 1$. Is it true that every elf sequence has infinitely many hats?

Problems in Physics

(see page 570)

M. 373. Measure the heat capacity of a great piece of pebble (or a small sized cobble).

G. 617. A lorry travels at a speed of 70 km/h along a horizontal, circular path of radius 120 m. What is the minimum value of the coefficient of static friction if the vehicle does not slide? **G. 618.** At most what amount of water can be pumped up in a quarter of an hour from a depth of 50 m by means of a submersible pump of power rating 2 kW? **G. 619.** Point C can be connected to either point X or to point Y by means of a piece of flexible wire as shown in the figure of the circuit. *a*) What is the value of current I in the main branch in each case? *b*) What is the value of this current if the flexible wire is disconnected from point C? **G. 620.** When there is a thunderstorm, and a lightning strikes a lake, then although it has negligibly small probability that a fish is just struck by the lightning, there are bodies of dead fish floating on the surface of the water. What is the reason?

P. 4980. Same as exercise **G. 620. P. 4981.** An object of mass m and of speed v is shot through the suspended object of mass M, as shown in the *figure,* and leaves it at a speed of $v/2$. The hung object of mass M is first suspended on a negligible mass rigid rod of length ℓ, and second it is suspended on a thread of length ℓ. After the object of mass M was shot through, it moves along the circular path of radius ℓ in both cases. Determine the values of the necessary speed of v in both cases. What is the ratio of these speeds? **P. 4982.** A solid cylinder of radius 5 cm can be rotated about its own horizontal symmetry axis. A long piece of thin thread is wrapped around the lateral surface of the cylinder, such that an object, which has the same mass as the cylinder, is attached to the free end of the thread. *a*) The system begins to move from rest. How many revolutions does the cylinder turn in 1.2 seconds? *b*) What is the speed of the suspended object after N complete turns of the cylinder? (Neglect air resistance.) **P. 4983.** A cylinder, whose walls are thermally insulated, is attached to the inside part of the wall of a fixed closed cylinder as shown in the *figure.* The wall of the container is made of some heat conducting material. The thermally insulated piston of cross sectional area of 1 dm^2 in the cylinder can move frictionlessly. Initially both in the container and in the cylinder there is a sample of air of volume 2.6 dm^3 at a pressure of 10^5Pa, and at a temperature of 27 °C. The air in the cylinder is then heated by means of an electric heater, while the temperature of the air in the container remains constant. *a*) How much distance does the piston move if the temperature of the air in the cylinder increases to 77 °C? *b*) Sketch the change of states of the air inside the cylinder on the p–V diagram. *c*) Estimate how much heat is absorbed by the air inside the cylinder. **P. 4984.** Express, in terms of the ratio of the specific heat capacities, $\kappa = c_p/c_V$, what portion of the absorbed heat by a sample of gas, expanding at constant pressure, is the work done by the expanding gas. **P. 4985.** The focal length of the objective lens of a camera is 3 cm. A photo is taken about a distant object and then the image is enlarged by a scale factor of three. What is observed to be greater, the object or its image on the picture? By what factor is the greater one larger than the other? **P. 4986.** At each vertex of an equilateral triangle a point-like charge Q is fixed. A point-like charge of mass m and of charge q is oscillating in the middle of the triangle along one of the medians of the triangle. The amplitude of the oscillation is much smaller than the diameter D of the circumscribed circle of the triangle. What is the angular frequency of the oscillation? (Consider only the electric forces.) **P. 4987.** The flux linkage of a circular copper loop of radius R and of cross sectional area A, is changing in time as $\Phi(t) = \Phi_0 - kt$. The loop is in uniform magnetic field and the magnetic induction is perpendicular to the plane of the loop. *a*) What is the tension in the loop at the moment of t_0? *b*) What is the value of the current in the loop at the moment when the magnetic induction is zero? *Data:* R =10 cm, $A = 0.5\ \mathrm{mm}^2$, $\Phi_0 = 0.04$ Vs, $k = 5$ mV, $t_0 = 2$ s. **P. 4988.** The Sun has a radius of 1.4 million km and is making one complete rotation in approximately 25.4 days about its axis, which is approximately perpendicular to the plane of the orbit of the Earth. Consequently one part of the Sun is moving away from us whilst the other is approaching us, which leads to the broadening of the spectral lines due to the Doppler effect. What is the value of this broadening in nm for a spectral line of wavelength approximately 550 nm? **P. 4989.** The half-life of the alpha decaying Uranium isotope of ^{235}U is 704 years. Besides the alpha decays spontaneous fissions may occur as well (resulting in daughter nuclides of greater mass). As an average 0.0056 fissions occur in 1 kg Uranium 235 in one second. *a*) What percent of the ^{235}U nuclides undergo spontaneous fission? *b*) What would the half-life of ^{235}U be if only spontaneous fissions occurred? **P. 4990.** The cross section of the wider part of a fixed vertical tube is A_1, whilst that of its narrower part is A_2. In the tube, between two pistons, there is some liquid of density ϱ. The pistons are connected by means of a rigid rod of length ℓ. The masses of the rod and the pistons are negligible. The ambient air pressure is p_0. What is the magnitude and the direction of the force exerted in the rod if *a*) the narrower, *b*) the wider part of the tube is on the horizontal tabletop? What strange thing happens if ℓ is "relatively large"?

A Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok 67. évfolyamának tartalomjegyzéke (2017)

Versenyek:

Közlemények:

Mellékletek:

MATEMATIKA

Cikkek:

Versenyek:

Közlemények:

Nekrológ:

Emelt szintű matematika érettségi gyakorló feladatsorok és megoldásvázlatok:

Megoldások:

C gyakorlatok megoldásai:

B feladatok megoldásai:

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok:

Angol nyelvű kivonatok:

Problems in physics: 63., 127., 191., 255., 319., 383., 447., 511., 575.

A pontversenyben megoldott és kitűzött matematika és fizika példák csoportosítása tárgykörök szerint

A példák száma mögött zárójelben az oldalszám olvasható, ha két szám fordul elő, az első a kitűzés, a második a megoldás helyét jelöli. A matematika feladatok felsorolásának sorrendje: A jelű nehezebb feladatok, B feladatok, C gyakorlatok, K gyakorlatok. A fizika feladatok felsorolásának sorrendje: M mérési feladatok, G gyakorlatok, P feladatok.

MATEMATIKA

Aritmetika, algebra (műveletek számokkal, kifejezésekkel, azonosságok):
B. 4844 (29); 4854 (95, 472); 4859 (161); 4866 (162); 4867 (225); 4879 (284); 4887 (355); 4894 (417); – C. 1392 (27); 1406 (160); 1408 (160); 1410 (160); 1426 (283); 1443 (477); – K. 553 (415); 569 (544).

Számelméleti feladatok (egész számok, prímszámok, oszthatóság, számrendszerek):
A. 691 (96); 697 (227); 700 (285); 703 (357); 706 (419); 708 (480); – B. 4770 (88); 4786 (22); 4811 (216); 4821 (220); 4827 (274); 4830 (221); 4840 (28, 344); 4842 (28, 223); 4857 (95, 346); 4871 (226); 4872 (226); 4881 (284); 4885 (355, 541); 4895 (417); 4903 (478); 4912 (552); 4914 (552); – C. 1375 (213); 1394 (27); 1410 (160); 1413 (224); 1418 (225); 1421 (282); 1426 (283); 1428 (354); 1430 (354); 1432 (354, 535); 1438 (417); 1450 (545); – K. 533 (26); 537 (92); 538 (92); 551 (353); 552 (353); 554 (415); 555 (415); 558 (416); 562 (476); 567 (543); 568 (544).

Halmazok (ponthalmazok is):
A. 698 (285); – C. 1403 (93); – K. 529 (26).

Valószínűség, kombinatorika, statisztika (kiválasztás, leszámolás, binomiális együtthatók):
A. 700 (285); 701 (356); 704 (419); – B. 4771 (154); 4864 (162, 347); 4869 (226); 4911 (480); 4920 (553); – C. 1396 (27); 1403 (93); 1405 (93); 1416 (225); 1436 (416); 1447 (478); 1453 (545); – K. 537 (92); 546 (160); 559 (476); 564 (477).

Logikai kérdések (játékok, színezések, táblázatok, sakktábla):
A. 704 (419); – B. 4855 (95, 472); 4866 (162); 4892 (356); – C. 1412 (161); 1415 (224); 1429 (354); – K. 531 (26); 535 (92); 539 (92); 543 (159); 547 (353); 548 (353); 549 (353); 550 (353); 570 (544).

Az összes C gyakorlat megoldása a feladatok sorrendjében:

Az összes B feladat megoldása a feladatok sorrendjében:

FIZIKA

Fénytan:

P. 4847 (51); 4881 (250); 4887 (305); 4900 (60, 498); 4901 (60); 4910 (124, 433); 4924 (189, 312); 4943 (316); 4956 (381); 4966 (444); 4985 (572); Eötvös-verseny 2016/2 (107).

Hőtan:

G. 580 (176); 590 (58, 241); 598 (187); 606 (379); 610 (442); 616 (507); 620 (571); – M. 373 (570); – P. 4837 (49); 4859 (52); 4868 (178); 4878 (247); 4886 (375); 4898 (59); 4905 (123); 4907 (123, 503); 4921 (188); 4931 (252); 4932 (253); 4942 (316); 4953 (380); 4974 (508); 4980 (571); 4983 (571); 4984 (572).

Csillagászat, asztrofizika:

G. 581 (176); 610 (442); – P. 4988 (572).

Statisztikus fizika:

P. 4902 (60); 4906 (123).

Elektro- és magnetosztatika:

G. 608 (379); – P. 4838 (50); 4870 (118); 4871 (242); 4879 (179); 4891 (184); 4899 (59); 4902 (60); 4903 (60); 4913 (124); 4923 (188); 4926 (189); 4933 (253); 4934 (253); 4944 (316); 4949 (379); 4955 (380); 4967 (444); 4969 (444); 4975 (508); 4976 (508); 4978 (509); 4979 (509); 4986 (572).

Elektrodinamika:

P. 4800 (46); 4880 (248); 4957 (381); 4987 (572).

Egyenáramú hálózatok:

G. 607 (379); 619 (570); 620 (571); – P. 4859 (52); 4889 (183); 4922 (188); 4927 (251); 4934 (253); 4959 (381); 4968 (444); 4980 (571); Eötvös-verseny 2016/3 (110).

Váltóáramú hálózatok:

P. 4873 (54); 4904 (61, 500); 4914 (124, 377); 4977 (509).

Atomfizika és magfizika:

P. 4855 (177); 4872 (119); 4882 (494); 4892 (185); 4925 (189); 4935 (253, 437); 4936 (253); 4945 (317); 4947 (317); 4958 (381); 4989 (572).

Egyéb:

M. 372 (506); – P. 4909 (124); 4937 (253); 4949 (379); Áprilisi pótfeladat (254, 374).

Az összes mérési feladat megoldása a feladatok sorrendjében:

362 (173); 365 (237); 367 (491).

Az összes gyakorlat megoldása a feladatok sorrendjében:

578 (175); 580 (176); 581 (176); 584 (240); 587 (371); 588 (372); 590 (241); 592 (373); 594 (493); 597 (432).

Az összes feladat megoldása a feladatok sorrendjében:

4800 (46); 4837 (49); 4838 (50); 4847 (51); 4848 (115); 4855 (177); 4859 (52); 4865 (117); 4867 (118); 4868 (178); 4870 (118); 4871 (242); 4872 (119); 4873 (54); 4874 (243); 4875 (245); 4876 (120); 4878 (247); 4879 (179); 4880 (248); 4881 (250); 4882 (494); 4884 (303); 4885 (181); 4886 (375); 4887 (305); 4889 (183); 4891 (184); 4892 (185); 4893 (307); 4895 (310); 4896 (495); 4897 (496); 4900 (498); 4904 (500); 4907 (503); 4908 (504); 4910 (433); 4911 (505); 4914 (377); 4924 (312); 4935 (437); 4946 (438); Áprilisi pótfeladat (374).