Átrendezve:

$$\sin\alpha - 0{,}09 - \left(\frac{\sin^2\alpha}{4} + \frac{\cos^2\alpha}{4}\right) = 0{,}3\cos\alpha.$$

Kihasználva, hogy $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, kapjuk, hogy $\sin\alpha - 0{,}34 = 0{,}3\cos\alpha$.

($*$) Ismét négyzetre emelünk:

$$\sin^2\alpha - 0{,}68\sin\alpha + 0{,}1156 = 0{,}09\cos^2\alpha.$$

$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$ helyettesítéssel:

$$1{,}09\sin^2\alpha - 0{,}68\sin\alpha + 0{,}0256 = 0,$$

$$\sin\alpha_{1,2} \approx \frac{0{,}68 \pm \sqrt{0{,}68^2 - 4\cdot 1{,}09\cdot 0{,}0256}}{2\cdot 1,09} = \frac{0{,}68 \pm \sqrt{0{,}350\,784}}{2{,}18} \approx \frac{0{,}68 \pm 0{,}5923}{2{,}18}.$$

Azaz $\sin\alpha \approx 0{,}5836$, tehát $\alpha \approx 35{,}705^\circ$, vagy $\sin\alpha \approx 0{,}0402$, tehát $\alpha \approx 2{,}306^\circ$.

Ez utóbbi a második négyzetre emelésnél keletkezett hamis gyök (a négyzetre emelés előtt az egyenlet bal oldala negatív, a jobb oldala pozitív). Előbbi érték viszont valóban megoldása a feladatnak, hiszen könnyű meggyőződni róla, hogy ebben az esetben mindkét négyzetre emelésnél az egyenlőség mindkét oldala pozitív.

Tehát $\alpha \approx 36^\circ$ esetén lesz a mozdony áramszedőjének csúcsa éppen 1 méter magasan.

*II. megoldás* a ($*$)-gal jelölt résztől kezdve:

$$\sin\alpha - 0{,}3\cos\alpha = 0{,}34.$$

$\sqrt{1^2 + 0{,}3^2} = \sqrt{1{,}09}(\approx 1{,}044)$-gyel osztva:

$$\frac{1}{\sqrt{1{,}09}}\sin\alpha - \frac{0{,}3}{\sqrt{1{,}09}}\cos\alpha = \frac{0{,}34}{\sqrt{1{,}09}}.$$

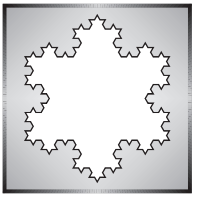
Mivel $\frac{1}{\sqrt{1{,}09}} \approx \cos 16{,}699^\circ$ és $\frac{0{,}3}{\sqrt{1{,}09}} \approx \sin 16{,}699^\circ$, ezért ez (az ismert addíciós tétel segítségével) így írható:

$$\sin\alpha\cos 16{,}699^\circ - \cos\alpha\sin 16{,}699^\circ = \sin(\alpha - 16{,}699^\circ) = \frac{0{,}34}{\sqrt{1{,}09}} \approx \sin 19{,}006^\circ,$$

ahonnan (mivel $\alpha$ hegyesszög) $\alpha - 16{,}699^\circ \approx 19{,}006^\circ$, azaz $\alpha \approx 35{,}705^\circ$.

**Koncz Levente**
Budapest

## C gyakorlat megoldása



**C. 1404.** *Az ABC egyenlő szárú háromszög AB alapjának F felezőpontjából a BC oldalra bocsátott merőleges talppontja D. Az FD szakasz felezőpontja G. Mutassuk meg, hogy AD merőleges CG-re.*

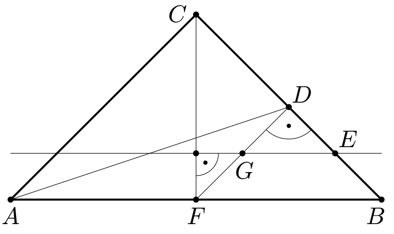
**I. megoldás.** Legyen $E$ a $BD$ szakasz felezőpontja. Mivel $G$ az $FD$ szakasz a felezőpontja, azért $EG$ a $BDF$ háromszögnek középvonala, és így $EG \parallel BF$. Mivel $BF$ merőleges $CF$-re, azért $EG$ is merőleges $CF$-re (*1. ábra*).

Továbbá, mivel $FD$ merőleges $BC$-re, $EG$ pedig $CF$-re, azért a $G$ pont az $FEC$ háromszög magasságpontja. Ebből következik, hogy $CG$ merőleges az $EF$ szakaszra.

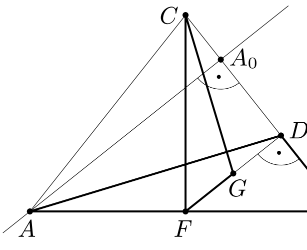
Az $ABD$ háromszögben $E$ a $BD$ oldal, $F$ pedig az $AB$ oldal felezőpontja, így $EF$ az $ABD$ háromszög középvonala, amiből következik, hogy $EF \parallel AD$.

Mivel $CG$ merőleges $EF$-re, azért merőleges az $EF$-fel párhuzamos $AD$ szakaszra is.

*Szillágyi Éva* (Újvidék, Jovan Jovanović Zmaj Gimn., 11. évf.)




*1. ábra*




*2. ábra*

**II. megoldás.** $AFC\sphericalangle = BFC\sphericalangle = 90°$. Az $A$ pontból állítsunk merőlegest a $BC$ oldalra, talppontját nevezzük $A_0$-nak.

$ABC\sphericalangle = CFD\sphericalangle$, mert merőleges szárú hegyesszögek. Így az $AA_0B$ és a $CFD$ derékszögű háromszögeknek két szöge is megegyezik, így hasonlóak. Az $AB$ oldal merőleges a $CF$-re, ha ezeket azonos szöggel forgatjuk azonos (pozitív vagy negatív) irányba, az általuk bezárt szög $90°$ marad (*2. ábra*).

Mivel $F$ az $AB$ oldal felezőpontja és $FD \parallel AA_0$, azért az $FD$ az $ABA_0$ háromszög középvonala és $D$ a $BA_0$ szakasz felezőpontja. Tehát $AD$ az $AA_0B$ háromszög $A$ csúcsából a szemközti oldal felezőpontjába megy, hasonlóan a $CG$ a $CFD$ háromszög $C$ csúcsából az $FD$ felezőpontjába. Így az $ABD$ háromszög hasonló a $CFG$ háromszöghöz. Emiatt $BAD\sphericalangle = FCG\sphericalangle$. Tehát ha ezzel a szöggel forgatjuk el az $AB$, illetve a $CF$ szakaszokat, melyekről tudjuk, hogy merőlegesek egymásra, akkor pontosan az $AD$ szakasz, illetve a $CG$ szakasz egyenesére jutunk, azaz ezek is merőlegesek egymásra.

*Takács Réka* (Budapest, Békásmegyeri Veres Péter Gimn., 11. évf.)

**III. megoldás.** Bizonyítandó, hogy az $AD$ szakasz merőleges a $CG$-re. Vektorokkal ez úgy írható fel, hogy a skaláris szorzatuk 0, tehát $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CG} = 0$. Ezt szeretnénk belátni. Alakítsuk a bal oldalt:

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CG} = (\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FD}) \cdot \frac{\overrightarrow{CF} + \overrightarrow{CD}}{2} =$$

$$= \frac{\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{CD}}{2}.$$

Tudjuk, hogy $\overrightarrow{AF} \perp \overrightarrow{CF}$ és $\overrightarrow{FD} \perp \overrightarrow{CD}$, tehát skaláris szorzatuk 0. Így a kifejezést tovább alakítva, az egyenlő lesz az alábbival:

$$\frac{\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{CF}}{2} = \frac{\overrightarrow{AF}(\overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FD}) + \overrightarrow{FD}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BF})}{2}.$$

Mivel $\overrightarrow{AF} \perp \overrightarrow{CF}$ és $\overrightarrow{FD} \perp \overrightarrow{CB}$, azért ez egyenlő az alábbival:

$$\frac{\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{BF}}{2} = \frac{\overrightarrow{FD}(\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BF})}{2}.$$

Mivel $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BF} = \mathbf{0}$, így ezzel beláttuk, hogy az $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CG}$ szorzat valóban zérus, tehát az $\overrightarrow{AD}$ és $\overrightarrow{CG}$ szakaszok derékszöget zárnak be egymással.

*Tatai Mihály* (Szekszárd, Garay János Gimn., 12. évf.)

**IV. megoldás.** Helyezzük el a háromszöget a derékszögű koordinátarendszerben a következőképpen: $F(0;0)$, $A(-b;0)$, $B(b;0)$, $C(0;c)$. Ekkor $\overrightarrow{CB}(b;-c)$, az $FD$ egyenes egyenlete $bx - cy = 0$, másképp $x = \frac{c}{b}y$; a $CB$ egyenes egyenlete pedig $cx + by = cb$.

Mivel a két egyenes metszéspontja $D$, ezért a $CB$ egyenletébe behelyettesítve $x = \frac{c}{b}y$-t, megkapjuk $D$ koordinátáit:

$$D\left(\frac{c^2b}{c^2+b^2}; \frac{cb^2}{c^2+b^2}\right).$$

$G$ az $FD$ felezőpontja:

$$G\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{c^2b}{c^2+b^2}; \frac{1}{2} \cdot \frac{cb^2}{c^2+b^2}\right).$$

Ebből

$$\overrightarrow{CG}\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{c^2b}{c^2+b^2}; \frac{1}{2} \cdot \frac{-cb^2-2c^3}{c^2+b^2}\right) \quad \text{és} \quad \overrightarrow{AD}\left(\frac{2c^2b+b^3}{c^2+b^2}; \frac{cb^2}{c^2+b^2}\right).$$

A merőlegesség szükséges és elégséges feltétele az, hogy a skaláris szorzat 0 legyen:

$$\overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{c^2b}{c^2+b^2} \cdot \frac{2c^2b+b^3}{c^2+b^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{-cb^2-2c^3}{c^2+b^2} \cdot \frac{cb^2}{c^2+b^2} = 0.$$

Ezzel állításunkat beláttuk.

*Németh Csilla Márta* (Budapest, Puskás T. Távközlési Techn., 11. évf.)

33 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 20 versenyző: Agócs Katinka, Édes Lili, Horváth László, Kocsis Júlia, Komoróczy Ádám, Kormányos Hanna Rebeka, Magyar Boglárka, Mészáros Melinda, Nagy Olivér, Németh Csilla Márta, Rittgasszer Ákos, Surján Anett, Szécsi Adél Lilla, Szilágyi Éva, Takács Réka, Tanács Viktória, Tatai Mihály, Thuróczy Mylan, Török Boldizsár, Zsombó István. 4 pontos 2, 2 pontos 6, 0 pontos 5 dolgozat.